نظرية الاحتمالات

الجزء الأول

تأليف

أ.د. عبد الحميد ربيع غيطان

نظرية الاحتمالات
والتوزيعات الاحتمالية

(الجزء الأول)

نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال توزيعاتها الاحتمالية

نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

(الجزء الأول)

نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال توزيعاتها الاحتمالية

أ.د. عبد الحميد محمد ربيع غيضان
أستاذ الإحصاء
وعميد كلية التجارة جامعة الأزهر

الطبعة الأولى
٢٠٠٤

دار الكتب الاكاديمية
٨ أ ش ٢٦ يوليو / ت: ٣٩١٩٠٠٦
رقم الإيداع ٢٠٠٤/٢٤٥٦
HAMEDY - YA - HoJ
Dridreis @ hot Mail.Com

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا﴾

"صدق الله العظيم"

(سورة الجن – آية 28)

إلى ..

* أمى وأبى وابنى محمد رحمهم الله

* زوجتى وأبنائى ..

هويدا وممدوح وأحمد ومصطفى

وحفيدى محمد ..

أهدى هذا الكتاب

المحتويات

عنوان الكتاب والمقدمة من (1) إلى (8)

الفصل الأول

المحتويات

الفصل الثانى

الفصل الثالث

المحتويات

الفصل الرابع

مقدمـــة

هذا الكتاب فى جزئيه الأول والثانى يعتبر محاولة من المؤلف لتقديم مرجعاً للمكتبة العربـية فـى مجال الإحصاء الرياضى لندرة المراجع العربية فى هذا المجال. واختص الكـتاب فـى الجزء الأول بموضوعات نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال كـثافات الاحـتمال ودوال التوزيع الاحتمالى ومقاييس النزعة المركزية (التوقع والتباين والعـزوم) كأدلـة توصيف للمجتمعات الإحصائية سواء للمتغيرات العشوائية المفردة أو المـتعددة وكذلـك الـدوال المولـدة للاحتمالات والعزوم وتوزيعات دوال فى متغيرات عشوائية.

وفـى الجـزء الـثانى من هذا الكتاب تناولنا بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة المـتقطعة والمتصلة لبعض المتغيرات العشوائية المفردة والمتعددة. وقد أفردنا باباً كاملاً للـتوزيع المعـتاد المتعدد هو الباب التاسع لأهمية هذا التوزيع. وتناولنا بالدراسة بعض المتـتابعات فـى متغـيرات عشوائية حيث قدمنا مفاهيم التقارب فى الاحتمال والتقارب باحتمال واحد صحيح والتقارب فى التوزيع. واختتمنا هذه الدراسة بتقديم بعض التوزيعات الاحتمالية (المضبوطة والتقاربية) لبعض الإحصاءات الهامة.

ويعتـبر هذا الكتاب محاولة لتبسيط دراسة وتفهم موضوعات الإحصاء الرياضى للدارسين باللغة العربية نظراً لندرة عمل ذلك فى المراجع العربية السابقة. كما أنه يعتبر مقدمـة جـيدة لتقديم مؤلف عربى مماثل فى موضوعات الاستدلال الرياضى ــ وهذا ما يقوم بإعداده المؤلف فى الوقت الحالى بفضل الله.

وفى النهاية أتقدم بجزيل الشكر إلى عدد كبير من الأخوة الزملاء الذين قدموا لى العـون سواء بالنصيحة أو مراجعة الكتابة وتصويب بعض الأخطاء الإملائية. كما أتقدم بالشـكر إلـى كـل زمـيل يساهم فى تزويد المكتبة العربية بالدراسات الجيدة فى مجال الإحصاء الرياضى.

والله ولى التوفيق،،

المؤلف
عبد الحميد محمد ربيع غيضان
أستاذ الإحصاء
وعميد كلية التجارة جامعة الأزهر
2003/7/22

الفصل الأول

نظرية الاحتمالات

Probability Theory

(1 ـ 1) مقدمة:

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الاجتماعية التى ظهرت وتطورت مع ظهور الدولة الحديثة، إذ بدأت الحاجة إلى حصر الإمكانيات المتاحة للدولة ـ مثل حصر عدد سكانها وتصنيفهم حسب مجموعات سنية معينة وحسب جنس كل فرد وكذلك حصر الموارد المختلفة للدولة إلى غير ذلك من البيانات التى تهم الدولة. ومع تطور وظيفة الدولة تطور علم الإحصاء وتفرع إلى فروع مختلفة لخدمة العديد من المجالات من زراعية وصناعية وطبية وفلكية وغيرها وكان من الطبيعى أن يتطور علم الإحصاء ليواكب التطور المستمر فى وظيفة الدولة الحديثة.

كما أن التطور المستمر فى العلوم التجريبية وتصميم التجارب كان لعلم الإحصاء دور كبير فيها بما قدمه من أساليب علمية كان لها كبير الأثر فى تطور هذه العلوم. كذلك استطاع علم الإحصاء أن يقدم العديد من النماذج الرياضية التى تحاكى إلى درجة كبيرة الكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية مما يمكن معه إخضاع هذه الظواهر للدراسة العلمية المنظمة عن طريق دراسة تلك النماذج الرياضية التى تحاكى (أو تشابه) هذه الظواهر ـ وهذا ما يتمثل فيما يسمى بالنماذج (أو التوزيعات) الاحتمالية والتى سوف نتعرض لها بالتفصيل فيما بعد. وأى دارس لمبادئ الإحصاء لا يخفى عليه كل ما ذكرناه عن هذا العلم والذى يمكن تعريفه بالصيغة التالية:

تعريف (1 ـ 1 ـ 1) علم الإحصاء:

علم الإحصاء هو ذلك العلم الذى يعمل على جمع البيانات المتعلقة بأى ظاهرة علمية أو اجتماعية وصياغتها فى شكل رقمى ـ ثم التعامل مع هذه البيانات الرقمية لتلخيصها وتوصيفها بصورة يستطيع العقل البشرى استيعابها مهما كانت كبيرة العدد ـ

كما أنه يقدم العديد من الأساليب والطرق العلمية التى تمكننا من استنباط العلاقات بين الظواهر المختلفة ومعرفة اتجاهاتها والتنبؤ بما تصير عليه هذه الظواهر فى المستقبل.

والتعريف السابق يوضح أن علم الإحصاء يتكون من قسمين كبيرين ــ القسم الأول ــ ويسمى بالإحصاء الوصفى ــ هو الذى يقدم الأساليب العلمية الخاصة بجمع البيانات وتوصيفها وتلخيصها وتوصيف الظواهر العلمية والاجتماعية ومحاكاتها بالنماذج الرياضية. والقسم الثانى ــ يسمى بالاستدلال الإحصائى ــ وفيه العديد من الأساليب العلمية التى تمكننا من استنباط العلاقات بين الظواهر ومعرفة اتجاهاتها والتنبؤ بما تصير عليه هذه الظواهر فى المستقبل وغير ذلك من الأساليب العلمية التى تخدم التطور المستمر فى العلوم الأخرى.

وفى إطار القسمين المشار إليهما يتكون علم الإحصاء من العديد من الفروع ــ منها "نظرية الإحصاء" وهذا الفرع هو موضوع دراستنا فى هذا الكتاب. ونظرية الإحصاء هى ذلك الفرع من فروع علم الإحصاء الذى يعمل على تقديم وتطوير الوسائل العلمية الإحصائية من نظريات وبديهيات ودوال رياضية وصيغ وقوانين تستخدم فى الأفرع الأخرى من علم الإحصاء فى الكثير من المجالات التطبيقية. فمثلاً ذلك الفرع المهم من فروع علم الإحصاء والمسمى "بتصميم التجارب" يعتمد اعتماداً كبيراً على النظرية الإحصائية فيما يستخدمه من أساليب علمية ورياضية فى تصميم التجارب وتحليل نتائجها. كذلك الحال بالنسبة لبقية أفرع علم الإحصاء المختلفة.

وتتأسس نظرية الإحصاء على أفرع كثيرة من علم الرياضة ــ وبصفة خاصة نظرية الاحتمالات. لذلك كان لزاماً علينا ونحن بصدد دراسة النظرية الإحصائية أن نبدأ بتقديم مبسط لنظرية الاحتمالات بالقدر الذى يمكننا من تقديم دراسة جيدة لنظرية الإحصاء. وتعتبر نظرية الاحتمالات فى العصر الحديث أساساً لدراسة الكثير من العلوم مثل علم الإحصاء وعلم رياضيات التأمين وغير ذلك من العلوم الحديثة.

ونظرية الاحتمالات العملاقة فى عالم اليوم كانت بدايتها فى العصر الحديث مع نهاية القرن السادس عشر وبداية القرن السابع عشر. وكانت بداياتها الأولى مرتبطة بألعاب الصدفة ــ عندما كان ملوك وأمراء أوربا فى ذلك الوقت يقضون أوقاتهم فى ألعاب المقامرة مثل إلقاء زهرة الطاولة أو سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) أو غير ذلك من الألعاب. وكان علماء الرياضة الذين لهم الفضل فى وجود وتطور نظرية الاحتمالات يجالسون هؤلاء الأمراء ويشاركونهم فى هذه الألعاب مما أدى إلى أن ألعاب الصدفة كانت هى المناخ الأول الذى ظهرت فيه نظرية الاحتمالات. ثم عكف علماء الرياضة فى ذلك الوقت أمثال ــ "بسكال" "Pascal" و"فرمات" "Fermat" و"لابلاس" "Laplace" وغيرهم على تطوير دراسات جادة كانت بداية لفرع جديد من فروع الرياضة هو نظرية الاحتمالات.

لذلك فإن عرض نظرية الاحتمالات عرضاً جيداً يتطلب أن نبدأ بالمناخ الذى بدأت منه هذه النظرية وهى ألعاب الصدفة. وألعاب الصدفة تتمثل فى إلقاء قطعة عملة أو إلقاء

زهرة نرد (زهرة طاولة) أو سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) إلى غير ذلك من الألعاب التى تتميز جميعها بأن نتيجة المحاولة غير مؤكدة. فمثلاً عند محاولة إلقاء قطعة العملة فإن النتيجة قد تكون صورة H أو كتابة T ــ ولكن لا نعلم على وجه التحديد ماذا ستكون نتيجة المحاولة ــ وإن كان من الممكن تصور أننا إذا ألقينا قطعة العملة عدد كبير من المرات وكانت القطعة متزنة ومصنوعة من معدن متجانس وعملية الإلقاء غير متحيزة سيكون تقريباً نصف عدد الرميات تعطى صورة والنصف الآخر كتابة ــ وهذا ما نسميه بوجود صفة نظامية معينة (أو خاصية معينة) فى كل لعبة من ألعاب الصدفة، هذه الصفة (أو الخاصية) لا يمكن التنبؤ بها أو ملاحظتها إلا إذا كررنا محاولة اللعبة عدد كبير من المرات. أى أن ألعاب الصدفة هذه وإن كانت تتميز بأن نتيجتها غير مؤكدة ــ إلا أنها تتميز كذلك بأن هناك صفة نظامية (أو خاصية معينة) يمكن استنباطها عند تكرار اللعبة عدد كبير من المرات. كما أن خاصيتى عدم التأكد والصفة النظامية لا تنفرد بهما ألعاب الصدفة وحدها ولكن هاتين الخاصيتين غالباً ما تتميز بهما العلوم التجريبية عامة. ولعرض نظرية الاحتمالات من خلال ألعاب الصدفة يلزمنا تقديم بعض المفاهيم والألفاظ والتعبيرات التى تبسط هذا العرض.

فمثلاً يمكن النظر إلى أى لعبة من ألعاب الصدفة أو بصفة عامة إلى أى محاولة تكون نتيجتها غير مؤكدة على أنها تجربة تتميز بأن نتيجتها غير مؤكدة لذلك سنعبر عنها بلفظ "تجربة عشوائية" "Random Experiment" ويمكن اعتبار أن التجربة العشوائية هى محاولة (أو لعبة من ألعاب الصدفة) تعتمد نتيجتها على توافر عدد كبير من الظروف التى يترتب عليها أن تكون نتيجة التجربة ناتج معين دون آخر. فمثلاً لو كانت التجربة العشوائية تتمثل فى إلقاء قطعة عملة ــ فإن النتيجة ستكون أحد ناتجين (صورة H أو كتابة T) ولكن ظهور أحدهما دون الآخر يتوقف على عدد هائل من العوامل منها طريقة إلقاء القطعة ونوع السطح الملقاة عليه ونوع المعدن المصنوعة منه وغير ذلك من العوامل التى نجهلها ــ لذلك فإن تكرار التجربة العشوائية تحت نفس الظروف (التى نعلمها) ليس من المؤكد أن يعطى نفس النتيجة. لذلك يمكن تعريف التجربة العشوائية كما يلى:

تعريف (1 ــ 1 ــ 2) التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هى عمل شىء ما أو ملاحظة شىء ما تحت ظروف معينة وتكون نتيجة التجربة أحد عدة نواتج من غير المؤكد معرفة أى منها سيتحقق. وعدد النواتج (أو النتائج أو الحالات) التى يمكن أن تنتج عن التجربة العشوائية تسمى "بالحالات الممكنة".

ويمكن الآن محاولة تعريف الاحتمال نفسه. وحيث أن تعريف الاحتمال مَرَّ بثلاث مراحل ــ لذلك سنقدم ثلاث تعريفات للاحتمال تتواكب مع تطور نظرية الاحتمالات فى مراحلها المختلفة ــ هى التعريف التقليدى والتعريف التجريبى والتعريف الحديث.

(1 ـ 2) التعريف التقليدى للاحتمال Classical Definition of Probability :

وُضِعَ هذا التعريف فى البدايات الأولى للدراسات الجادة المنظمة فى نظرية الاحتمالات (وضعه العالم الرياضى "لابلاس" "Laplace" عام 1812) ـ لذلك فهو متأثر إلى حد كبير بألعاب الصدفة. ففى أى تجربة عشوائية لو كان عدد الحالات الممكنة للتجربة يساوى n حالة أو نتيجة مثلاً ـ وكانت هذه الحالات كلها متماثلة أى لها نفس الفرصة من حيث الظهور وكانت نتيجة التجربة لابد أن تكون حالة واحدة فقط من هذه الحالات، وإذا كان الاهتمام منصب على تحقق جزء معين أو مجموعة معينة من الحالات الممكنة عددها m حالة أو نتيجة $(m \le n)$ فإننا نقول أن الحدث الذى نهتم به قد تحقق إذا كانت نتيجة التجربة هى إحدى هذه الحالات التى عددها m حالة. ومن المنطقى أن نقول أن احتمال تحقق هذا الحدث يساوى $\frac{m}{n}$. نلاحظ من هذا أننا ذكرنا أن نتيجة التجربة العشوائية هى حالة وحيدة من الحالات الممكنة وهذا ما يعنى أن الحالات الممكنة كلها متنافية أى لا يمكن حدوث حالتين أو أكثر فى آن واحد ـ كما ذكرنا أن الحالات الممكنة جميعها لها نفس الفرصة من حيث الظهور ـ أى أن الحالات الممكنة ذات فرص متكافئة وهذا ما يعنى أنها حالات متماثلة لذلك يجب تعريف المقصود بالحدث وبالحالات المتنافية والحالات المتماثلة قبل تعريف الاحتمال.

عند إجراء تجربة عشوائية نهتم عادة بحدوث جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة ـ فإذا كانت نتيجة التجربة حالة أو نتيجة من بين هذا الجزء الذى نهتم به ـ نقول أن الحدث تحقق. مثال ذلك عند إلقاء زهرة نرد متزنة لو كنا نهتم بظهور عدد زوجى من النقاط على السطح العلوى فإننا نقول أن الحدث (ظهور عدد زوجى) يتحقق إذا كانت نتيجة التجربة (2 أو 4 أو 6). وعدد الحالات التى تؤدى إلى تحقق الحدث تسمى بالحالات المواتية للحدث. لذلك يمكن تعريف الحدث كما يلى:

تعريف (1 ـ 2 ـ 1) "الحدث" The Event:

فى أى تجربة عشوائية عدد حالاتها الممكنة n، إذا كنا نهتم بتحقق جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة وكانت عدد الحالات التابعة لهذا الجزء تساوى $m(n >)$. إذن عندما تكون نتيجة التجربة إحدى هذه الحالات التى عددها m نقول أن الحدث الذى نهتم به قد تحقق ونسمى الحالات التى تتبع هذا الجزء بالحالات "المواتية" للحدث ـ وتحقق أى ناتج للتجربة من بين هذا الجزء يمثل تحقق الحدث.

وعلى ذلك لو كان عدد الحالات الممكنة للتجربة يساوى n وعدد الحالات المواتية للحدث يساوى m فإن m تعتبر جزء من الـ n. فعند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة إذا كان الحدث هو ظهور عدد زوجى فإن $n = 6$ و $m = 3$.

تعريف (1 ـــ 2 ـــ 2) الأحداث المتنافية Exclusive Events:

يقال أن الحدثان A و B متنافيان إذا استحال حدوثهما معاً.

تعريف (1 ـــ 2 ـــ 3) الحالات المتماثلة:

الحالات المتماثلة هى الحالات التى لها نفس الفرصة من حيث الظهور وتسمى "Equally Likely Cases".

تعريف (1 ـــ 2 ـــ 4) الحالات الشاملة Exhaustive Cases:

هى مجموعة النتائج الممكنة للتجربة ـــ والتى لا يوجد نتائج غيرها.

ويمكن الآن تعريف الاحتمال كما يلى:

تعريف (1 ـــ 2 ـــ 5) التعريف التقليدى للاحتمال:

فى أى تجربة عشوائية إذا كان عدد الحالات الممكنة n وكلها حالات متماثلة ومتنافية وشاملة وكان عدد الحالات المواتية للحدث A هى $m(< n)$ فإن احتمال حدوث A يساوى $\frac{m}{n}$. وفى صورة رمزية:

$$(1.2.1): P(A)=\frac{m}{n}\ .$$

مثال (1 ـــ 2 ـــ 1): عند إلقاء قطعتى عملة متزنة معاً ما هو احتمال ظهور صورة وكتابة؟

(الحل)

التجربة العشوائية هى إلقاء قطعتى العملة والحالات الممكنة لهذه التجربة هى:

HH, HT, TH, TT

(حيث H صورة، T كتابة)

إذن عدد الحالات الممكنة 4 = n وهى كلها متماثلة ومتنافية. والحدث الذى نهتم به وليكن E هو ظهور صورة وكتابة أى أن الحالات المواتية للحدث E هى:

HT, TH

عدد الحالات المواتية $m = 2$

إذن احتمال ظهور صورة وكتابة هو:

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

مثال (1 ــ 2 ــ 2): صندوق به كرة بيضاء وكرة سوداء وصندوق آخر به كرة بيضاء وكرة حمراء. والكرات جميعها متشابهة فى كل شيء ما عدا اللون. عند سحب كرة واحدة من كل صندوق بطريقة عشوائية.

(أ) ما هو احتمال الحصول على كرتان من نفس اللون؟

(ب) ما هو احتمال الحصول على كرة زرقاء؟

(الحل)

لو رمزنا للألوان الثلاثة الأبيض والأسود والأحمر بالرموز W، B، R على الترتيب. فإن نتيجة التجربة العشوائية ستكون (كرة من أحد الصندوقين وكرة من الصندوق الآخر) إحدى الحالات الممكنة التالية:

WW, WR, BW, BR

أى أن عدد الحالات الممكنة $n = 4$. وكلها متماثلة ومتنافية.

(أ) الحدث E_1 هو الحصول على كرتان من نفس اللون وهو يتحقق عندما تكون نتيجة التجربة WW فقط. إذن عدد الحالات المواتية للحدث E_1 هو $m_1 = 1$ واحتمال الحصول على كرتان من نفس اللون هو:

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{4}.$$

(ب) الحدث E_2 هو الحصول على كرة زرقاء وهذا لن يتحقق أبداً لعدم وجود أى كرة زرقاء فى أى صندوق. إذن عدد الحالات المواتية لهذا الحدث $m_2 = 0$ وبذلك يكون احتمال الحصول على كرة زرقاء من بين الكرتان المسحوبتان هو:

$$P(E_2) = \frac{0}{4} = 0$$

من التعريف السابق للاحتمال نجد أنه لأى حدث A يكون $P(A) = m/n$ حيث m (عدد الحالات المواتية للحدث) ما هى إلا جزء من الحالات الممكنة للتجربة n أى أن $m \le n$. من هذا يتضح أن الاحتمال دائماً كسر ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح وهو ما نعبر عنه رمزياً $0 \le P \le 1$. وهو يساوى الصفر إذا كان الحدث مستحيل كما فى المثال السابق ويساوى الواحد الصحيح إذا كان الحدث مؤكد.

والتعريف السابق للاحتمال يسمى كذلك بالاحتمال القبلى Priori Probability وذلك لأن احتمال الحدث يمكن حسابه دون إجراء التجربة (أى قبل إجراء التجربة). لذلك فإن التجربة فى هذا التعريف تعتبر تجربة تصورية أى يمكن تصور التجربة وحساب الاحتمالات المطلوبة للأحداث المختلفة دون إجراء التجربة نفسها. كما أن التعريف السابق

للاحتمال يتأسس على افتراضات هامة جداً منها أن الحالات الممكنة كلها متماثلة ــ والتماثل هنا شيء افتراضى بحت أى أنه صعب التحقيق من الناحية النظرية كما أنه قد يستحيل تحقيقه فى بعض الحالات. فمثلاً لو اعتبرنا نتيجة الولادة فى أى حالة ولادة تجربة عشوائية لها إحدى نتيجتين ذكر أو أنثى. فهنا الحالتين الممكنتين ليستا متماثلتين لظروف عديدة متعلقة بالوراثة وغيرها من آلاف الظروف الأخرى التى نجهلها ــ لذلك لا يمكن تطبيق التعريف التقليدى على مثل هذه التجارب ــ حتى فى تجارب ألعاب الصدفة عند إلقاء قطعة عملة مثلاً نفترض دائماً أن قطعة العملة من معدن متجانس وأن طريقة الإلقاء غير متحيزة لأى وجه وغير ذلك من الافتراضات التى قد لا يمكن تحقيقها فى الواقع مما لا يمكن معه اعتبار الحالات الممكنة كلها متماثلة. لذلك تطور تعريف الاحتمال للتغلب على هذه الصعوبات إلى ما يسمى بالتعريف التجريبى للاحتمال أو التعريف البعدى.

(1 ــ 3) التعريف التجريبى أو التعريف البعدى للاحتمال A Frequency or Posteriori Probability :

نلاحظ أن التعريف التقليدى للاحتمال يقوم على فرض أساسى وضرورى وهو أن الحالات الممكنة كلها متماثلة Equally Likely وهذا الفرض فى حد ذاته فرض خيالى إلى حد ما فهو مستحيل التحقق فى التجارب العلمية وحتى فى ألعاب الصدفة من الصعب جداً تحققه ــ فمثلاً عند إلقاء قطعة عملة نفترض أنها متزنة وأنها مصنوعة من معدن متماثل حتى تكون فرصة ظهور الصورة تعادل تماماً فرصة ظهور الكتابة ــ ولكن هذا وإن كان من الممكن تخيله من الناحية النظرية إلا أنه قد يستحيل فعلياً لذلك فلا توجد أبداً قطعة عملة متزنة فى الحقيقة كما نفترض وكذلك لا توجد زهرة نرد متزنة وبالتالى لا يمكن تحقيق فرض الفرص المتكافئة الذى يقوم عليه التعريف الكلاسيكى للاحتمال. والمثال التالى الذى نقدمه لإيضاح هذه الفكرة يوضح حالة عملية تم فيها إلقاء قطعة عملة عشرة آلاف مرة وتم حساب نسبة الصور فى كل ألف مرة.

مثال (1 ــ 3 ــ 1): فيما يلى عدد مرات ظهور الصورة "H" فى 10.000 محاولة لإلقاء قطعة عملة ــ مرتبة حسب عدد الصور فى كل ألف محاولة ابتداء من الألف الأولى حتى العاشرة.

جدول (1 ــ 3 ــ 1)

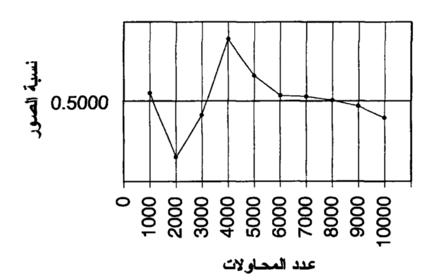
عدد الصور فى كل ألف رمية	501	485	509	536	485	488	500	497	494	484

الجدول السابق يمثل محاولات فعلية. لذلك سنحاول تحديد نسبة عدد الصور فى الألف الأولى ثم النسبة فى ألفى رمية ثم فى ثلاثة آلاف رمية وهكذا. والجدول التالى يوضح ذلك.

جدول (1 ـ 3 ـ 2)

عدد المحاولات n	عدد الصور m "H"	نسبة الصور $\frac{m}{n}$
1000	501	0.5010
2000	986	0.4930
3000	1495	0.4983
4000	2031	0.5078
5000	2516	0.5032
6000	3004	0.5007
7000	3504	0.5006
8000	4001	0.5001
9000	4495	0.4994
10000	4979	0.4979

من البيانات السابقة نلاحظ أن نسبة الصور $\frac{m}{n}$ تتذبذب ارتفاعاً وانخفاضاً حول القيمة P = 0.5 وحِدَّة هذا التذبذب تقل كلما زادت عدد المحاولات. والرسم التالى يوضح ذلك.



شكل (1 ـ 3 ـ 1)

من المثال السابق نلاحظ أن نسبة الصور $\frac{m}{n}$ تقترب فى تذبذبها من النسبة 0.5 كلما زاد عدد المحاولات مما يمكننا معه استخدام النسبة $\frac{m}{n}$ كتقريب لاحتمال ظهور

الصورة "H" عند إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة. كما قام بعض الباحثين بتكرار رمى زهرة نرد (متزنة) عدد كبير من المرات ووجدوا أن نسبة ظهور كل وجه تقترب من النسبة $\frac{1}{6}$. من هذا أمكن القول أن فى أى تجربة عشوائية يتم تكرارها عدد من المرات وليكن n مرة ويكون عدد مرات ظهور الحدث E هو m مرة فإن النسبة $\frac{m}{n}$ تسمى نسبة ظهور الحدث أو التكرار النسبى للحدث E ومن ثم فإن هذه النسبة سوف تقترب من القيمة الحقيقية للاحتمال $P(E)$ كلما زادت عدد المحاولات حتى فى النهاية عندما تكون n كبيرة كبراً لانهائياً يمكن اعتبار أن هذه النسبة هى الاحتمال $P(E)$. وهذا أدى إلى الصياغة التالية لتعريف الاحتمال بالتكرار النسبى أو ما يسمى بالتعريف التجريبى للاحتمال.

تعريف (1 ــ 3 ــ 1):

عند تكرار تجربة عشوائية مرات عددها n (تحت نفس الظروف) إذا لاحظنا تحقق حدث معين E مرات عددها m فيمكن استخدام التكرار النسبى $\frac{m}{n}$ كتقريب لاحتمال تحقق الحدث E. أى أن:

$$P(E) \simeq \frac{m}{n}$$

وفى النهاية عندما تكون n كبيرة جداً يكون:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

وفى صورة رمزية:

$$(1.3.1):\ P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

من تعريف الاحتمال التجريبى ومن المثال السابق نجد أنه لأى حدث E فى أى لعبة من ألعاب الصدفة إذا حسبنا $P(E)$ باستخدام التعريف التقليدى سنحصل على نفس النتيجة كما لو حسبناه باستخدام التعريف التجريبى ــ أى لا تعارض ــ لذلك يمكن حساب الاحتمالات فى كل التجارب العشوائية التى يمكن تصورها كلعبة من ألعاب الصدفة باستخدام التعريف التقليدى ــ ويكون الاستفادة من التعريف التجريبى فى التجارب العشوائية التى لا يمكن تصورها كلعبة من ألعاب الصدفة. وعلى أى حال نجد أن افتراض التماثل والفرص المتكافئة في تعريف الاحتمال تجعلنا نعرف الاحتمال بالاحتمال

لأن الفرص المتكافئة معناها احتمالات متكافئة ولا يجوز تعريف الشيء بنفسه بالإضافة إلى ما ذكرناه من أن فرض التماثل التام فرض خيالي وغير واقعي ــ وهذا ما أدى بنا إلى التعريف التجريبي. وحتى عند استخدام التعريف التجريبي تكون النسبة $\frac{m}{n}$ تقريب للاحتمال ولكن الاحتمال نفسه لا يمكن تحديده تماماً إلا عندما تؤول n إلى مالا نهاية وهذا فرض تصوري ــ لأنها مهما كبرت n لا يمكن تصور حساب الاحتمال عندما n تؤول إلى مالا نهاية. وهذا ما يجعلنا نشعر بالحاجة إلى نظرية أكثر تقدماً للحكم على مدى مطابقة التكرار النسبي إلى الاحتمال الحقيقي. وقد استمر تطور نظرية الاحتمالات دون توقف حتى وصلنا إلى التعريف الحديث للاحتمال والذى يعتمد إلى حد كبير على نظرية المجموعات وغيرها من الرياضيات الحديثة مما ترتب عليه الاستفادة من الكنوز الرياضية التى تزخر بها الرياضيات الحديثة فى تطوير نظرية الاحتمالات وبالتالى تطوير نظرية الإحصاء حيث أمكن إيجاد العديد من النماذج الاحتمالية على غرار النماذج الرياضية التى ساعدت على تطور العلوم التجريبية فى كثير من المجالات، لذلك كان لابد من استخدام الرياضيات الحديثة بأساليبها وأدواتها الرياضية الجبارة فى إثراء نظرية الاحتمالات.

وبالنظر إلى نتائج أى تجربة عشوائية على أنها مجموعة من النقط المختلفة (سنرمز لها فيما بعد باسم فراغ العينة) والنظر إلى مجموعة النتائج المواتية لحدث ما E على أنها مجموعة نقط تمثل جزء من مجموعة النتائج الكلية. لذلك أمكن استخدام نظرية المجموعات لتحديد الأجزاء المختلفة المناظرة للأحداث المختلفة واستخدام الأساليب الرياضية فى وضع نظرية عامة للاحتمالات بحيث تقدم لنا مفهوماً جديداً للاحتمال يَجُبُّ المفهوم الكلاسيكى والمفهوم التجريبى على حد سواء، وتقدم نموذج احتمالى رياضى لكل تجربة عشوائية يستطيع الإحصائيون استخدامه واستنباط بعض النتائج الهامة والمفيدة منه بناء على نتائج التجارب العشوائية. لذلك فإننا نقدم فكرة مبسطة عن نظرية المجموعات حتى يتسنى لنا استخدامها فى عرض المفهوم الحديث للاحتمال.

(1 ــ 4) نظرية المجموعات Set Theory:

تعريف (1 ــ 4 ــ 1) المجموعة:

المجموعة هى أى تجمع من أشياء (أو عناصر) متشابهة.

فمثلاً الطلاب فى فصل دراسى معين يعتبروا مجموعة بينما طلاب فصل آخر تعتبر مجموعة أخرى من الطلبة. ويمكن إعطاء العديد من الأمثلة التى توضح مفهوم المجموعة ــ فمثلاً مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 هى المجموعة المكونة من الأعداد $\{1,2,\ldots,10\}$ كذلك مجموعة الأعداد الحقيقية من 1 إلى 10 هى أى عدد صحيح أو كسرى (مقيس) أو غير مقيس من 1 حتى 10 ــ المجموعة المكونة من عواصم

العالم تشمل كل عواصم العالم ــ وهكذا نجد أن مفهوم المجموعة نفسه واضح ومن المسلمات المعروفة. كذلك كل مفردة من مفردات المجموعة تسمى عنصر أى أن كل مجموعة تتكون من عدة عناصر ــ فمجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 عناصرها هى الأعداد 10 ,...,1, 2.

ويجب أن تكون المجموعة محددة تحديداً تاماً لا لَبْسَ فيه ولا غموض. ويوجد طريقتين للتعبير عن المجموعة هما طريقة السرد (أو القائمة) وطريقة الخاصية المميزة أو التعبير الرمزى. ولإيضاح ذلك سنرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة ... ,A, B, C, D ولعناصر المجموعة بالأحرف اللاتينية الصغيرة.......... ,a, b, c, d ولنعبر عن أن العنصر a هو أحد عناصر المجموعة A سنكتب ذلك بصورة رمزية$a \in A$ وتقرأ a ينتمى إلى A وعلى ذلك فإن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى 10 تكتب فى الصورة التالية:

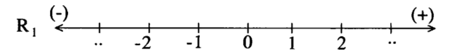
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

وهذه هى طريقة السرد أو الحصر. أما مجموعة الأعداد الحقيقية من 1 إلى 10 فيمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$B = \{x : 1 \le x \le 10\}$$

وتقرأ المجموعة B هى مجموعة القيم(x) أو الأعداد الحقيقية(x) ابتداء من 1 إلى 10 ــ وهذه هى طريقة التعبير الرمزى.

وعندما نريد الإشارة إلى أن العنصر b ليس أحد عناصر المجموعة A نكتب $b \notin A$ وتقرأ b لا ينتمى إلى A. بقى لنا أن نشير إلى أن المجموعات بصفة عامة قد تكون عناصرها أعداد أو أشخاص أو مدن أو أى أشياء أخرى ولكن فى مجال دراستنا التى نحن بصددها سنقصر دراستنا على المجموعات التى عناصرها أعداد أو نقط وهذه المجموعات تسمى بالمجموعات الخطية آخذين فى الاعتبار أن الأعداد والنقط مترادفان فمثلاً لا فرق بين الكلام عن الأعداد المحصورة بين (3+ ,3 -) وبين النقط على خط الأعداد الواقعة داخل هذه الفترة. فالعدد 2 مثلاً يناظر النقطة التى تقع على بعد وحدتين إلى الجانب الأيمن من الصفر على محور الأعداد. ومحور الأعداد هو خط مستقيم نرمز له بالرمز R_1 عليه نقطة أصل 0 ووحدة قياس واتجاه موجب على يمين الصفر واتجاه سالب على يسار الصفر.



وبذلك يمكن القول النقطة x أو العدد x مع الأخذ في الاعتبار النقط التي تقابل الأعداد المحدودة فقط أي أن ∞ لا تعتبر نقطة. وفي حالة المستوى يمكن القول النقطة (x_1, x_2) أو الزوج المرتب من الأعداد(x_1, x_2) ونرمز للمستوى بالرمز R_2 ــ وبصفة عامة يمكن القول النقطة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ أو الأعداد المرتبة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ مأخوذة في الترتيب الموضح ونرمز لهذا الفراغ بالرمز R_n. ويمكننا الآن أن نقدم بعض التعاريف والأمثلة التوضيحية لتقديم نظرية المجموعات بالصورة المناسبة لغرض هذه الدراسة.

تعريف (1 ــ 4 ــ 2) المجموعات المحدودة Finite Sets:

المجموعة المحدودة هي المجموعة المكونة من عدد محدود من العناصر.

تعريف (1 ــ 4 ــ 3) المجموعات غير المحدودة (أو اللانهائية) Infinite Sets:

المجموعة اللانهائية أو غير المحدودة هي تلك المجموعة التي تتكون من عدد لانهائي من العناصر.

وهذه المجموعة قد تكون عناصرها قابلة للعد وتسمى مجموعة قابلة للعد Enumerable Set وذلك إذا أمكن ترتيب عناصر المجموعة بحيث يمكن عدها أي أن كل عنصر من عناصر المجموعة يقابل عدد من الأعداد الطبيعية ... ,1, 2, 3, ..., n ــ أما إذا كان من المستحيل ترتيب عناصر المجموعة بحيث أن كل عنصر يقابل عدد من الأعداد الطبيعية فإن المجموعة تسمى مجموعة غير قابلة للعد [Non – enumerable Set or Non – Countable Set] وعلى ذلك فإن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تسمى مجموعة قابلة للعد وهي:

$$S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

أما مجموعة النقط المحصورة بين الصفر والواحد الصحيح على خط الأعداد فهي مجموعة غير قابلة للعد وهي المجموعة:

$$S_2 = \{x : 0 < x < 1\}$$

حيث x عدد حقيقي.

تعريف (1 ــ 4 ــ 4) المجموعة الجزئية Sub – Set:

إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A ما هو إلا عنصر في المجموعة B فإن المجموعة A تسمى مجموعة جزئية من المجموعة B.

مثال ذلك إذا كانت المجموعة B هي $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

والمجموعة A هي $A = \{2, 4, 6\}$

فإن A تسمى مجموعة جزئية من المجموعة B وتكتب فـــى الصـــورة $A \subset B$ ويمكن القول أن B تحتوى A أو A جزئية من B. ويجب ملاحظة أن كل مجموعة جزئية من مجموعة محدودة تكون هى الأخرى محدودة بينما كل مجموعة جزئية من مجموعـــة لانهائية قابلة للعد فإنها قد تكون محدودة أو لانهائية قابلة للعد.

تعريف (1 ــ 4 ــ 5) الفراغ Space:

إذا أمكن تمثيل كل نتائج ظاهرة ما (أو كل نتائج تجربة عشوائية ما) بمجموعـــة معينة فإن هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الكلية أو بالفراغ.

تعريف (1 ــ 4 ــ 6) المجموعة الفارغة Null – Set:

هى مجموعة تصورية لأنها خالية من العناصر فهى المجموعة التى لا يوجد بها عناصر ونرمز لها بالرمز ϕ. ودائماً المجموعة الفارغة تعتبر مجموعة جزئية مـــن أى مجموعة أخرى.

تعريف (1 ــ 4 ــ 7) تساوى المجموعات:

تتساوى المجموعتان A، B إذا كانت لهما نفس العناصر.

أى إذا كانت عناصر A هى نفس عناصر B ــ وذلك بصرف النظر عن ترتيـــب العناصر داخل المجموعة إذ أن ترتيب العناصر داخل المجموعة غير مهم. لذلك ستكون المجموعة A جزئية من B وكذلك المجموعة B جزئية من A. وعلـــى ذلـــك إذا كانـــت $A \subset B$ و $B \subset A$ فإن $A = B$.

(1 ــ 5) تطبيق قواعد الجبر على المجموعات:

نبدأ بافتراض مجموعة كلية S تسمى بالفراغ ثم نتنـــاول المجموعـــات الجزئيـــة المختلفة داخل هذا الفراغ. ثم نعرف العمليات الجبرية المختلفة من جمع وضرب وطرح وقسمة وخلافه على هذه المجموعات الجزئية وإن اختلفت تسمية هذه العمليات أو مفهومها بما يتناسب مع طبيعة المجموعات.

تعريف (1 ــ 5 ــ 1) الاتحاد أو المجموع Union of Sets:

اتحاد (أو حاصل جمع) المجموعتين A_1، A_2 هو المجموعـــة A المكونـــة مـــن العناصر التى تنتمى إلى إحدى المجموعتين A_1 أو A_2 علـــى الأقـــل ــ أى أن عناصـــر الاتحاد A هى العناصر التى تنتمى إلى A_1 وحـــدها دون A_2 أو A_2 وحـــدها دون A_1 أو تنتمى لكل من A_1 وA_2. ونرمز لها بأحد الرمزين

$$A = A_1 \cup A_2$$

أو

$$A = A_1 + A_2$$

إذا كان $A_1 \subset A_2$ فإن $A_1 \cup A_2 = A_2$.

مثال (1 ــ 5 ــ 1): اتحاد المجموعتين التاليتين

$$A_1 = \{a, b, c, m\}$$

$$A_2 = \{a, d, n\}$$

هو

$$A = A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d, m, n\}$$

كذلك اتحاد المجموعتين:

$$B_1 = \{x : 0 < x < 1\}$$

و

$$B_2 = \{x : \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{3}{2}\}$$

يكون الاتحاد

$$B = B_1 \cup B_2$$
$$= \{x : 0 < x \leq \tfrac{3}{2}\}$$

تعريف (1 ــ 5 ــ 2) التقاطع أو حاصل الضرب Intersection of Sets:

تقاطع (أو حاصل ضرب) المجموعتان A_1 وA_2 هى المجموعة A التى تتكون من العناصر المشتركة بين A_1 وA_2 ــ أى العناصر التى تنتمى إلى A_1 وA_2 معــاً (فــى آن واحد) ونرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$A = A_1 \cap A_2$$

أو

$$A = A_1 \cdot A_2$$

أو

$$A = A_1A_2$$

وإذا كانت $A_1 \subset A_2$ فإن $A_1 \cap A_2 = A_1$.

مثال (1 ــ 5 ــ 2): فى المثال السابق يكون تقاطع A_1 وA_2 هو

$$A = A_1A_2 = \{a\}$$

كذلك تقاطع B_1 وB_2 هو

$$B = B_1B_2 = \{x : \tfrac{1}{2} \le x < 1\}$$

تعريف (1 ــ 5 ــ 3) الفرق بين مجموعتين Difference of Sets:

الفرق $A_2 - A_1$ هو المجموعة المكونة من العناصر التى تنتمى إلى A_2 ولا تنتمى إلى A_1.

مثال (1 ــ 5 ــ 3): فى مثال (1 ــ 5 ــ 1) أوجد كلٍ من:

$A_1 - A_2, A_2 - A_1, B_1 - B_2, B_2 - B_1.$

سنجد أن:

$$A_1 - A_2 = \{b, c, m\}$$

و

$$A_2 - A_1 = \{d, n\}$$

و

$$B_1 - B_2 = \{x : 0 < x < \tfrac{1}{2}\}$$

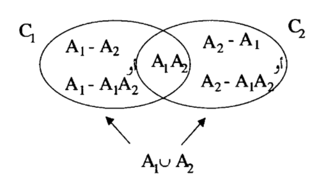
و

$$B_2 - B_1 = \{x : 1 \le x \le \tfrac{3}{2}\}$$

إذا كان $A_2 = A_1$ يكون $A_2 - A_1 = \phi$.

ويمكن تمثيل الاتحاد والتقاطع والفرق بين مجموعتين بالشكل التالى المسمى Vinn Diagram شكل "فن".

إذا كانت المجموعة A_1 هى مجموعة النقط داخل المنحنى المغلق C_1 والمجموعة A_2 هى مجموعة النقط داخل المنحنى المغلق C_2 سنجد أن الاتحاد والتقاطع والفرق كما يلى:



$A_1 \cup A_2$ هى مجموعة النقط داخل المنحنيين C_1 وC_2.

تعريف (1 ــ 5 ــ 4) المجموعات المنفصلة أو المتنافية Disjoint Sets:

تعتــبر المجموعــتان A_1 وA_2 منفصلتان إذا لم يكن بينهما أى عنصر مشترك ــ ونعــبر عن ذلك بالقول أن الجزء المشترك بينهما هو المجموعة الفارغة ϕ. وعلى ذلك إذا كان $A_1 A_2 = \phi$ يكون المجموعتان A_1، A_2 منفصلتان.

تعريف (1 ــ 5 ــ 5) قوانين الجمع والضرب تحقق الخواص التالية:

(أ) التبديل الجبرى: الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ عمليتان تحققان التبديل الجبرى أى أن:

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$$

و

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

(ب) الإدماج: عمليتى الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ تحققان الإدماج الجبرى:

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$

$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3).$$

(جـ) التوزيع: عمليتى الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ تحققان التوزيع الجبرى:

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$$

ويمكن تعميم النتائج السابقة لاتحاد مجموعتين وتقاطع مجموعتين إلى حالة n من المجموعــات وكذلك إلى حالة أى عدد لانهائى من المجموعات. وعلى ذلك يكون الاتحاد

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ هـو المجموعة المكونة من العناصر التى تنتمى إلى مجموعة واحـدة على الأقل من المجموعات $A_1, \ldots, A_n$. كما أن التقاطع $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ هو المجموعة المكونة من العناصر المشتركة بين كل هذه المجموعات أى العناصر التى تنـتمى إلى جميع هذه المجموعات فى آن واحد. وعندما يكون عدد المجموعات لانهائى يكون الاتحاد والتقاطع هما على الترتيب:

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r$$

وفى هذه الحالة يكون قانون التوزيع الجبرى هو:

$$(1.5.1):\ A(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = A A_1 + A A_2 + \cdots$$

مثال (1 ـ 5 ـ 4): إذا كانت المجموعتان S_r وA_r هما

$$S_r = \{x : \tfrac{1}{r+1} \le x \le \tfrac{1}{r}\}$$

$$A_r = \{x : 0 \le x \le \tfrac{1}{r}\}$$

فإن الاتحاد

$$\sum_{r=1}^{\infty} S_r = \{x : 0 \le x \le 1\}$$

والتقاطع

$$\prod_{r=1}^{\infty} S_r = \phi$$

كذلك الاتحاد

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r = \{x : 0 \le x \le 1\} = A_1$$

والتقاطع

$$\prod_{r=1}^{\infty} A_r = \{x : x = 0\}$$

تعريف (1 ـــ 5 ـــ 6) المكمل Complement:

إذا كان لدينا مجموعة كلية أو فراغ S وكانت المجموعة A مجموعة جزئية من الفراغ S فإن الفرق $(S-A)$ يسمى مكمل المجموعة A ونرمز له بالرمز $\overline{A}$.

ويمكن إثبات أن المكمل يحقق القواعد الجبرية التالية:

$$(1.5.2):\ \overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$

$$(1.5.3):\ A \cdot \overline{A} = \phi$$

$$(1.5.4):\ A \cup \overline{A} = S$$

$$(1.5.5):\ \left.\begin{array}{l} a)\ \overline{\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\right)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \\ b)\ \overline{\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\right)} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \end{array}\right\}$$

والعلاقتان السابقتان تسميان قوانين دى مورجان De – Morgan Laws

$$(1.5.6):\ A_1 - A_2 = A_1 \cdot \overline{A}_2$$

(1 ـــ 6) المتتابعة Sequence:

تعريف (1 ـــ 6 ـــ 1):

المتتابعة هى عدة مجموعات موضوعة فى تتابع.

وتكتب فى الصورة:

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

واتحاد أو مجموع المتتابعة يأخذ الشكل:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

قـــد تكون المجموعات التى تتكون منها المتتابعة مجموعات غير منفصلة فى حين أنـــنا قـــد نحتاج فى بعض مراحل الدراسة أو البحث إلى إيجاد الاتحاد A فى شكل اتحاد لمجموعـــات منفصلة. لتحقيق ذلك يمكننا استخدام تحويلة رياضية معينة ـــ ويمكن تقديم ذلك فى صورة النظرية التالية:

نظرية (1 ــ 6 ــ 1):

فـــى المتتابعة $\{A_n\} = A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ يمكن وضع الاتحاد $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$

فى الصورة $A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$

حيـــث تكـــون المتـــتابعة $\{B_n\} = B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ متتابعة من مجموعات منفصلة فيها $B_i B_j = \phi$ لجميع قيم $i \neq j$ وتكون

$$B_n = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1} A_n$$

لجميع قيم n.

(الإثبات)

نفرض أن:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \qquad , \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

عندما:

$$B_n = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1} A_n$$

يمكن إثبات أن:

$A \subset B$ و $B \subset A$ إذن $A = B$ وذلك كما يلى:

لأى عنصـــر x يتـــبع لمجموعـــة ما ولتكن المجموعة A_i. بما أن $x \in A_i$ و $A_i \subset A$ إذن $x \in A$

بفـــرض أن المجموعة A_i هى أول مجموعة يتبع لها العنصر x أى أن العنصر x لا يتبع للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ إذن B_i هى أول مجموعة يتبعها العنصر x لأن

$$B_i = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{i-1} A_i$$

$$\therefore x \in B_i \quad , \because B_i \subset B \quad \therefore x \in B$$

وعلى ذلك إذا كانت $x \in A$ فإن $x \in B$ إذن $A \subset B$

وبــنفس المنهج السابق يمكن إثبات أنه إذا كانت $x \in B_i$ فإن $x \in A_i$ وبالتالى تكون $B \subset A$

أى أن $A \subset B$ و $B \subset A$ إذن $A = B$ علماً بأن B عبارة عن اتحاد مجموعات منفصلة.

هـ. ط. ث

إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات الخطية (أى المجموعات التى عناصرها نقــط أو أعداد حقيقية) فإن المجموعة الخطية A^* التى تتكون من جميع النقط التى تنتمى إلــى عــدد لانهــائى مــن هــذه المجموعــات الخطــية تســمى بــ "النهاية العظمى" Superior Limit للمتتابعة $\{A_n\}$ وتكتب فى الصورة:

$$(1.6.1):\ A^* = \lim_i \operatorname{Sup} A_i$$

وبالمــثل، المجموعة الخطية A_* التى تتكون من جميع النقط التى تنتمى إلى كل المجموعات الخطية A_i ما عدا عدد محدود منها على الأكثر تسمى بــ "النهاية الصغرى" Inferior Limit للمتتابعة وتكتب:

$$(1.6.2):\ A_* = \lim_i \operatorname{Inf} A_i$$

وإذا كانت $A^* = A_*$ تكون المتتابعة $\{A_n\}$ لها نهاية موجودة هى:

$$(1.6.3):\quad A = \lim_{i \to \infty} A_i$$

ويمكن إثبات أنه إذا كانت المجموعات المكونة للمتتابعة التالية

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

كلهــا مجموعــات قابلــة للعد (أى أن عدد عناصر أى مجموعة قابل للعد) فإن الاتحاد $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ يكــون مجموعــة قابلــة للعد ــ أى أن عناصر الاتحاد A يمكن حصرها ويمكن وضعها فى حالة علاقة تبادلية وحيدة مع الأعداد الطبيعية ..., n, ..., 1, 2.

(1 ــ 7) المتتابعات المضطردة Monotone Sequences:

تعريف (1 ــ 7 ــ 1):

المتتابعة ... $A_1, A_2,$ تسمى غير تناقصية (Non decreasing) إذا كانت $A_n \subset A_{n+1}$ لجميع قيم n. وتسمى غير تزايدية (Non increasing) إذا كانت $A_n \supset A_{n+1}$ لجميع قيم n. وكلا النوعين يطلق عليها اسم واحد مشترك هو المجموعات المضطردة.

إذا كانت المتتابعة غير تناقصية يكون

$$A_n = \sum_{r=1}^{n} A_r$$

ويكون:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \sum_{r=1}^{\infty} A_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r \, .$$

كذلك إذا كانت المتتابعة غير تزايدية يكون

$$A_n = \prod_{r=1}^{n} A_r$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \prod_{r=1}^{\infty} A_r = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r$$

مثال (1 ــ 7 ــ 1): إذا كانت

$$A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 - \tfrac{1}{n}\}$$

و

$$B_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 + \tfrac{1}{n}\}$$

أوجد

$$\lim_{n \to \infty} A_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} B_n$$

(الحل)

A_n مجموعة غير تناقصية

$$\therefore \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{1}^{\infty} A_r$$
$$= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

(المجموعة لا تشمل نقط محيط الدائرة)

أما B_n فهى مجموعة غير تزايدية

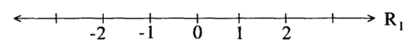
$$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{1}^{\infty} B_r$$
$$= \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$

(المجموعة تشمل نقط محيط الدائرة)

(1 ــ 8) المجموعات الخطية Linear Point Sets:

تعريف (1 ــ 8 ــ 1) خط الأعداد:

إذا كانت المجموعة الكلية (أو الفراغ) S هى المجموعة المكونة من جميع النقط على خط مستقيم به نقطة أصل 0 ووحدة قياس واتجاه موجب واتجاه سالب كما فى الشكل التالى



فإننا نرمز لهذا الخط بالرمز R_1 أى أن $S = R_1$. والفراغ R_1 يسمى بخط الأعداد.

تعريف (1 ــ 8 ــ 2) الفترات:

أى مجموعة جزئية من النقط فى الفراغ R_1 تسمى مجموعة خطية ــ وأبسط المجموعات الخطية هى الفترات Intervals ويمكن تعريف الفترة كما يلى: إذا كانت a، b نقطتان على خط الأعداد R_1 وكانت $a \le b$ فإن مجموعة النقط x التى تحقق العلاقة:

$a \le x \le b$ تسمى بالفترة المغلقة a، b وتكتب $[a, b]$

$a < x \le b$ تسـمى بالفـترة نصـف المفـتوحة a، b مغلقة من أعلى وتكتب $]a,b]$ أو $(a,b]$

$a \le x < b$ تسمى بالفترة نصف المفتوحة a، b مغلقة من أسفل وتكتب $[a,b[$ أو $[a,b)$

وإذا كانت $a = b$ يقال أن الفترة متلاشية degenerate.

وعندما $b \to \infty$ أو $a \to -\infty$ تصبح الفترة لانهائية والفترات اللانهائية تأخذ أحد الأشكال التالية:

$[a,\infty[$ أو $[a,\infty)$ لانهائية مغلقة من أسفل

$]-\infty,b]$ أو $(-\infty,b]$ لانهائية مغلقة من أعلى

$]-\infty,\infty[$ أو $(-\infty,\infty)$ لانهائية وهذه الفترة الأخيرة تشمل كل خط الأعداد R_1.

ويجـب أن نلاحظ أن تقاطع أى عدد محدود أو لانهائى من الفترات يكون فترة ـ ولكـن اتحاد فترتين لا يكون دائماً فترة. ويمكن تعريف المستوى R_2 والفراغ ذو الثلاث أبعاد R_3 والفراغ ذو النون بعداً R_n والفترات فى هذه الفراغات كتعميم للفراغ R_1.

(1 ـ 9) فراغ العينة وفراغ الأحداث Sample Space and Event Space:

(1 ـ 9 ـ 1) فراغ العينة Sample Space:

فى التعريف التقليدى للاحتمال ذكرنا أن التجربة العشوائية تعتبر تجربة تصورية أى يمكن تصور وحصر كل نتائجها الممكنة قبل إجراء التجربة ـ وعلى ذلك يمكن تمثيل نتيجة التجربة العشوائية بمجموعة S بحيث تكون النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية هـى عناصر المجموعة S. وفى هذه الحالة نطلق على هذه المجموعة S اسم رمزى هو فراغ العينة ـ وعلى ذلك يمكن تعريف فراغ العينة كما يلى:

تعريف (1 ـ 9 ـ 1أ) فراغ العينة:

فراغ العينة هو المجموعة التى تمثل عناصرها مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ونرمز لها بالرمز S.

ونقدم فيما يلى عدد من التجارب العشوائية موضحين فراغ العينة فى كل تجربة.

تجـربة (1): إذا كانـت التجربة العشوائية تتمثل فى إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة ـ ورمزنا للصورة بالرمز H والكتابة بالرمز T فإن مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هى T، H وبالتالى يكون فراغ العينة هو المجموعة

$$S = \{H, T\}$$

وهى مجموعة مكونة من عنصرين H، T.

تجــربة (2): إذا كانـــت الـــتجربة العشوائية تتمثل فى إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ــ سنجد أن فراغ العينة

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعة مكونة من 6 عناصر هى النتائج الممكنة للتجربة.

تجربة (3): لو كانت التجربة العشوائية هى إلقاء قطعتى عملة مرة واحدة ــ قياساً على ما سبق سنجد أن فراغ العينة هو المجموعة

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

وهـــى مجموعـــة مكونة من 4 عناصر كل عنصر يتكون من زوج من الرموز إحداهما نتيجة القطعة الأولى والثانى نتيجة القطعة الثانية من قطعتى العملة.

تجــربة (4): لـــو كانت التجربة العشوائية هى اختيار عدد من الأعداد الصحيحة الموجبة ــ سنجد أن فراغ العينة S يمثل المجموعة:

$$S = \{1, 2, 3, \ldots.\}$$

تجربة (5): إذا كانت التجربة العشوائية هى اختيار نقطـــة عشوائيـــاً من الفتـــرة [0 ,1] فإن فراغ العينة يمثله المجموعة

$$S = \{x : 0 < x < 1\}$$

وفـــراغ العينة من أهم المفاهيم التى نقدمها فى دراسة الاحتمالات وهو فى الواقع يـــتكون من مقطعين أو من كلمتين هما (فراغ وعينة) وكلمة فراغ مستوحاة من استخدامنا لـــنظرية المجموعـــات فـــى تمثيل النتائج الممكنة للتجربة والتى نمثلها بمجموعة S تمثل عناصرها كل النتائج الممكنة للتجربة لذلك فإن المجموعة S تتطابق مع مفهوم الفراغ فى نظـــرية المجموعـــات أما كلمة عينة فهى مستوحاة من أن نتيجة التجربة العشوائية غير مؤكـــدة لذلـــك عند ظهور نتيجة معينة يمكن اعتبار هذه النتيجة مجرد عينة من مجموعة النـــتائج الممكنة للتجربة العشوائية. ومع ذلك فإن فراغ العينة فى واقع الأمر لا هو فراغ ولا هـــو عيـــنة ولكـــنه مجرد اصطلاح علمى مفيد فى مجال دراسة نظرية الاحتمالات. وفراغ العينة قد يكون مجموعة محدودة كما فى التجارب العشوائية السابقة (1)، (2)، (3) وقـــد يكـــون مجموعة لانهائية قابلة للعد كما فى التجربة (4) وقد يكون مجموعة لانهائية غير قابلة للعد كما فى تجربة (5).

(1 ــ 9 ــ 2) الحدث وفراغ الأحداث Event and Event Space:

تعريف (1 ــ 9 ــ 2 أ) الحدث:

الحدث هو مجموعة جزئية من فراغ العينة S ــ فإذا كانت هذه المجموعة الجزئية مكونة من عنصر واحد سميت حدثاً بسيطاً Simple Event ــ أما إذا كانت مكونة من أكثر من عنصر واحد سميت حدثاً مركباً Compound Event.

تعريف (1 ــ 9 ــ 2 ب) فراغ الأحداث:

العائلة المكونة من كل المجموعات الجزئية الممكنة لفراغ العينة S بما فى ذلك المجموعة الفارغة ϕ والمجموعة الكلية S تسمى بفراغ الأحداث ونرمز لها بالرمز B أو β.

والعائلة هنا يمكن النظر إليها على أنها مجموعة كبيرة عناصرها هى كل المجموعات الجزئية الممكنة للمجموعة S ــ أى أن العنصر هنا هو الآخر مجموعة.

تعريف (1 ــ 9 ــ 2 جـ) حجم الحدث The Size of the Event:

إذا كان الحدث E تمثله مجموعة جزئية عدد عناصرها m فإن حجم الحدث E هو

$$N(E) = m$$

أى أن حجم الحدث هو عدد العناصر داخل مجموعته الجزئية ولما كان كل عنصر يمثل حدثاً بسيطاً إذن حجم الحدث المركب يساوى عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها.

تعريف (1 ــ 9 ــ 2 د) الحدث المستحيل:

هو الحدث الذى تمثله المجموعة الفارغة ϕ.

تعريف (1 ــ 9 ــ 2 هـ) الحدث المؤكد:

هو الحدث الذى تمثله المجموعة الكلية أو فراغ العينة S.

وفيما يلى مثالين يوضحان فراغ الأحداث لتجربتين.

مثال (1 ــ 9 ــ 2 أ): فى التجربة العشوائية المتمثلة فى إلقاء قطعة عملة مرة واحدة ــ نعلم أن فراغ العينة $S = \{H, T\}$ مجموعة مكونة من عنصرين صورة H وكتابة T. والمجموعات الجزئية للمجموعة S هى:

(أ) المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد (أحداث بسيطة) $\{H\}, \{T\}$

(2) المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين (حدث مركب واحد هو نفسه فراغ العينة ($\{H,T\}=S$)

(3) المجموعة الفارغة (الحدث المستحيل) ϕ

(4) المجموعة الكلية S.

إذن فراغ الأحداث هو العائلة B التالية:

$$B=\{\phi,\{H\},\{T\},\{H,T\}\}$$

مثال (1 ــ 9 ــ 2 ب): فى التجربة العشوائية المتمثلة فى إلقاء زهرة نرد متزنــة مرة واحدة. كما نعلم أن فراغ العينة هو المجموعة

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

أما فراغ الأحداث فهو العائلة التى عناصرها المجموعات التالية:

(1) المجموعة الفارغة (الحدث المستحيل) ϕ

(2) المجموعات المكونة من عنصر واحد

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

(عددهم 6)

(3) المجموعات المكونة من عنصرين

$$\{1,2\},\ldots,\{1,6\},\{2,3\},\ldots,\{2,6\},\{3,4\},\ldots,\{3,6\},\ldots,\{5,6\}$$

عددهم $\binom{6}{2}$ مجموعة أو حدثا.

(4) المجموعات المكونة من 3 عناصر.

$$\{1,2,3\},\ldots,\{4,5,6\}$$

عددهم $\binom{6}{3}$ مجموعة أو حدثا.

....

(7) وهكذا حتى نصل إلى المجموعات المكونة من 6 عناصر وهــى مجموعــة واحــدة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. وتسمى الحدث المؤكد.

وبذلك يكون فراغ الأحداث هو العائلة B التالية:

$$B=\{\phi,\{1\},\{2\},\ldots,\{6\},\{1,2\}\ldots,\{5,6\}\ldots\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

عدد عناصر العائلة B السابقة (أى عدد المجموعات الجزئية للفراغ S هو $N(B)$ حيث

$$N(B)=1+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6$$

أى أنه عندما يكون عدد العناصر داخل فراغ العينة S يساوى 6 عناصــر يكــون عدد المجموعات الجزئية الممكنة للمجموعة S هو نفسه عدد عناصر فراغ الأحــداث B ويساوى 2^6. وبصفة عامة إذا كان حجم فراغ العينة S يساوى n $(N(S)=n)$ فإن عدد المجموعات الجزئية الممكن تكوينها من الفراغ S (وهو نفسه عدد عناصر عائلــة فــراغ الأحداث B) يساوى 2^n.

فى العرض السابق أشرنا إلى كل مجموعة جزئية لفراغ العينة S على أنها حدث فكل مجموعة جزئية تسمى حدث والحدث هو ما نهدف إلى حساب احتمال وقوعه أو عدم وقوعه ــ أى أننا لا نهتم بالحدث فى حد ذاته وإنما اهتمامنا منصب على حساب احتمــال وقوع الحدث أو عدم وقوعه.

ملاحظة (1 ــ 9 ــ 2 أ): بقى لنا أن نوضح أنه عندما تكون المجموعة S الممثلة لفراغ العينة محدودة أو لانهائية قابلة للعد فإن كل المجموعات الجزئية الممكن تكوينها من المجموعة S تمثل (فى الغالب) أحداثاً يجب أخذها جميعاً فى الاعتبار ــ أى أننا فى هذه الحالة يمكن اعتبار كل المجموعات الجزئية المستخرجة من المجموعة S على أنها أحداث مهمة نهدف إلى حساب احتمال وقوع أو عدم وقوع كلٍ منها. أما إذا كان فــراغ العينة S عبارة عن مجموعة لانهائية غيــر قابلــة للعــد فيمكننــا إيضــاح أن بعــض المجموعات الجزئية للمجموعة S لا يمكن حساب الاحتمال المناظر لها وبالتالى فإننا لا نعتبر هذه المجموعات ممثلة لأحداث ــ ولذلك لابد أن نستبعد هذه المجموعات الجزئية التى لا يمكن اعتبارها أحداث من فراغ الأحداث B.

وسنتقبل ذلك دون إثبات ولكننا (فى حالة فراغ العينة S الــذى يمثلــه مجموعــة لانهائية غير قابلة للعد) سنحاول تحديد المجموعات الجزئية للمجموعة S التــى يمكــن اعتبارها أحداثاً وهى التى يتكون منها فراغ الأحداث B. كما سنحاول استبعاد المجموعات الجزئية التى لا يمكن اعتبارها أحداثاً والتى لا تدخل فى فراغ الأحداث B ــ وهذا يدفعنا إلى وضع تعريف عام لتحديد فراغ الأحداث B تحديداً عاماً سواء كان فــراغ العينــة S

مجموعة محدودة أو لانهائية قابلة للعد أو لانهائية غير قابلة للعد وذلك من خـــلال تقــديم عائلة بولين (بولين الجبرا) وكذلك عائلة بورال (بورال الجبرا).

(1 ــ 10) عائلة بولين (بولين الجبرا) Boolean ALgebra:

لن نهتم فى هذه الدراسة بتطوير المعلومات الرياضية لتحديد ما يمكن اعتباره حدثاً من المجموعات الجزئية لفراغ العينة S، وبالتالى تحديد المجموعات الجزئية التى تكـــون فراغ الأحداث B. ولكننا سنهتم بتقديم بعض الخصائص التى يجب توافرها فـــى فـــراغ الأحداث B حتى تكون كل الأحداث التى تمثل عناصر هذا الفراغ يمكن حساب احتمـــال حدوث كلٍ منها، وهذه الخصائص هى:

(1. 10. 1):

a) $S \subset B$

b) إذا كانت $A \subset B$

فإن: $\overline{A} \subset B$

c) ذا كانت كلٍ من A_1، A_2 مجموعة جزئية من الفراغ B فإن:

$$A_1 \cup A_2 \subset B$$

أى تجمع من المجموعات (أو الأحداث) تتوافر فيه الخواص السابقة يسمى "عائلة بولين" أو "بولين الجبرا " Boolean ALgebra ــ أو بتعبير مختصر "الجبرا".

والخصائص السابقة تتمشى مع هدفنا فى الاقتصار على تلك المجموعات الجزئية من الفراغ S التى تعتبر أحداثاً والتى نهدف إلى حساب احتمالاتها ــ لـــذلك فـــإن فـــراغ الأحداث B لابد أن يشتمل على الحدث المؤكد (أى المجموعة S) ــ كذلك طالما أن هدفنا هو حساب احتمال وقوع أى حدث (أو مجموعة) A فإنه من المنطقى حساب احتمال عدم وقوع الحدث أى حساب احتمال $\overline{A}$ وبالتالى إذا كانت المجموعة A ضمن عناصر فراغ الأحداث B فإن المجموعة $\overline{A}$ لابد أن تكون هى الأخرى ضمن عناصر فراغ الأحـــداث ــ كذلك إذا كان A_1، A_2 حدثان ضمن عناصر الفراغ B فإن $A_1 \cup A_2$ يعتبر حدثاً كـــذلك وبالتالى يكون ضمن عناصر B.

والخصائص السابقة يمكن صياغتها فى صورة مرادفة كما يلى:

(1. 10. 2):

a) $S \subset B$

b) إذا كان كلٍ من A_1، A_2 مجموعة جزئية من الفراغ B فإن $(A_1 \cup A_2) \subset B$

c) إذا كان كلٍ من A_1، A_2 مجموعة جزئية من الفراغ B وكانت $A_2 \subset A_1$ فإن $(A_1 - A_2) \subset B$

ويمكن إثبات أن الخصائص (1. 10. 1) والخصائص (1. 10. 2) متكافئة.

والخصائص السابقة سواء (1. 10. 1) أو (1. 10. 2) ترتب عليها النتائج التالية التى تتميز بها العائلة B.

(1. 10. 3):

a) $\phi \subset B$

b) إذا كان كلٍ من A_1، A_2 مجموعة جزئية من B فإن $(A_1 \cap A_2) \subset B$

c) إذا كان كل من A_n، ....، A_2، A_1 مجموعة جزئية من الفراغ B فإن:

$$\left(\bigcup_1^n A_i\right) \subset B \quad \text{و} \quad \left(\bigcap_1^n A_i\right) \subset B.$$

(1 ــ 11) عائلة بورال (بورال الجبرا) Borel ALgebra:

فى عائلة بولين السابقة لو أبقينا a و b فى مجموعة الخصائص (1. 10. 1) السابقة واستبدلنا الخاصية "C" بالخاصية التالية:

إذا كانت كل مجموعة من المتتابعة اللانهائية التالية

$A_1, A_2, ...$

تعتبر عنصراً من عناصر فراغ الأحداث B فإن: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset B$.

إذا تحقق الشرط السابق فإن هذه العائلة نطلق عليها اسم العائلة التجميعية ــ وهى تحقق الشروط السابق ذكرها حيث أنها تشمل الفراغ S كما أنها تشتمل على مكمل أى مجموعة تتبع للفراغ S وتشمل كذلك مجموع واتحاد أى عدد قابل للعد من المجموعات التابعة للفراغ S. ولكن هذه العائلة (B) قد تشتمل على بعض المجموعات ذات الاحتمال

الصفرى التى تعتبر أحداث مستحيلة. فإذا أهملنا هذه المجموعات ذات الاحتمال الصفرى أو مثلناها كلها بالمجموعة الفارغة ϕ وأبقينا على باقى المجموعات واعتبرناها عناصر العائلة B، سنحصل بذلك على أصغر عائلة B تسمى عائلة بورال أو أصغر عائلة بورالية، نسبة إلى عالم الرياضيات Borel، وتحقق الشروط التالية:

(1. 11. 1):

a) $S \subset B$

b) إذا كانت $A \subset B$ فإن $\overline{A} \subset B$

c) إذا كان كل من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ تعتبر عناصر فى العائلة B فإن:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset B$$

وأصغر عائلة تحقق الشروط السابقة تسمى "عائلة بورال الصغرى" "The smallest Borel Field"

والهدف من التركيز على أن عائلة بورال هى أصغر عائلة تحقق الشروط السابقة هو استبعاد بعض المجموعات التى لا تهمنا فى مجال دراسة نظرية الاحتمالات. وهذه المجموعات المستبعدة هى مجموعات معقدة وليس من المطلوب حساب احتمالاتها وتسمى بالمجموعات غير المقيسه كما أننا لن نحتاج إلى مثل هذه المجموعات فى دراستنا الحالية.

ملاحظة (1 ـ 11 ـ 1): يتضح لنا مما سبق أن أى حدث E ما هو إلا مجموعة جزئية بورالية من فراغ العينة S ـ أما المجموعات الجزئية غير البورالية (غير المقيسه) للفراغ S التى لا تحقق الشروط (1.11.1) لا تعتبر أحداث. ولهذا سنعتبر كلمتى "حدث" و"مجموعة جزئية بورالية" من الفراغ S كلمتان مترادفتان لهما نفس المعنى. وهذا ما سوف نسير عليه فى بقية دراستنا فى هذا الكتاب.

مثال (1 ـ 11 ـ 1): بين أنه لأى حدث E فى فراغ العينة S تكون العائلة التى عناصرها المجموعات (أو الأحداث) $E, \overline{E}, \phi, S$ عائلة بورالية.

(الحل)

العائلة المشار إليها هى العائلة

$$B = \{E, \overline{E}, \phi, S\}$$

وهذه العائلة تحقق الخصائص (1. 11. 1) السابقة (وهى خصائص عائلة بورال)

(a) $S \subset B$

(b) كل حدث يتبع B وكذلك مكمله يتبع B حيث أن B تشتمل على E و $\overline{E}$ كما أنها تشتمل على S وϕ.

(c) اتحاد أى مجموعتين أو أكثر من المجموعات $E, \overline{E}, \phi, S$ يتبع كذلك للعائلة B من حيث

$$\overline{E} \cup E = S \subset B$$
$$\overline{E} \cup \phi \subset S \subset B$$

وهكذا.

إذن العائلة B تعتبر عائلة بورالية.

(1 ــ 12) دالة النقطة ودالة المجموعة Point Function and Set Function:

نعلم أن الدالة $y = f(x)$ تعتبر دالة متغيرها التابع y ومتغيرها المستقل x. وهذه الدالة تعطى قيمة y لكل قيمة من قيم x. فلو كان المتغير المستقل x عدد حقيقى (أى نقطة على خط الأعداد R_1) تسمى الدالة $f(x)$ دالة فى نقطة. مثال ذلك الدالة $y = 5x$ عندما $x = 3$ نجد أن $y = 15$. وقد تكون الدالة فى متغيرين مستقلين x_1, x_2 مثل

$$y = g(x_1, x_2)$$

أو

$$y = 3x_1x_2$$

هنا مجال تغير المتغيرين المستقلين x_1, x_2 كمجال تغير نقطة فى المستوى الكارتيزى والذى نرمز له بالرمز R_2 ــ لذلك عند أى نقطة فى المستوى R_2 يمكن تحديد قيمة الدالة $y = g(x_1, x_2)$ ــ مثال ذلك. إذا كانت

$$y = 3x_1x_2$$

عندما $x_1 = 5$ و $x_2 = 4$ نجد أن $y = 60$.

وقد تكون الدالة فى ثلاث متغيرات أو حتى n من المتغيرات المستقلة حيث يمكن تصور مجال الدالة كأنه نقطة فى الفراغ ذو النون بعداً $(x_1, \ldots, x_n)$ والذى نرمز له بالرمز R_n ومثال ذلك الدالة

$$y = 2x_1x_2 \ldots x_n$$

عندما $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$ تكون

$$y = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

مما سبق يتضح لنا أن الدالة فى نقطة هى دالة متغيرها المستقل (أو متغيراتها المستقلة) عبارة عن نقطة فى خط الأعداد (أو نقطة فى الفراغ متعدد الأبعاد) ــ ولكن فى بعض الحالات تواجهنا دالة من نوع خاص حيث يكون المتغير المستقل عبارة عن مجموعة وليس مجرد نقطة والدالة التى من هذا النوع تسمى دالة مجموعة. ويجب أن نأخذ فى الاعتبار أن المجموعة قد تكون عنصرها نقطة واحدة كما قد تكون خالية من العناصر مثل المجموعة الفارغة ϕ.

والأمثلة التالية توضح لنا مفهوم دالة المجموعة.

مثال (1 ــ 12 ــ 1): إذا كانت المجموعة $A \subset R_1$ وكانت الدالة $g(A)$ تساوى عدد النقط الموجودة فى المجموعة A والتى تناظر الأعداد الصحيحة الموجبة.

أوجد $g(A_i)$ عندما $i = 1, 2, 3$

إذا كانت

$$A_1 = \{x : 0 < x < 6\}$$

$$A_2 = \{x : x = -2, -1\}$$

$$A_3 = \{x : -\infty < x < 4\}$$

(الحل)

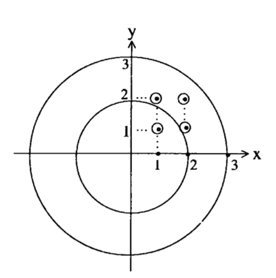
$g(A_1) = 5,\ g(A_2) = 0,\ g(A_3) = 3$

مثال (1 ــ 12 ــ 2): لكل مجموعة $A \subset R_1$ إذا كانت الدالة $g(A)$ تساوى عدد النقط (x_1, x_2) فى المجموعة A عندما تكون كلٍ من x_1، x_2 أعداد صحيحة موجبة وتساوى الصفر خلاف ذلك.

أوجد $g(A_1)$ و $g(A_2)$ إذا علمت أن:

$$A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9\}.$$



$g(A_1) = 1$

$g(A_2) = 4$

لاحظ أن $A_1 \subsetneq A_2$

وأن $g(A_1) < g(A_2)$

(1 ــ 13) التعريف الحديث للاحتمال:

يُعَرَفْ الاحتمال كدالة مجموعة أو دالة مجالها الأحــداث المختلفــة فــى فــراغ الأحداث. وفى هذا التعريف نفترض أننا نبدأ بوجود تجربة عشوائية (أو ظاهرة) لها فراغ العينة S (أى أننا نبدأ دائماً بوجود مجموعة كلية هى فراغ العينة S). وفراغ الأحــداث B هو كل المجموعات الجزئية البورالية التى يمكن استخراجها من المجموعة S والذى يمثل عائلة بورال ــ هذه المجموعات الجزئية هى الأحداث التى نهتم بها ــ وهى فــى نفــس الوقت مجال دالة المجموعة التى نحاول تقديمها الآن والتــى نســميها دالــة الاحتمــال. والتعريف الحديث للاحتمال يتمثل فى مجموعة المسلمات التى وضعها كولموجروف عام 1933 ويمكن تقديمها كما يلى:

تعريف (1 ــ 13 ــ 1) "الاحتمال":

إذا كان لدينا تجربة عشوائية لها فراغ العينة S وفراغ الأحداث B الــذى يمثــل عائلة بورال ــ فإن الاحتمال P يعرف بأنه دالة مجموعة مجالها كل الأحــداث A التــى

تنــتمى إلــى الفــراغ B ــ بحيث أنه لكل حدث A تحدد الدالة P عدداً حقيقياً هو P(A) يسمى احتمال تحقق الحدث A. وهذه الدالة P تحقق المسلمات الثلاثة التالية:

(1) $P(A) \geq 0$ لجميع الأحداث.

(2) $P(S) = 1$ للحدث المؤكد $S = A$.

(3) إذا كانــت .... $A_1, A_2,$ متــتابعة من الأحداث المتنافية (المنفصلة) $A_iA_j = \phi$ لجميع قيــم $i \neq j$ فإن:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

والتعريف السابق تعريف رياضى ــ نتمكن به من التعرف على أى دالة مجموعة إذا مــا كانت دالة احتمال أم مجرد دالة مجموعة عادية ــ وهو لا يحدد لنا قيمة الاحتمال نفسه لحدث معين ولكن باستخدام الخصائص الموضحة فى التعريف السابق ومن التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب الاحتمال لأى حدث كما سيتضح لنا فيما بعد.

من التعريف السابق يمكن استنباط الخصائص التالية لدالة الاحتمال P والتى نقدمها فى شكل مجموعة من النظريات.

نظرية (1 ــ 13 ــ1):

لكل مجموعة A فى العائلة B يكون احتمال المكمل $\overline{A}$ هو:

(1. 13. 1): $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

(الإثبات)

$$S = A \cup \overline{A} \quad , \quad A \cap \overline{A} = \phi$$

من (2)، (3) فى تعريف (1 ــ 13 ــ 1) نجد أن

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$$
$$= P(A) + P(\overline{A})$$
$$\therefore P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

نظرية (1 ــ 13 ــ 2):

احتمال الحدث المستحيل (المجموعة ϕ) يساوى الصفر.

(1. 13. 2): $P(\phi) = 0$

(الإثبات)

فى نظرية (1 ـ 13 ـ 1) ضع $A = \phi$ إذن $\overline{A} = S$

$$P(\phi) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

نظرية (1 ـ 13 ـ 3):

إذا كان A_1، A_2 مجموعتان جزئيتان من الفراغ S وكان $A_1 \subset A_2$ فإن

$$(1.\ 13.\ 3):\ (a)\ \boldsymbol{0 \le P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)}$$

و

$$(b)\ \boldsymbol{P(A_1) \le P(A_2)}.$$

(الإثبات)

$$\because A_2 = A_1 \cup (\overline{A}_1 A_2) = A_1 \cup (A_2 - A_1)$$

والمجموعتان A_1 ، $\overline{A}_1 A_2$ منفصلتان وكذلك A_1، $(A_2 - A_1)$ منفصلتان

$$\therefore P(A_2) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$

وبما أن $P(\overline{A}_1 A_2) \ge 0$

$$\therefore P(A_2) \ge P(A_1)$$

نظرية (1 ـ 13 ـ 4):

لكل مجموعة $A \subset S$ يكون

$$(1.\ 13.\ 4):\ \boldsymbol{0 \le P(A) \le 1}$$

(الإثبات)

$$\phi \subset A \subset S$$

$$\therefore P(\phi) \le P(A) \le P(S) = 1$$

$$0 \le P(A) \le 1.$$

نظرية (1 ــ 13 ــ 5):

إذا كان A_1، A_2 حدثان في الفراغ S (أى مجموعتان جزئيتان فى الفراغ S) فإن احتمال وقوع واحد منهما على الأقل هو:

$$(1.\ 13.\ 5):\ P(\text{at least one}) = P(A_1 \cup A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

(الإثبات)

باستخدام نظرية (1 ــ 6 ــ 1) بوضع:

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = \overline{A}_1A_2 \qquad , \qquad B_1B_2 = \phi$$
$$\therefore A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$$
$$\therefore P(A_1 \cup A_2) = P(B_1 \cup B_2)$$
$$= P(B_1) + P(B_2)$$
$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2)$$

ولكن

$$A_2 = (A_1A_2) \cup (\overline{A}_1A_2)$$
$$P(A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1A_2)$$
$$\therefore P(\overline{A}_1A_2) = P(A_2) - P(A_1A_2)$$

وبالتعويض عن العلاقة السابقة فى $P(A_1 \cup A_2)$.

نجد أن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

هـ. ط. ث

وبصفة عامة إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات جزئية من الفراغ S فإن:

(1. 13. 6):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

$$-\sum_{i<j}^{n}\sum P(A_i A_j)$$

$$+\sum\sum_{i<j<k}^{n}\sum P(A_i A_j A_k)$$

$$\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها بالاستنتاج الرياضى مع استخدام نظرية (1 ــ 6 ــ 1) السابقة. كما يمكن تعميمها إلى حالة $n = \infty$.

وعلى ذلك فى حالة وجود 3 أحداث A_1, A_2, A_3 يكون:

(1. 13. 7): $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

نظرية (1 ــ 13 ــ 6) متباينة بول Booles Inequality:

إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات جزئية فى الفراغ S فإن:

(1. 13. 8): $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

(الإثبات)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$$

ويمكن إتمام الإثبات لحالة n بالاستنتاج الرياضى.

ولكن لو كانت المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ المعطاة فى النظرية السابقة مجموعات منفصلة أى تمثل أحداث متنافية فإن

$$(1.13.9):\ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

وإذا كانت هذه الأحداث تمثل مجموعة متنافية وشاملة أى أن:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \quad , \ A_i A_j = \phi \ , \ \ i \neq j$$

فإن:

$$(1.13.10):\ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1$$

والعلاقتان السابقتان صحيحتان حتى عندما $n \to \infty$ أى فى حالة المتتابعة اللانهائية $A_1, A_2, \ldots$ من الأحداث التى تنتمى كلها إلى الفراغ S.

نظرية (1 ــ 13 ــ 5) السابقة تقدم احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من حدثين ــ والآن سنقدم احتمال وقوع حدث واحد بالضبط من حدثين وذلك فى النظرية التالية:

نظرية (1 ــ 13 ــ 7):

إذا كان الحدثان A_1 ، A_2 يتبعان فراغ الأحداث فإن احتمال وقوع واحد منهما بالضبط هو:

$$(1.13.11):\ \boldsymbol{P(A_1\overline{A}_2 \cup A_2\overline{A}_1) = P(exactly\ one)}$$
$$\boldsymbol{= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1A_2).}$$

(الإثبات)

$$A_1 = A_1\overline{A}_2 \cup A_1A_2$$
$$\therefore P(A_1) = P(A_1\overline{A}_2) + P(A_1A_2)$$
$$\therefore P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) - P(A_1A_2)$$

وبالمثل نجد أن

$$P(A_2\overline{A}_1) = P(A_2) - P(A_1A_2)$$

ولكن الاحتمال المطلوب هو

$$P = P\left(A_1\overline{A}_2 \cup A_2\overline{A}_1\right)$$
$$= P\left(A_1\overline{A}_2\right) + P\left(A_2\overline{A}_1\right)$$

وبالتعويض باستخدام المعادلتين السابقتين نجد أن

$$P = P(A_1) - P(A_1A_2) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1A_2).$$

نظرية (1 ــ 13 ــ 8):

إذا كانت:

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \ldots$$

متتابعة مضطردة Monotone Sequence من الأحداث التى تتبع فراغ الأحداث فإن:

$$(1.\ 13.\ 12):\ \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

(الإثبات)

ذكرنا فى تعريف (1 ــ 9 ــ 2 أ) أن الحدث عبارة عن مجموعة جزئية من فـراغ العينة S وأن كلمة حدث مرادف لكلمة مجموعة. إذن المتتابعة $\{A_n\}$ تمثل متتابعـة مـن المجموعات التى تتبع العائلة البورالية. ولإثبات النظرية السابقة:

(I) نفترض أولاً أن المجموعات ... $A_1, A_2,$ مضطردة الزيادة أى أن:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

إذن:

$$A_1, A_2\overline{A}_1, \ldots, A_n\overline{A}_{n-1}$$

مجموعات منفصلة لجميع قيم: $n = 2, 3, \ldots$

كما أن:

$$(1.\ 13.\ 13):\ A_n = A_1 \cup A_2\overline{A}_1 \cup \cdots \cup A_n\overline{A}_{n-1}.$$

إذن:

$$(1.13.14):\ \lim_{n\to\infty} A_n = A_1 \cup A_2\overline{A}_1 \cup \cdots\cdots$$

ومن تعريف (1 ـ 13 ـ 1) بند 3 نجد أن:

$$(1.13.15):\ P\left[\lim_{n\to\infty} A_n\right] = P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) + \cdots$$

ولكن:

$$(1.13.16):\ P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) + \cdots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) + \cdots + P(A_n\overline{A}_{n-1})\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left[A_1 \cup A_2\overline{A}_1 \cup \cdots \cup A_n\overline{A}_{n-1}\right]$$

ومن (1.13.13)

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

من (1.13.15) و(1.13.16) نحصل على (1.13.12) وهذا يثبت صحة النظرية عندما تكون المجموعات مضطردة الزيادة.

(2) نفرض أن المجموعات مضطردة النقصان:

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

إذن المكملات $\overline{A}_i$ تحقق العلاقة:

$$\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2 \subset \cdots$$

ومن الإثبات السابق نجد أن:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \overline{A}_n\right] = \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n)$$

إذن:

$$P\left[\lim_{n\to\infty}(S - A_n)\right] = \lim_{n\to\infty} P(S - A_n).$$

$$P\left[S - \lim_{n\to\infty} A_n\right] = \lim_{n\to\infty} P(S - A_n)$$

ومن نظرية (1 ــ 13 ــ 3) نكتب العلاقة السابقة فى الصورة:

$$P(S)-P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[P(S)-P(A_n)\right]$$
$$=P(S)-\lim_{n\to\infty}(A_n)$$

إذن:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

وهذا يثبت صحة النظرية.

هـ. ط. ث

تعريف (1 ــ 13 ــ 2) فراغ الاحتمال Probability Space:

فراغ الاحتمال هو مجرد اصطلاح لنعبر به عن الثلاثى [S، β، P] أى فراغ العينة S وفراغ الأحداث β ودالة الاحتمال P ــ وذلك لنرمز للثلاثة عند الحاجة إليها باستخدام لفظ واحد هو فراغ الاحتمال.

مثال (1 ــ 13 ــ 1): إذا كانت A، B حادثتان تنتميان لفراغ احتمالى واحد بين أن:

$$(I.\ 13.\ 17):\quad P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

(الحل)

$$\because AB\subset A\subset A\cup B$$
$$\therefore P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)$$

ومن متباينة بول نظرية (1 ــ 13 ــ 6):

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$
$$\therefore P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)\le P(A)+P(B).$$

من التعريف الحديث للاحتمال نجد أن التعريف لا يحدد كيفية حساب احتمال حدث معين ولكن من الخصائص التى قدمها التعريف ومن طبيعة التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب احتمال الحدث. وسنوضح ذلك فى حالة فراغ العينة المحدود وكذلك فى حالة فراغ العينة غير المحدود.

(1 ــ 14) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة متماثلة:

سنوضح فيما يلى أن الخصائص التى قدمها التعريف الحديث للاحتمال وطبيعة التجربة العشوائية يمكن بهما تحديد قيمة احتمال أى حدث ــ وسنجد أن التعريف الكلاسيكى للاحتمال مجرد حالة خاصة من التعريف الحديث عندما يكون فراغ العينة محدود ومكون من أحداث بسيطة متماثة إذ نجد فى كثير من التجارب العشوائية أن فراغ العينة مكون من عدد محدود من النقط (أى عدد محدود من الأحداث البسيطة) وكثيراً ما تكون هذه الأحداث البسيطة متماثلة ــ وخاصة فى تلك التجارب العشوائية المتعلقة بألعاب الصدفة ــ ويمكن الإشارة إلى فراغ العينة فى مثل هذه التجارب بالرمز S حيث

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$$

أى أن فراغ العينة S يتكون من N من الأحداث البسيطة المتماثلة e_i ــ ومن التماثل تكون:

$$P[\{e_1\}] = P[\{e_2\}] = \cdots = P[\{e_N\}]$$

ولكن من التعريف الحديث للاحتمال نعلم أن:

$$1 = P(S) = \sum_{i=1}^{N} P[\{e_i\}]$$

ومن ذلك نجد أن:

$$(1.\ 14.\ 1):\ P[\{e_1\}] = P[\{e_2\}] = \cdots = P[\{e_N\}] = \frac{1}{N}$$

والمعادلة السابقة توضح لنا أن احتمال أى حدث بسيط فى مجموعة الأحداث البسيطة الشاملة المتماثلة التى عددها N يساوى $\frac{1}{N}$ أى مقلوب عدد هذه الأحداث الشاملة المتماثلة ــ وهذا يمكننا من حساب احتمال أى حدث مركب A حيث نجد أن احتمال أى حدث مركب A يساوى $\frac{1}{N}$ مضروباً فى عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها هذا الحدث المركب ــ فلو كان الحدث المركب A يتكون من m حدث بسيط

$$A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}\}$$

فإن:

$$P[\{e_{i_1}\}] = \cdots = P[\{e_{i_m}\}] = \frac{1}{N}$$

إذن:

$$P(A)=\sum_{J=1}^{m}P(e_{i_J})=\frac{1}{N}+\cdots+\frac{1}{N}=\frac{m}{N}$$

وعلى ذلك لو كان الحدث المركب A يمثل مجموعة جزئية من فراغ العينة S الذى يتكون من مجموعة محدودة من الأحداث البسيطة الشاملة المتنافية المتماثلة التى عددها N فإن احتمال وقوع الحدث A يساوى كسر بسطه عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها الحدث المركب A ولنرمز له بالرمز m ومقامه عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها فراغ العينة S ولنرمز له بالرمز N وبذلك يكون

$$(1:14.2):\ P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{m}{N}$$

وهذا هو نفس التعريف الكلاسيكى للاحتمال وبذلك يمكن اعتبار التعريف الكلاسيكى للاحتمال مجرد حالة خاصة من التعريف الحديث عندما يكون فراغ العينة محدود ومكون من أحداث بسيطة متماثلة ــ وفى هذه الحالة ينحصر العمل الحسابى لإيجاد الاحتمال P(A) فى حصر عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها الحدث المركب A والتى عددها N(A) وعدد الأحداث البسيطة الشاملة التى يتكون منها فراغ العينة S والذى نرمز له بالرمز N(S) ويكون الاحتمال مساوياً حاصل القسمة $\frac{N(A)}{N(S)}$.

مثال (1 ــ 14 ــ 1):

عند اختيار عدد صحيح بطريقة عشوائية من بين الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100 أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(أ) الحدث A: أن يكون العدد المختار مضاعف للعدد 7.

(ب) الحدث B: أن يكون العدد المختار مضاعف للعدد 14.

(جـ) احتمال حدوث واحد على الأقل من الحدثين A وB.

(د) احتمال حدوث واحد بالضبط من الحدثين A وB.

(الحل)

فراغ العينة هنا يتكون من عدد محدود من الأحداث البسيطة المتماثلة هو:

$$S=\{1,2,\ldots,100\}$$

$$\therefore N(S)=100$$

(أ) الحدث A هو:

$$A = \{7,14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98\}$$

$$N(A) = 14$$

$$\therefore P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = 0.14$$

(ب) الحدث B هو:

$$B = \{14,28,42,56,70,84,98\}$$

$$\therefore P(B) = 0.07$$

(جـ) من نظرية (1 ــ 13 ــ 5):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$= P(A) = 0.14 \;\; ; \;\; AB = B$$

(د) من نظرية (1 ــ 13 ــ 7):

$$P(\text{exactly one}) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$
$$= P(A) - P(B) = 0.07$$

(1 ــ 15) العينات أو النقط فى الفراغ:

دائماً نرمز لأى نقطة فى المستوى $R_2 = x_1 0 x_2$ بالرمز $\underline{x}_2' = (x_1, x_2)$ وهو زوج مرتب من القيم ــ والترتيب هنا مهم حيث أن $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ إلا إذا كانت $x_1 = x_2$ ــ والنقط فى الفراغ ذى الأبعاد الثلاثة x_1, x_2, x_3 نرمز لها بالرمز $\underline{x}_3' = (x_1, x_2, x_3)$ مع مراعاة الترتيب ــ كذلك فى الحالة العامة حالة الفراغ ذو النون بعداً $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نرمز للنقطة بالرمز $\underline{x}_n' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مع الأخذ فى الاعتبار أن الترتيب مهم فالنقطتان $(x_1', \ldots, x_n')$، $(x_1, \ldots, x_n)$ تكونا متطابقتان، إذا وفقط إذا كانت، $x_i = x_i'$ لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots, n$.

والتعبير المرتب $\underline{x}_n' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مفيد جداً لعرض نتائج الكثير من التجارب العشوائية التى يمكن تمثيلها بحالة سحب كرات من كيس به مجموعة من الكرات

أو سحب ورقات من مجموعة أوراق اللعب وغير ذلك مما يمكن اعتباره سحب عينة من مجتمع. ومفهوم العينة يمكن تقديمه فى العرض التالى:

نفرض أن لدينا كيس به M من الكرات المتماثلة والمرقمة من 1 إلى M. وأن التجربة العشوائية عبارة عن سحب كرات من هذا الكيس واحدة فى كل مرة حتى نسحب كرات عددها n حيث $n \le M$. ونعبر عن ذلك بأننا سحبنا عينة حجمها n. والسحب هنا قد يتم بأحد أسلوبين هما: السحب مع الإعادة أو السحب بدون إعادة. أما حالة السحب مع الإعادة فهى الحالة التى فى كل سحبة نسجل رقم الكرة المسحوبة ثم نعيد الكرة مرة أخرى إلى الكيس قبل إجراء السحب التالى. ويكون السحب بدون إعادة إذا كانت الكرة لا تعاد إلى الكيس قبل السحب التالى. ونحاول الآن تحديد عدد الأحداث التى يتكون منها فراغ العينة S فى حالتى السحب مع الإعادة والسحب بدون إعادة ــ إذا كان فراغ العينة S يتكون من عدد محدود من النقط أو الأحداث البسيطة المتماثلة التى يمكن تمثيل كل حدث منها بنقطة فى الفراغ ذو النون بعداً فإذا كان N_1 هو عدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة أولى وN_2 هو عدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة ثانية (بفرض أن N_2 لا تعتمد على معرفة أى من الأشياء قد حدث كمركبة أولى) وهكذا حتى N_n هو عدد الأشياء التى يمكن استخدامها كمركبة رقم n (مع فرض أن N_n لا تعتمد على معرفة أى من الأشياء قد حدث كمركبة $(n-1)$) ــ وعلى ذلك يكون حجم فراغ العينة S هو:

$$(1.\ 15.\ 1):\ N(S) = N_1 N_2 \ldots N_n$$

وعلى ذلك يمكننا الآن تحديد عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها فراغ العينة S فى حالة سحب كرات عددها n من كيس به M من الكرات المتماثلة $(n \le M)$ وذلك فى حالتى السحب بدون إعادة ثم السحب مع الإعادة.

(1 ــ 16) حجم فراغ العينة المحدود فى حالة سحب كرات عددهاn من كيس به M كرة:

(1 ــ 16 ــ 1) إذا كان السحب بدون إعادة:

فراغ العينة S يتكون من مجموعة من النقط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أى أن:

$S = \{(x_1, \ldots, x_n)$: j هو رقم الكرة فى السحبة $x_j\}$

ويمكن حصر عناصر المجموعة S أى عدد النقط $(x_1, \ldots, x_n)$ كما يلى:

عدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة أولى x_1 يساوى M

وعدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة ثانية x_2 يساوى $(M-1)$

....

وعدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة x_n n يساوى $(M - n + 1)$

إذن عدد الأحداث البسيطة أو العناصر التى يتكون منها الفراغ S هو

$$(1.\ 16.\ 1):\ N(S) = M(M-1)....(M-n+1) = (M)_n$$

(1 ــ 16 ــ 2) إذا كان السحب مع الإعادة:

فى هذه الحالة يكون عدد الأشياء التى يمكن أن تستخدم كمركبة فى كل سحبة يساوى M وبذلك يكون:

$$(1.\ 16.\ 2):\ N(S) = M \cdot M .... M = M^n$$

(1 ــ 17) بعض النماذج الاحتمالية:

نقدم فيما يلى بعض التجارب العشوائية التى تمثل نماذج احتمالية أو حالات خاصة مهمة فى نظرية الاحتمالات لبيان كيفية حساب احتمالات بعض الأحداث المهمة عن طريق حصر فراغ العينة المحدود وحصر عدد العناصر داخل الحدث.

مثال (1 ــ 17 ــ 1) (مشكلة أعياد الميلاد) Birthday Problem:

(أ) حجرة بها n من الأشخاص ــ ما هو احتمال ألا يوجد بالحجرة شخصان (أو أكثر) لهما نفس يوم الميلاد (بصرف النظر عن تساوى عمريهما)؟

(ب) ما هو الاحتمال فى (أ) إذا كان عدد الأشخاص فى الحجرة 4؟ وما هو الاحتمال إذا كان العدد 40؟

(الحل)

كل شخص فى الحجرة يمكن أن يكون مولود فى أى يوم من أيام السنة البالغ عددها 365 يوم (مع إهمال السنة الكبيسة) ــ لذلك فإن فراغ العينة يكون:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 1, 2, \dots, 365\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n \le 365)$$

إذن حجم المجموعة S هو عدد عناصرها N(S) حيث

$$N(S) = 365 \times 365 \times \cdots \times 365$$

(عددهم n عامل)

$$= (365)^n$$

الحدث A: ألا يوجد شخصان (أو أكثر) لهما نفس يوم الميلاد.

فلو كان أحد الأشخاص مولود فى أى يوم من أيام السنة الـــ 365 فإن الشـــخص الآخر يكون مولود فى أى يوم آخر من الأيام الباقية التى عددها 364 وأى شخص ثالـــث يكون مولود فى أى يوم من الأيام الباقية التى عددها 363 وهكذا (حتى لا يشترك اثنان فى نفس يوم المولد من السنة).

وبذلك يمكن تمثيل الحدث A بالمجموعة التالية:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} (x_1, x_2, \ldots, x_n): & x_1 = 1, 2, \ldots, 365 \\ & x_2 = 1, 2, \ldots, 364 \\ & \vdots \\ & x_n = 1, 2, \ldots, (365 - n + 1) \end{array} \right\}$$

ويكون حجم الحدث A (عدد عناصره) هو

$$N(A) = 365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)$$

ومن (1. 14. 2):

$$P(A) = N(A)/N(S) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365 \times 365 \times \cdots \times 365}$$

$$= 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

(ب) عندما $n = 4$ نجد أن:

$$P_4 = P(A) = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right) = 0.983644$$

وعندما $n = 40$ نجد أن:

$$P_{40} = P(A) = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{39}{365}\right) = 0.109$$

كذلك نجد أن:

ح (اثنين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد) = $P(B)$ حيث:

$$q = P(B) = 1 - P(A)$$

فلو كان عدد الأشخاص 4 يكون:

$$q_4 = P_4(B) = 1 - P_4(A) = 0.016356$$

ولو كان عدد الأشخاص 40 يكون:

$$q_{40} = P_{40}(B) = 1 - 0.109 = 0.891$$

نلاحظ أن P تنقص كلما زاد عدد الأشخاص فى الحجرة (n) بينما q تزيد كلما زاد عدد الأشخاص (n).

مثال (1 ــ 17 ــ 2) (احتمال الحصول على عينة لا يوجد بها مفردات مكررة عند السحب مع الإعادة):

إذا كان لدينا صندوق به M من الكرات المتشابهة ــ مرقمة من 1 إلى M ــ عند سحب عينة حجمها n من هذه الكرات ــ إذا كان السحب مع الإعادة ــ ما هــو احتمــال عدم وجود مفردات مكررة فى هذه العينة؟

(الحل)

هذه المشكلة تشبه تماماً المشكلة السابقة الخاصة بأعياد الميلاد فى المثال السابق ــ لذلك يكون فراغ العينة S هو:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_n) : x_i = 1, 2, \ldots, M \\ \text{لجميع قيم } i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}$$

إذن عدد عناصر S (حجم S) هو

$$N(S) = M \times M \times \cdots \times M = M^n$$

الحدث A هو:

A = عدم وجود مفردتان (أو أكثر) مكررة.

$$\therefore A = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 1, 2, \ldots, M \\ \qquad\qquad x_2 = 1, 2, \ldots, M-1 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = 1, 2, \ldots, (M-n+1) \end{array} \right\}$$

إذن حجم الحدث A هو:

$$N(A) = M(M-1)(M-2)....(M-n+1)$$

ومن (1. 14. 2):

$$P(A) = \frac{M(M-1)(M-2)....(M-n+1)}{M \quad M \quad M \quad ... \quad M}$$

$$(1.\ 17.\ 1):\ P(A) = \left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{2}{M}\right)....\left(1-\frac{n-1}{M}\right)$$

مثال (1 ــ 17 ــ 3) مسألة التناظر Matching Problem:

نفرض أن لدينا M من الصناديق المرقمة من 1 إلى M و M من الكرات المرقمة كذلك من 1 إلى M. بحيث أن كل صندوق لا يتسع إلا لكرة واحدة. فإذا وزعنا (أو وضعنا) بطريقة عشوائية كل كرة فى صندوق ما. فإذا حدث ووضعت الكرة رقم k فى الصندوق رقم k نقول أن تناظراً واحداً قد حدث. وطبعاً من الممكن أن يحدث تناظرين أو ثلاثة أو حتى M من التناظرات إذا وضعت كل كرة فى الصندوق الذى يحمل رقمها. فإذا كان الحدث A_k يمثل حالة حدوث تناظراً واحداً فى الصندوق رقم k ــ فإننا فى هذا المثال سنحاول إيجاد احتمال حدوث A_k ــ وذلك لجميع قيم $k = 1, 2, 3, ..., M$.

(الحل)

يمكن تمثيل فراغ العينة كما يلى:

التجربة هى توزيع M من الكرات على M من الصناديق بوضع كرة واحدة فى كل صندوق بطريقة عشوائية فلو كان x_i يمثل رقم الكرة الموضوعة فى الصندوق رقم i (لجميع قيم $i = 1, 2, ..., M$) إذن فراغ العينة S يمكن تمثيله بالمجموعة التالية:

$$S = \left\{ \begin{array}{c} (x_1, x_2, \ldots, x_M) : x_i = 1, 2, ..., M \\ x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j \end{array} \right\}$$

أى لا يوجد قيمتان من قيم x متساوية ــ وذلك لأن كل x تعبر عن رقم كرة فى صندوق معين وبما أن كل صندوق به كرة واحدة وأرقام الكرات مختلفة إذن لا يوجد قيمتان من قيم x متساوية ــ لذلك فلو أن x_1 تأخذ أى قيمة من 1 إلى M فإن x_2 يمكن أن تأخذ أى قيمة من القيم من 1 إلى M ما عدا تلك التى أخذتها x_1 أى أن x_2 تأخذ أى من

الـــ (M – 1) قيمة الباقية وبالمثل x_3 تأخذ أى من الـــ (M – 2) قيمة الباقية بعد تلك التى أخذتها كلٍ من x_1، x_2 .. وهكذا. إذن حجم فراغ العينة S هو:

$$N(S) = M(M-1)\,(M-2)\cdots\times 3\times 2\times 1$$
$$= M!$$

كذلك الحدث A_k يعتبر مجموعة جزئية من S

إذن:

$$A_k = \left\{ \begin{array}{c} (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k = k \\ x_i \neq x_j \quad , \; i \neq j \\ x_i = 1, 2, \ldots, M \end{array} \right\}$$

إذن x_k تأخذ قيمة واحدة ــ لذلك فإن x_1 يمكن أن تأخذ أى قيمة من القيم التى عددها M ما عدا القيمة k أى أن x_1 تأخذ أى من الـــ (M – 1) قيمة الباقية بعد القيمة k. وكذلك x_2 تأخذ أى مـــن القيم (M – 2) الباقية بعد k وبعد القيمة التى أخذتها x_1 وهكذا. وبذلك يكون حجم الحدث A_k هو:

$$N(A_k) = (M-1)(M-2)\cdots$$
$$\cdots(M-(k-1))\times 1\,(M-k)\cdots\times 3\times 2\times 1$$

أو

$$N(A_k) = 1\times(M-1)(M-2)\cdots\times 3\times 2\times 1 = (M-1)!$$

إذن من (1. 14. 2):

$$(1.\,17.\,2):\; P(A_k) = \frac{(M-1)!}{M!} = \frac{1}{M}$$

(1 ــ 18) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة:

تناولـــنا فى البند (1 ــ 14) الحالة التى يكون فيها فراغ العينة محدود ومكون من أحـــداث بسيطة متماثلة ــ ولكن قد يحدث أن يكون فراغ العينة محدود مثل الحالة السابقة ولكـــن الأحداث البسيطة التى يتكون منها الفراغ تكون غير متماثلة. وبالتالى فإن العلاقة (1. 14. 1) لا تكـــون صـــحيحة وبناء على ذلك تكون العلاقة (1. 14. 2) هى الأخرى غير

صحيحة ــ لذلك لابد فى مثل هذه الحالة من تحديد قيمة احتمال كل حدث بسيط ثم بعـــد ذلك يمكن حساب احتمال أى حدث مركب. والمثال التالى يوضح مثل هذه الحالة.

مثال (1 ــ 18 ــ 1): نفرض أن لدينا زهرة نرد غير متزنة مصنوعة بطريقة معينة بحيث يكون فرصة ظهور أى وجه فيها متناسباً مع العدد الذى يحمله هذا الوجه. عند إلقاء هذه الزهرة مرة واحدة ــ أوجد احتمال ظهور عدد زوجى من النقط.

(الحل)

فى هذه التجربة فراغ العينة محدود هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ولكنه يتكون من أحداث بسيطة غير متماثلة وذلك لأن احتمال ظهور الوجه الذى يحمـــل k من النقط يتناسب مع العدد k أى أن:

$$P(k) = kC \qquad , k = 1, 2, \dots, 6$$

$$P(1) = C, P(2) = 2C, P(3) = 3C \dots, P(6) = 6C$$

ولكن من التعريف الحديث للاحتمال

$$1 = P(S) = P(1) + P(2) + \cdots + P(6)$$

$$1 = \sum_{k=1}^{6} P(k) = C + 2C + 3C + 4C + 5C + 6C$$

$$1 = C(1 + 2 + 3 + \cdots + 6) = 21C$$

$$\therefore C = \frac{1}{21}$$

والحدث المطلوب A هو الحصول على عدد زوجى من النقط ــ إذن:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore P(2) = \frac{2}{21} \quad , P(4) = \frac{4}{21} \quad , P(6) = \frac{6}{21}$$

ومن التعريف الحديث للاحتمال نجد أن:

$$P[A] = P[2] + P[4] + P[6] = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}.$$

(1 ــ 19) الاحتمال الشرطى Conditional Probability:

فى بعض التجارب العشوائية يكون لدينا معلومات عن جزء من نتيجة التجربة ــ وفى ضوء هذه المعلومات نسأل عن احتمال وقوع حدث معين. مثال ذلــك لــو كانــت التجربة العشوائية هى سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) يكــون فــراغ العينة S مكون من 52 حدث بسيط ــ فإذا علمت أن الورقة المسحوبة كانت صورة ــ فما هو احتمال أن تكون هذه الورقة هى صورة الولد؟ .. فى هذه الحالة أصبح معلوم لدينا أن الورقة المسحوبة صــورة ــ أى أن الورقــة المســحوبة ليســت مجــرد ورقــة مــن الــ 52 ورقة التى تمثل مجموعة أوراق اللعب ــ ولكنها ورقة من الــ 12 ورقــة التــى تمثل الصور الموجودة فى الكوتشينة والاحتمال المحسوب فى هذه الحالة يسمى بالاحتمال الشرطى ــ لأننا نشترط تحقق حدث معين (هو ظهور صورة). ويمكن تقديمه بشكل عام كما يلى:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فراغها المجموعة S ــ وعلمنا أن نتيجــة هــذه التجربة كانت إحدى عناصر المجموعة E التى هى جزء من S ($E \subset S$). وفى ضــوء علمنــا أن النتيجــة إحدى عناصر E ما هو احتمال أن تكون هذه النتيجة هــى تحقــق الحدث A؟ أى الاحتمال المطلوب هو: احتمال تحقق الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد تحقق فعلاً ($A \subset E; E \subset S$). وهذا الاحتمال يسمى بالاحتمال الشرطى ويكتب فى الصورة:

$$P(A \mid E).$$

ويقرأ "احتمال حدوث A بعد E" أو "احتمال حدوث A إذا علمنا أن E قد حدث فعلاً".

وهذا الاحتمال يمكن تعريفه على ضوء الاحتمال التجريبى بأنه نسبة حدوث A من بين المرات التى حدث فيها E، أى لو افترضنا تكرار تجربة عشوائية عــدد كبيــر مــن المرات ليكن N مرة وكان الحدثان A و E معرفان على هذه التجربة ــ فإذا كــان عــدد مرات حدوث E هو $N(E)$ وعدد مرات حدوث A أثناء حدوث E هو $N(AE)$ فإن التكرار النسبى لحدوث A أثناء حدوث E هو $\frac{N(AE)}{N(E)}$ وهذا هو نفسه احتمال حدوث الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً أى أن:

$$P(A \mid E) = \frac{N(AE)}{N(E)}$$

وبقسمة البسط والمقام للطرف الأيمن فى المعادلة السابقة على N نجد أن:

$$P(A \mid E) = \frac{N(AE)/N}{N(E)/N} = \frac{P(AE)}{P(E)}$$

لذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطى لوقوع الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً كما يلى:

تعريف (1 ــ 19 ــ 1) الاحتمال الشرطى:

إذا كان الحدثان A، E معرفان على فراغ احتمالى واحد فإن الاحتمال الشــرطى لوقوع الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً والذى نرمز لـــه بـــالرمز P(A | E) يعرف بأنه:

$$(1.19.1):\ P(A\,|\,E)=\frac{P(AE)}{P(E)}$$

إذا كان P(E) > 0 ويترك بدون تعريف إذا كان P(E) = 0.

والسؤال الهام الآن هو: هل الاحتمال الشرطى يحقق كل شروط الاحتمــال غيــر الشرطى ــ بمعنى آخر ــ هل الدالة P[. | E] تعتبر دالة احتمال وتحقق المسلمات الثلاثــة التى نص عليها التعريف الحديث للاحتمال. فى الواقع نجد أن دالة الاحتمـــال الشـــرطى تحقق مسلمات الاحتمال الثلاثة ــ وذلك لأنه إذا كان فراغ العينة هـــو S وكانـــت A و E مجموعتان جزئيتان من S فإن:

$$(1.19.2):\ P(A\,|\,E)=\frac{P(AE)}{P(E)}\geq 0$$

$$(1.19.3):\ P(S\,|\,E)=\frac{P(SE)}{P(E)}=\frac{P(E)}{P(E)}=1$$

وإذا كانت $A_1, A_2, \ldots\ldots$ متتابعة من الأحداث المتنافية فإن:

$$(1.19.4):\ P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\,|\,E\right]=\frac{P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)E\right]}{P(E)}=\frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_iE\right)}{P(E)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(A_iE)}{P(E)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\,|\,E)$$

وعلى ذلك عندما تكون P(E) > 0 تكون الدالة الشـــرطية P[. | E] دالـــة احتمـــال. ويمكن إثبات أن دالة الاحتمال الشرطى P[. | E]، عندما تكـــون P[E] > 0، تحقـــق كـــل النظريات التى تم تقديمها بالنسبة للاحتمال غير الشرطى ابتداء من نظرية (1 ــ 13 ــ 1) حتى (1 ــ 13 ــ 8). وذلك كما يلى:

لأى حدثين A وE معرفان على فراغ احتمالى واحد يمكن إثبات أن:

$$(1.19.5):\ P(A\,|\,E)=1-P(\overline{A}\,|\,E).$$

و

$$(1.19.6):\ P(\phi\,|\,E)=0$$

وإذا كانت الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ متنافية ومعرفة على فراغ احتمالى واحد يكون:

$$(1.19.7):\ P\left[\bigcup_{1}^{n}A_i\,|\,E\right]=\sum_{i=1}^{n}P[A_i\,|\,E]$$

ولأى حدثين A_1, A_2:

$$(1.19.8):\ P[A_1|\,E]=P[A_1A_2\,|\,E]+P[A_1\overline{A}_2\,|\,E]$$

$$(1.19.9):\ P[A_1\cup A_2\,|\,E]=P(A_1\,|\,E)+P(A_2\,|\,E)-P(A_1A_2\,|\,E).$$

وإذا كانت $A_1\subset A_2$:

$$(1.19.10):\ P(A_1\,|\,E)\le P(A_2\,|\,E).$$

و

$$(1.19.11):\ P\left[\bigcup_{1}^{n}A_i\,|\,E\right]\le\sum_{i=1}^{n}P[A_i\,|\,E]$$

من تعريف (1 ــ 19 ــ 1) للاحتمال الشرطى نجد لأى حدثين A وE معرفان على فراغ احتمالى واحد أن:

$$(1.19.12):\ P(AE)=P(A)P(E\,|\,A)=P(E)P(A\,|\,E)$$

وهذا يوضح العلاقة بين الاحتمالين الشرطيين $P(A\,|\,E)$ و$P(E\,|\,A)$ فى الصورة التالية:

$$(1.19.13):\ P(A\,|\,E)=\frac{P(A)P(E\,|\,A)}{P(E)}.$$

مثال (1 ــ 19 ــ 1): تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء قطعتى عملة متزنة دفعة واحدة ــ أوجد:

أولاً: احتمال الحصول على صورتين إذا علمت أن نتيجة القطعة الأولى صورة.

ثانياً: احتمال الحصول على صورتين إذا علمت أنه قد ظهرت صورة واحدة على الأقل.

(الحل)

فراغ العينة هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

لنرمز للحدثان A_1، A_2 كما يلى:

الحدث A_1: هو ظهور صورة على القطعة الأولى.

والحدث A_2: هو ظهور صورة على القطعة الثانية.

أولاً: الاحتمال المطلوب هو: $P(A_1A_2 \mid A_1)$ ولكن

$$P_1 = P(A_1A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1A_2A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ثانياً: الاحتمال المطلوب هو $P_2 = P(A_1A_2 \mid A_1 \cup A_2)$ حيث

$$P_2 = P(A_1A_2 \mid A_1 \cup A_2) = \frac{P[A_1A_2 \cap (A_1 \cup A_2)]}{P(A_1 \cup A_2)}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A_1A_2 \cap (A_1 \cup A_2) &= A_1A_2A_1 \cup A_1A_2A_2 \\ &= A_1A_2 \cup A_1A_2 = A_1A_2 \end{aligned}$$

إذن

$$P_2 = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

[ملاحظة: يمكن من فراغ العينة S ملاحظة أن: $P_1 = \frac{1}{2}$ ، $P_2 = \frac{1}{3}$ وذلك بمجرد النظر]

ويمكن تعميم قانون الاحتمال الشرطى إلى حالة وجود ثلاث أحـــداث A_1, A_2, A_3 حيث يكون:

$$(1.19.14): \; P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1, A_2)$$

كذلك فى حالة وجود n من الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ يكون:

$$(1.19.15):\ P(A_1A_2\dots A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1, A_2)\dots P(A_n \mid A_1,\dots, A_{n-1})$$

حيث: $P(A_1A_2\dots A_{n-1}) > 0$

(1 ــ 20) الاحتمال الكلى Total Probability:

لأى فـــراغ احتمالى معين (P ،β ،S) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعة من الأحداث المتنافية الشاملة فى S أى أن:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad , \qquad A_iA_j = \phi \ ;\text{for } i \neq j$$

وكان E حدث ما فى β ‏($E \in \beta$)

$$(1.20.1):\ P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(E \mid A_i)$$

(الإثبات)

بمـــا أن مجموعة الأحداث $A_1, ..., A_n$ تشمل كل فراغ العينة S والحدث E جزئى من S إذن:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EA_i$$

وبما أن الأحداث A_i متنافية

إذن

$$(EA_i) \cap (EA_j) = \phi \ ;\text{for } i \neq j$$

وبذلك يكون

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} EA_i\right)$$

ومن التنافى

$$= \sum_{i=1}^{n} P(EA_i)$$

ومن العلاقة (1. 19. 12)

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i).$$

هــ . ط . ث

نتيجة (1 ــ 20 ــ 1):

إذا كـــان الحـــدث A جــزئى من الفراغ S فيكون الحدث المكمل $\overline{A}$ والحدث A حدثان متنافيان شاملان أى أن

$$A \cup \overline{A} = S \quad ، \quad A \cap \overline{A} = \phi$$

وعلى ذلك يمكن من (1. 20. 1) استنتاج أنه لأى حدث E فى العائلة β يكون:

$$(1.\ 20.\ 2):\ P(E) = P(A)P(E \mid A) + P(\overline{A})P(E \mid \overline{A})$$

مـــثال (1 ــ 20 ــ 1): لديـــنا صـــندوقان I، II. الصندوق الأول I به 5 كرات بيضاء و3 كرات سوداء ــ والثانى II به 3 كرات بيضاء و7 سوداء. أختير أحد الصندوقين عشوائياً وسحبت منه كرة ــ أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

(الحل)

فراغ العينة لمثل هذه التجربة يمكن تمثيله بالمجموعة التالية:

$$S = \left\{ (x_1, x_2): \begin{array}{l} x_1\text{: رقم الصندوق المختار I أو II،} \\ x_2\text{: لون الكرة المختارة أبيض أو أسود} \end{array} \right\}$$

(لاحـــظ أن حالات x_2 (أبيض وأسود) غير متماثلة لأن عدد الكرات البيضاء يختلف عن عدد الكرات السوداء).

نفرض أن:

الحدث A_1: الصندوق المختار هو الصندوق الأول.

الحدث A_2: الصندوق المختار هو الصندوق الثانى.

الحدث A_1: الصندوق المختار هو الصندوق الأول.

الحدث A_2: الصندوق المختار هو الصندوق الثانى.

الحدث E: الكرة المختارة بيضاء.

$$\therefore P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(E \mid A_1) = \frac{5}{8} \qquad , \qquad P(E \mid A_2) = \frac{3}{10}$$

والاحتمال المطلوب هو احتمال أن الكرة المختارة بيضاء.

من العلاقة *(1. 20. 2)* للاحتمال الكلى نجد أن:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1)P(E \mid A_1) + P(A_2)P(E \mid A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{37}{80}. \end{aligned}$$

مثال (*1* ـ *20* ـ *2*) مجتمع الطبقات:

فى أى مجتمع بشرى مكون من طبقات .... $H_1, H_2,$ ـ (مثل توزيع أفراد المجتمع حسب فئات العمر أو الدخل السنوى لرب الأسرة أو خلاف ذلك) ـ إذا كان احتمـــال أن شخص ما x أختير عشوائياً يتبع للطبقة H_J هو P_J

$$P(x \in H_J) = P_J .$$

حيث:

$$\left(\sum P_J = 1\right)$$

وإذا كانت كل طبقة مصنفة إلى عدة فئات معينة حسب النوع مثلاً (ذكر وأنثى) أو حسب الحالة التعليمية (أمي ـ يقرأ ويكتب ـ يحمل مؤهل متوسط ـ يحمل مؤهل عالى) .. وهكذا. ورمزنا لاحتمال أن يكون شخص مختار عشوائياً من الطبقة H_J أمياً بـــالرمز q_Jومثلنا مجموعة الأشخاص الأميين فى المجتمع بالمجموعة A فإن:

$$P(x \in A \mid H_J) = q_J .$$

والآن مطلوب الإجابة عن السؤال التالى:

عند اختيار شخص عشوائياً من هذا المجتمع ما هو احتمال أن يكون أمياً؟

(الحل)

قــد يكون الشخص أميا ومن الطبقة الأولى أو أمياً ومن الطبقة الثانية أو أمياً ومن الطــبقة الثالــثة .. وهكذا. لذلك بتمثيل مجموعة الأميين A فى كل طبقات المجتمع يمكن وضع A فى الصيغة التالية:

$$A = \bigcup_{J=1}^{\infty} AH_J$$

حيث AH_J هى مجموعة الأميين فى الطبقة H_J.

والمجموعــات AH_J مجموعــات متنافــية ــ لذلــك يمكن استخدام قانون الاحتمال الكلى المعطــى بالعلاقة (1 .20 .1) لحساب احتمال أن يكون الشخص المختار أمياً أى الاحتمال $P(x \in A)$ حيث يكون:

$$P(x \in A) = \sum_{J=1}^{\infty} P(x \in H_I) P(x \in A \mid H_J) = \sum_{J=1}^{\infty} P_J\, q_J\,.$$

ولــو كانت كل طبقة مكونة من فئتين فقط ذكر وأنثى وكان احتمال الذكر يساوى احتمال الأنثى ــ فإن احتمال أن الشخص المختار يكون ذكر أمى هو:

$$P = \sum_{J=1}^{\infty} \tfrac{1}{2} P_J = \tfrac{1}{2}\left(\sum P_J\right) = \tfrac{1}{2}\,.$$

(1 ــ 21) نظرية بيز Bayes' Theorem:

نفرض أن لدنيا n من الأحداث المتنافية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وأن احتمال وقوع كل من هــذه الأحداث $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ احتمالات معروفة ــ وأن لدينا حدث E يتبع فى وقوعــه أى حــدث واحد فقط من الأحداث A_k ــ أى أن E لا يقع إلا مع واحد فقط من الأحــداث A_k ــ وذلــك باحــتمالات معــروفة $P(E \mid A_k)$ ــ والمطلــوب معــرفة $P(A_k \mid E)$ أى احتمال وقوع الحدث A_k إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً ــ أى أنه إذا علمــنا أن الحدث E قد وقع فما هو احتمال أن يكون مسبوقاً بالحدث A_k ــ والاحتمــال $P(A_k \mid E)$ يســمى بالاحتمــال البعدى Posteriori Probability للحدث A_k فى حين يسمى الاحتمال $P(A_k)$ بالاحتمال القبلى Priori Probability أو الاحتمال المطلق للحدث A_k.

احتمال أن الحدث A_k يقع ثم يليه الحدث E هو:

$$P(A_k E) = P(A_k)P(E \mid A_k) \ldots \quad (أ)$$

كما أن احتمال أن الحدث E يقع بصرف النظر عن أى الأحداث A_k كان يسبقه يمكن حسابه من الاحتمال الكلى (1. 20. 1) كما يلى:

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(E \mid A_k) \ldots . \quad (ب)$$

والاحتمال المطلوب هو $P(A_k \mid E)$ يمكن وضعه باستخدام العلاقة (1. 19. 1) على الصورة:

$$P(A_k \mid E) = \frac{P(A_k E)}{P(E)}$$

وبالتعويض عن الجانب الأيمن فى العلاقة السابقة من العلاقتان السابقتان (أ)، (ب) نجد أن:

$$(1.\ 21.\ 1):\ P(A_k \mid E) = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{\sum_{J=1}^{n} P(A_J)P(E \mid A_J)}$$

والصيغة السابقة تسمى صيغة "بيز" ـ وقد وضعها العالم الإنجليزى "توماس بيز" "Thomas Bayes" ـ وهذه الصيغة صحيحة من الناحية النظرية ولكنها محدودة الفائدة من الناحـية التطبيقية وذلك لأنها تعتمد على الاحتمالات القبلية $P(A_k)$ وهذه الاحتمالات نادراً ما تكون معروفة إلا فى الأمثلة الافتراضية البحتة ـ لذلك افترض "بيز" أنه فى حالة عدم وجود أى معلومات لتحديد الاحتمالات القبلية $P(A_k)$ يمكن افتراض أنها متساوية أى أن:

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}.$$

وبالتعويض عن ذلك فى صيغة "بيز" السابقة نجد أن:

$$(1.\ 21.\ 2):\ P(A_k \mid E) = \frac{P(E \mid A_k)}{\sum_{J=1}^{n} P(E \mid A_J)}$$

وهذه تسمى بديهية "بيز".

ملاحظة (1 ــ 21 ــ 1):

صيغة "بيز" وكذلك بديهية "بيز" تظل صحيحة إذا كانت $n = \infty$.

والأحــداث A_k أحــياناً نســميها "أسباب" وعليه تكون صيغة "بيز" صيغة لحساب احــتمال أن الحــدث E (الذى قد وقع فعلاً) هو نتيجة للسبب A_k. وقد نسمى الأحداث A_k "فروضــاً" وعلــيه تكون صيغة "بيز" صيغة لحساب احتمال صحة الفرض A_k فى ضوء المعلومات E.

مــثال (1 ــ 21 ــ 1): ثلاثة صناديق متشابهة ــ لكل منها درجان ــ الصندوق الأول بــه قطعــة نقــود ذهبية فى كل من درجيه ــ والصندوق الثانى به قطعة ذهبية فى أحد الدرجيــن وقطعة فضية فى الدرج الثانى ــ والصندوق الثالث به قطعة فضية فى كلٍ من درجيه.

(أ) اخــترنا صندوق عشوائياً ــ فما هو احتمال أن يحتوى الصندوق المختار على قطعة ذهبية وقطعة فضية؟

(ب) إذا اخترنا صندوق عشوائياً وفتحنا أحد درجيه فوجدنا به قطعة ذهبية:

(1) فما هو احتمال أن يحتوى الدرج الثانى على قطعة فضية؟

(2) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الأول؟

(3) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الثانى؟

(4) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الثالث؟

(الحل)

(أ) لو رمزنا للصناديق الثلاثة بالرموز x_1, x_2, x_3 فإن فراغ العينة فى (أ) يكون:

$$S = \{x_1, x_2, x_3\}$$

حجم فراغ العينة هو $N(S) = 3$ ويكون

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{3}$$

أى أن احتمال اختيار أى صندوق = $\frac{1}{3}$

∴ ح (أن يحتوى الصندوق المختار على قطعة ذهبية وأخرى فضية) هو: $P(x_2) = \frac{1}{3}$

(ب) ــ1ــ لو فكرنا فى الحل بالطريقة التالية سنصل إلى نتيجة مضللة **كما يلى:**

بما أننا اخترنا صندوق ووجدنا فى أحد درجيه قطعة ذهبية ــ إذن يوجد فرصتين فقط للدرج الثانى إما ذهبية أو فضية فى هذه الحالة يكون فراغ العينة:

$$S_1 = \{g, s\}$$

حيث g قطعة ذهبية، s قطعة فضية ــ وحجم هذا الفراغ $N(S_1) = 2$

والحدث E: القطعة الثانية فضية

$$\{s\} = E$$

وحجم الحدث E هو $N(E) = 1$

$$\therefore P(E) = \frac{N(E)}{N(S_1)} = \frac{1}{2}.$$

ولكــن هذه النتيجة خطأ لأن الحدثان البسيطان اللذان يتكون منهما الفراغ S_1 وهما {s}، {g} غــير مــتماثلان ــ لأن فرصـــة أن تكــون القطعة الثانية فضية تتوقف على محــتويات الصـــندوق المخــتار والــذى وجدنا بأحد درجيه قطعة ذهبية ــ فلو كان هو الصــندوق الأول كانــت فرصـــة أن تكون القطعة الثانية فضية معدومة وتساوى الصفر واحــتمال أن تكون ذهبية تساوى واحد ــ أما إذا كان الصندوق المختار هو الثانى كانت الفرصـــة مؤكدة أى احتمال أن تكون القطعة الثانية فضية تساوى واحد واحتمال أن تكون ذهبــية تساوى الصفر ــ وطبعاً لا يمكن أن يكون هو الصندوق الثالث لأن بكلتا درجيه قطعة فضية ونحن تأكدنا أن الصندوق المختار به قطعة ذهبية.

لكى نصل إلى نتيجة صحيحة **نفكر كما يلى:**

بمـــا أن الســـحب هنا يتم على مرحلتين ــ المرحلة الأولى اختيار صندوق والثانية اختيار درج من الصندوق ــ إذن فراغ العينة يمكن تمثيله كما يلى:

$$S_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{l} x_1 \text{ اختيار صندوق من الثلاثة} \\ x_2 \text{ اختيار درج من الصندوق المختار} \end{array} \right\}$$

حجم الفراغ S_2 هو

$$N(S) = 3 \times 2 = 6$$

الحدث E: الدرج الثانى به قطعة فضية علماً بأن الدرج الأول به قطعة ذهبية

$$E = \left\{ (y_1, y_2) : \begin{array}{l} y_1 \text{ قطعة ذهبية} \\ y_2 \text{ قطعة فضية} \end{array} \right\}$$

∴ حجم الحدث E هو $N(E) = 2 \times 1 = 2$

لأن القطعـــة الذهبية ستكون من الصندوق الأول أو الثانى وهما حالتان ــ أما إذا كـــان أحد الدرجين به قطعة ذهبية فإن الدرج الثانى لا يكون به قطعة فضية إلا إذا كان الصندوق المختار هو الصندوق الثانى وهذه حالة واحدة.

$$\therefore P(E) = \frac{N(E)}{N(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ب) ــ 2 ــ المطلوب احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الصندوق الأول علماً بأن فى أحد درجيه قطعة ذهبية.

نرمـــز للصـــناديق الـــثلاثة بالرموز x_1, x_2, x_3 كما سبق. والحدث E: الصندوق المختار فى أحد درجيه قطعة ذهبية. إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(x_1 | E) = \frac{P(x_1)P(E | x_1)}{P(E)}.$$

حيث

$$P(x_1) = \tfrac{1}{3}$$

$$P(E) = P(x_1)P(E | x_1) + P(x_2)P(E | x_2) + P(x_3)P(E | x_3)$$

$$P(E) = \tfrac{1}{3} \times 1 + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \times 0$$

$$P(E) = \tfrac{1}{2} \qquad , \ P(E | x_1) = 1$$

$$\therefore P(x_1 | E) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}$$

(ب) ــ 3 ــ المطلوب: $P(x_2 | E)$

بالمثل نجد أن:

$$P(x_2) = \tfrac{1}{3}$$

$$P(E) = \tfrac{1}{2} \qquad , \ P(E | x_2) = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore P(x_2 | E) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}$$

(ب) ــ 4 ــ المطلوب: $P(x_3 \mid E)$

بالمثل نجد أن:

$$P(x_3) = \tfrac{1}{3}$$

$$P(E) = \tfrac{1}{2} \qquad , \; P(E \mid x_3) = 0$$

$$\therefore P(x_3 \mid E) = \frac{\frac{1}{3} \times 0}{\frac{1}{2}} = 0$$

مـــثال (1 ــ 21 ــ 2): صـــندوق بـــه 4 كرات وكل ما نعرفه عن محتوياته أنها إحدى حالتين (أ) كل الكرات الأربع بيضاء أو (ب) كرتان بيضاء وكرتان سوداء. سُحبت كـــرة عشـــوائياً مـــن الصـــندوق ووُجِدَ أنها بيضاء. فما هو احتمال أن تكون كل كرات الصندوق بيضاء؟

(الحل)

يوجد فرضان لمحتويات الصندوق هما:

الفـــرض الأول H_1 هو أن تكون كل الكرات الموجودة بالصندوق بيضاء والفرض الثانى H_2 هـــو أن يوجد بالصندوق كرتان بيضاء وكرتان سوداء. نفرض أن احتمال أن يكون الفـــرض الأول صحيح هو $P(H_1) = P_1$ و أن احتمال أن يكون الفرض الثانى صحيح هو $P(H_2) = P_2$ نفرض أن الحدث B هو: سحب كرة بيضاء.

إذن الاحتمال المطلوب هو: $P(H_1 \mid B)$ أى احتمال أن تكون كل الكرات الموجودة فـــى الصندوق بيضاء إذا علمنا أن الكرة التى سحبت وُجِدت بيضاء ــ أو احتمال صحة الفرض الأول H_1 فى ضوء المعلومة التى حصلنا عليها وهى أن الكرة المسحوبة بيضاء. من نظرية "بيز" نجد أن:

$$P(H_1 \mid B) = \frac{P(H_1)P(B \mid H_1)}{P(H_1)P(B \mid H_1) + P(H_2)P(B \mid H_2)}$$

ولكن

$$P(H_1) = P_1 \qquad , \quad P(H_2) = P_2$$

$$P(B \mid H_1) = 1 \qquad , \quad P(B \mid H_2) = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore P(H_1 \mid B) = \frac{P_1 \times 1}{P_1 \times 1 + P_2 \times \frac{1}{2}} = \frac{P_1}{P_1 + \frac{1}{2}P_2}$$

وهــذا يعتمد على معرفة كلٍ من الاحتمالات القبلية $P(H_1), P(H_2)$ أى على P_1, P_2 فلو اتبعنا ما افترضه "بيز" من أن:

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2}$$

يكون:

$$P(H_1 \mid B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$P(H_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{2} P_2}{P_1 + \frac{1}{2} P_2}$$

وعندما $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$

يكون:

$$P(H_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

مثال (1 ــ 21 ــ 3) (مجتمع مصنف حسب عدد الأطفال فى الأسرة):

مجــتمع بشرى مقسم إلى طبقات حسب عدد الأطفال فى الأسرة، الطبقة H_J هى الطــبقة المكونة من الأسر التى عند كل منها J طفل. واحتمال أن شخص مختار عشوائياً مــن هــذا المجتمع يكون من الطبقة H_J هو P_J (حيث $\sum_J P_J = 1$). فلو رمزنا للولد بالرمز b والبنت بالرمز g وكان توزيع الأطفال داخل كل أسرة حسب النوع (ولد وبنت) باحــتمالات متســاوية أى أن $P(b) = P(g) = \frac{1}{2}$. وكان المطلوب الإجابة على السؤال التالى:

إذا ســحبنا مفــردة (شخص) من هذا المجتمع وعلمنا أن الأسرة التى سحبت منها المفردة ليس عندها بنات فما هو احتمال أن تكون هذه المفردة من الطبقة الأولى H_1؟

(الإجابة)

مـــن الممكن أن تكون المفردة المسحوبة من الطبقة الأولى أو الثانية أو الثالثة أو ... . وبالتالى فإن فراغ العينة S يتكون من النقط التالية:

ϕ (فى حالة عدم وجود أطفال) b, g ,(فى حالة وجود طفل واحد) b b, b g, g b, g g ,(فى حالة وجود طفلين) b b b, ... وهكذا.

إذا كانت الأسرة المختارة بها n طفل فإن احتمال أن يكون الأطفال فى هذه الأسرة بترتيب معين (كالتالى مثلا):

$$E=\{g\,b\,g\,g\,b\ldots b\} \qquad \text{(عددهم n)}$$

(الطفل الأكبر بنت ثم يليه ولد ثم بنت ثم بنت ثم ولد ... ثم ولد)

احتمال الحصول على هذا الترتيب هو: $P(E\,|\,H_n)=(\tfrac{1}{2})^n$

وإذا رمـــزنا لاحتمال أن تكون الأسرة المختارة من الطبقة n (أى عندها n طفل) بالرمز P_n فإن:

احـــتمال أن تكون الأسرة المختارة من الطبقة n وترتيب الأطفال فيها هو الترتيب المعين السابق

= ح (أن تكـــون الأســـرة المخـــتارة من الطبقة n) × ح (أن تكون أطفال الأسرة بالترتيب السابق $E\,|\,H_n$)

$$=P(H_n)\,P(E\,|\,H_n)$$
$$=P_n\times(\tfrac{1}{2})^n$$

وبفرض أن الحدث A هو: **أن الأسرة المختارة لا يوجد عندها بنات.** طبعاً يوجد أسر من هذا النوع فى جميع طبقات المجتمع H_J وبالتالى تكون

$$A=\bigcup_{J=1}^{\infty} AH_J$$

والمجموعات $A\,H_J$ مجموعات متنافية.

وبالتالى نجد من الاحتمال الكلى فى (1. 20. 1) أن:

$$P(A)=\sum_J P(H_J)\,P(A\,|\,H_J)$$

حيث

$$P(H_J)=P_J$$

و $P(A \mid H_J)$ هو احتمال أن تكون كل أطفال الأسرة التى عددهم J لا يوجد فيهم بنات أى كلهم أولاد

$$P(\{b\, b \ldots b\}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^J$$

$$\therefore P(A) = P_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + P_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + P_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

والســؤال المطلــوب هو: إذا علمنا أن الأسرة المختارة ليس بها بنات ــ فما هو احتمال أن تكون من الطبقة الأولى أى بها طفل واحد ــ أى الاحتمال $P(H_1 \mid A)$.

ومن نظرية "بيز" نجد أن:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{P_1\left(\tfrac{1}{2}\right)}{P_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + P_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + P_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots}$$

حيث $P(A \mid H_1)$ هو احتمال أن يكون بالأسرة طفل واحد ولد $P(b) = \dfrac{1}{2}$.

والاحتمال السابق $P(H_1 \mid A)$ هو احتمال صحة الفرض H_1 فى ضوء المعلومة A.

ويتضـــح مـــن المثال السابق أن الاحتمال $P(H_1 \mid A)$ والذى تقدمه نظرية "بيز" لا يمكن معرفته إلا إذا كانت الاحتمالات القبلية $P(H_1), P(H_2), \ldots$ معلومة كلها ــ وهذا نادراً مـــا يحـــدث فى الواقع العملى ــ إذ غالباً ما تكون هذه الاحتمالات القبلية مجهولة ــ مما يجعل الفائدة التطبيقية لنظرية "بيز" محدودة عملياً.

فلو اعتبرنا فى المثال السابق أن الفروض عددها عشرة فروض فقط $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$ باعتــبار أن الفرض العاشر H_{10} هو أن يكون عدد الأطفال فى الأسرة عشرة أطفال فأكثر ــ ولو افترضنا أن احتمالات هذه الفروض متساوية أى:

$$P(H_1) = P(H_2) = \cdots = P(H_{10}) = \tfrac{1}{10}$$

فإن الاحتمال المطلوب يكون:

$$P(H_1 \mid A) = \left(\tfrac{1}{2}\right) \Big/ \left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}\right]$$

$$P(H_1 \mid A) \approx \tfrac{1}{2}$$

(1 ــ 22) نظرية "بيز" للأحداث المستقبلة :

Bayes' Theorem for Future Events

يمكـــن تعميم نظرية "بيز" لحساب احتمالات بعض الأحداث المستقبلة كما يلى: إذا أبقيـــنا علـــى كل الفروض التى وضعت فى نظرية "بيز" بالنسبة للأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ الشـــاملة المتنافـــية ــ والحدث E الذى لا يقع إلا مع إحدى حالات A باحتمال $P(E \mid A_k)$ معروف لجميع قيم $k = 1, 2, ..., n$ وافترضنا بالإضافة إلى ذلك أن C حدث ما يقع بعد E وأنه (أى C) يقع مع واحد فقط من الأحداث $A_1, ..., A_n$. والمطلوب الآن حساب الاحتمال التالى:

إذا كان معلوما أن الحدث E قد وقع فما هو احتمال وقوع الحدث C. أى ما هو:

$$P[C \mid E] = ?$$

فى الواقع نعلم من الاحتمال الشرطى أن:

$$P[C \mid E] = \frac{P[EC]}{P[E]} \qquad \text{(أ)}$$

ومن العلاقة (1 .20 .1) للاحتمال الكلى نعلم أن:

$$P[E] = \sum_k P(A_k) P(E \mid A_k) \qquad \text{(ب)}$$

إذن

$$P[EC] = \sum_k P(A_k) P[EC \mid A_k]$$

ومن العلاقة (12 .19 .1) للاحتمال الشرطى تكون:

$$P[EC \mid A_k] = P[E \mid A_k] P[C \mid A_k, E] \qquad \text{(جـ)}$$

بالتعويض عن (ب) و(جـ) فى (أ) نجد أن:

$$(1.\ 22.\ 1):\ P[C \mid E] = \frac{\sum_k P(A_k) P(E \mid A_k) P(C \mid A_k, E)}{\sum_k P(A_k) P(E \mid A_k)}$$

والعلاقة السابقة توضح كيفية حساب احتمال الحدث C إذا علمنا أن الحدث E قد وقع وذلك فى ضوء مجموعة شاملة ومتنافية من الفروض $A_1, ..., A_n$.

مثال (1 ــ 22 ــ 1): فى مثال (1 ــ 21 ــ 2) ذكرنا أن لدينا صندوق محتوياته 4 كرات بيضاء أو كرتان بيضاء وكرتان سوداء. سحبت منه كرة واحدة وَوُجِدتْ بيضاء ــ عــند سحب كرة ثانية من الصندوق (بدون إعادة) ما هو احتمال أن الكرة الثانية ستكون بيضاء أيضا؟

(الحل)

لديــنا فرضـــين H_1 أن الكرات الموجودة بالصندوق كلها بيضاء وH_2 أن الكرات الموجودة بالصندوق منها 2 بيضاء، 2 سوداء. الحدث E: هو سحب كرة بيضاء (من أول سحبة). الحدث C: هو سحب كرة ثانية (بعد السحبة الأولى) بيضاء. إذن:

$$P(E|H_1)=1 \quad , \quad P(E|H_2)=\tfrac{1}{2}$$

$$P(C|H_1,E)=1 \quad , \quad P(C|H_2,E)=\tfrac{1}{3}$$

$$P(H_1)=P_1 \quad , \quad P(H_2)=P_2$$

من العلاقة (1. 22. 1) السابقة يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(C|E)=\frac{\sum_k P(H_k)P(E|H_k)P(C|H_k,E)}{\sum_k P(H_k)P(E|H_k)}=\frac{N}{M}$$

البسط فى الطرف الأيمن من العلاقة السابقة يساوى

$$N=P_1\times1\times1+P_2\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}=P_1+\tfrac{1}{6}P_2$$

والمقام هو الاحتمال الكلى P(E) ويساوى

$$M=P(E)=P_1+\tfrac{1}{2}P_2$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(C|E)=\frac{P_1+\frac{1}{6}P_2}{P_1+\frac{1}{2}P_2}$$

ولكن عندما $P_1=P_2=\frac{1}{2}$

يكون

$$P(C|E)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{7}{9}$$

في العلاقة (1 .22 .1) السابقة التى تعتبر تطبيق لنظرية "بيز" على الأحداث المستقبلة استخدمنا الاحتمال $P[C \mid A, E]$ وهو احتمال وقوع الحدث C إذا علمنا أن الحدثان E وA قد وقعا. ونحاول الآن توضيح المقصود بهذا التعبير أو بهذا الاحتمال.

على ضوء مفهوم التعريف التجريبى للاحتمال يكون المقصود بالاحتمال $P[C \mid A, E]$ هو نسبة الحالات التى يقع فيها الحدث C من بين تلك الحالات التى يقع فيها كلا الحدثين E وA وبصورة أخرى يكون المقصود بالاحتمال $P[C \mid A, E]$ هو النسبة التى بسطها عدد المرات التى يقع فيها الحدث $(C\ A\ E)$ ومقامها عدد المرات التى يقع فيها الحدث $(A\ E)$ وبذلك يكون الاحتمال: $P[C \mid A, E] = \dfrac{P(C\,A\,E)}{P(A\,E)}$ والجانب الأيمن هو نفسه $P[C \mid A\,E]$ وعلى ذلك يمكن وضع التعريف التالى:

تعريف (1 ـ 22 ـ 1):

إذا كانت الأحداث A وE وC معرفة على فراغ احتمالى واحد فإن احتمال وقوع الحدث C، إذا علمنا أن الحدثان A وE قد وقعا فعلاً هو:

$$(1.\ 22.\ 2):\ P[C \mid A, E] = P[C \mid A\,E] = \frac{P[C\,A\,E]}{P[A\,E]}$$

وذلك إذا كان $P[A\,E] > 0$

أما إذا كان $P(A\,E) = 0$ فإن الاحتمال $P[C \mid A, E]$ يكون غير معرف.

ونظرية "بيز" تعالج حالة التجارب العشوائية التى يتم إجرائها على مراحل ـ مثال ذلك التجربة التى تتمثل فى إلقاء زهرة نرد أولاً ثم إلقاء قطعة عملة عدد من المرات يعادل عدد النقط التى تظهر على زهرة النرد ـ فلو كان الحدث E هو ظهور الصورة مرة واحدة ـ ونسأل السؤال التالى: إذا علمت أن الحدث E قد تحقق (أى الصورة ظهرت مرة واحدة) فما هو احتمال أن نتيجة زهرة الطاولة كانت الوجه الذى عليه نقطة واحدة (آس) ـ فلو رمزنا للآس بالرمز A_1 ـ فإن الاحتمال الذى نسأل عنه هو $P(A_1 \mid E)$ ـ نلاحظ أننا نسأل عن احتمال حدث من أحداث المرحلة الأولى (فى التجربة) بناء على معرفة نتيجة من نتائج المرحلة الثانية ـ وهذا شيء عكس الوضع الطبيعى ـ إذ أن الوضع الطبيعى هو أن نسأل عن حدث من أحداث المرحلة الثانية بناء على معرفة نتيجة (أو حدث) من نتائج المرحلة الأولى ـ أى أن السؤال الطبيعى يكون على النحو التالى: إذا كانت نتيجة زهرة الطاولة (المرحلة الأولى) هى الآس (A_1) فما هو احتمال الحصول على صورة (E) ـ هنا الإجابة تكون سهلة ومباشرة والإجابة هى $P(E \mid A_1) = \frac{1}{2}$ ـ لذلك فإن نظرية "بيز" تقدم الإجابة لذلك النوع الصعب من الأسئلة

الــذى يــنعكس مع الوضع الطبيعى أى من النوع $P(A_k \mid E)$ وتقدم الإجابة بدلالة الوضع الطبيعى $P(E \mid A_k)$ و $P(A_k)$ لجميع قيم k ــ لذلك فهى تعتبر نوع من الاستنباط العكسى.

(1 ــ 23) الاستقلال وعدم الاستقلال Independence and Dependence:

(1 ــ 23 ــ 1) استقلال حدثين:

إذا كــان لدينا حدثين B و A وكان الاحتمال $P(B \mid A)$ هو نفسه الاحتمال $P(B)$ أى أن احــتمال وقوع الحدث B لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث A ــ فمن الطبيعى أن نعتبر الحدث B مستقل عن الحدث A ــ وبذلك يكون الحدث B مستقل عن الحدث A إذا كان

$$P(B) = P(B \mid A) \;..... \quad (a)$$

وبالمثل يكون A مستقل عن B إذا كان:

$$P(A) = P(A \mid B) \;..... \quad (b)$$

ومــن العلاقتيــن الســابقتين (b)، (a) يمكن إعادة صياغة العلاقة (12 .19 .1) للاحتمال الشرطى عندما يكون B و A مستقلان فى الصورة التالية:

إذا كان A و B مستقلان يكون:

$$P(A\,B) = P(A) \cdot P(B) \;....... \quad (c)$$

من العلاقات السابقة (a), (b), (c) يمكن صياغة التعريف التالى:

تعريف (1 ــ 23 ــ 1) الحدثان المستقلان:

إذا كان B و A حدثان معرفان على فراغ احتمالى واحد. فإن الحدثان B و A يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، تحقق أى شرط من الشروط التالية:

$$(1.\,23.\,1):\begin{cases} (1)\; P(B \mid A) = P(B)\;,\;\; P(A) > 0 \\ (2)\; P(A \mid B) = P(A)\;,\;\; P(B) > 0 \\ (3)\; P(A\;B) = P(A)\,P(B) \end{cases}$$

أحياناً نقول أن الحدثان مستقلان إحصائياً وأحياناً نكتفى بكلمة مستقلان.

مــثال (1 ــ 23 ــ 1): كــيس به ثلاث كرات بيضاء وكرتان سوداء ــ سحبت كرتان من الكيس ــ فإذا كان الحدث A هو أن الكرة الأولى المسحوبة بيضاء والحدث B هو أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء ــ هل ترى أن الحدثان B وA مستقلان؟

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

(الحل)

أولاً: السحب مع الإعادة:

من البند (1 ــ 16 ــ 2) نرى أن:

حجم فراغ العينة $N(S)=5^2$

حجم فراغ الحدث A B $N(A\,B)=3^2$

$$\therefore P(A\,B)=\frac{3^2}{5^2}$$

كذلك $N(A)=3 \quad , \quad N(B)=3$

$$\therefore P(A)=\frac{3}{5} \quad , \quad P(B)=\frac{3}{5}$$

وهذا يوضح أن:

$$P(A\,B)=\frac{9}{25}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=P(A)P(B)$$

أى أن الحدثان B، A مستقلان.

ثانياً: السحب بدون إعادة:

نجد أن:

$$P(B\,|\,A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

فـــى حين أن: P(B) يمكن الحصول عليها من نتيجة (2 .20 .1) للاحتمال الكلى ــ حيث نجد أن:

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$$
$$= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$
$$\therefore P(B \mid A) \neq P(B)$$

أى أن الحدثان B، A غير مستقلان.

(1 ــ 24) استقلال الأحداث المتنافية:

أوضحنا فى العلاقة (1 .23 .1) أن الشرط اللازم والكافى لاستقلال الحدثان B وA هو أن يكون:

$$P(A\,B) = P(A)P(B).$$

واشـــترطنا أن $P(A) > 0$ و $P(B) > 0$. ونحـــاول الآن تطبيق هذا الشرط فى الحالة التى يكون فيها الحدثان A وB متنافيان:

فى حالة التنافى لا يمكن للحدثان A وB أن يقعا معاً أى أن $P(A\,B) = 0$ ــ لذلك لكى يكون الحدثان المتنافيان A وB مستقلان يجب أن يكون:

$$P(A\,B) = P(A)P(B) = 0$$

وهـــذا يتطلب أن يكون أحد الاحتمالين على الأقل يساوى الصفر ــ لأنه إذا كان احـــتمال كـــلٍ مـــن الحدثـــان المتنافـــيان A وB يختلف عن الصفر فلا يمكن أن يكون $P(A)P(B) = 0$ وبالـــتالى فـــلا يمكن أن يكونا مستقلان ــ لأنه فى هذه الحالة سيكون $P(A\,B) = 0$ فى حين أن $P(A)P(B) \neq 0$ أى أن:

$$P(A\,B) \neq P(A)P(B).$$

مـــثال (1 ــ 24 ــ 1): كيس يحتوى على 6 كرات متشابهة فى كل شىء عدا اللون منها 4 كرات بيضاء والباقى من لون آخر ــ سحبنا منه كرتان ــ فإذا كان الحدثان A وB هما:

الحدث A: كرة واحدة بالضبط من الكرتان المسحوبتان بيضاء.

والحدث B: الكرتان المسحوبتان بيضاوتان.

هل ترى أن الحدثان A و B مستقلان؟

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

(الحل)

الحدثان A و B متنافيان ــ لأنه لا يمكن وقوعهما معاً حيث لا يمكن أن تكون كرة واحدة بالضبط من الكرتين المسحوبتين بيضاء وفى نفس الوقت تكون الكرتين المسحوبتين بيضاوتين. إذن:

$$P(A\,B)=0$$

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة:

نفــرض أن الحدث C: هو أن الكرة الأولى المسحوبة بيضاء. والحدث D: هو أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء.

من نظرية (1 ــ 13 ــ 7) نجد أن احتمال الحصول على كرة واحدة بالضبط بيضاء هو:

$$P(A)=P(C)+P(D)-2P(C\,D) \qquad \text{(a)}$$

$$P(A)=\frac{4}{6}+\frac{4}{6}-2\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$P(B)=P(C\,D)=\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\therefore P(A)P(B)=\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

فى حين أن:

$$P(A\,B)=0$$

$$\therefore P(A\,B)\neq P(A)P(B)$$

إذن الحدثان A و B غير مستقلان.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة: نجد أن:

$$P(B) = P(C\,D) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

في حين أن $P(D)$ يمكن الحصول عليها من العلاقة (1. 20. 2) حيث نجد أن:

$$P(D) = P(C)\,P(D \mid C) + P(\overline{C})P(D \mid \overline{C})$$
$$= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

وباستخدام العلاقة (a) السابقة نجد أن:

$$P(A) = P(C) + P(D) - 2P(C\,D)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

وبما أن:

$$P(A) = \frac{8}{15} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{5}$$

في حين أن: $P(A\,B) = 0$

إذن الحدثان المتنافيان A و B غير مستقلان لأن:

$$P(A\,B) = 0 \neq P(A)P(B) = \frac{8}{15} \times \frac{2}{5}$$

(1 ــ 25) استقلال أكثر من حدثين:

نفــرض أن لديــنا ثلاث أحداث A, B , C معرفة على فراغ احتمالي واحد. فلكي يكــون الحــدث C مســتقل عن الحدثين A و B لابد أن لا يتأثر احتمال وقوعه بأي من الحدثين A و B كلٍ على حده أو كلاهما معاً أو حتى مكملاهما أو أي علاقة فيهما ــ لذلك يمكن وضع التعريف التالي:

تعــريف (1 ــ 25 ــ 1): الأحداث C و B و A المعرفة على فراغ احتمالى واحد يقال أنها مستقلة (أو مستقلة إحصائياً) إذا تحققت العلاقات التالية:

$$(1.25.1): \begin{cases} P(A\,B) = P(A)P(B) \\ P(A\,C) = P(A)P(C) \\ P(C\,B) = P(C)P(B) \\ P(A\,B\,C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

ونلاحــظ مــن الــتعريف السابق أن العلاقات الثلاثة الأولى التى توضح استقلال الأحــداث مثــنى مثــنى لا تتضــمن العلاقــة الــرابعة وبالتالى فإن الاستقلال الثنائى Pairwise independence للمتغيرات الثلاثة لا يعنى بالضرورة أن تكون المتغيرات الثلاثة مستقلة عن بعضها ــ والمثال التالى يوضح ذلك.

مــثال (1 ــ 25 ــ 1): تجربة عشوائية تتمثل فى سحب كرة من كيس به 4 كرات مــرقمة مــن 1 إلى 4 والأحداث C و B و A (معرفة على الفراغ الاحتمالى لهذه التجربة) هى:

$$A = \{1,2\}\ ,\ B = \{1,3\}\ ,\ C = \{1,4\}$$

هل ترى أن الأحداث الثلاثة C و B و A مستقلة؟

(الحل)

$$A\,B = A\,C = C\,B = \{1\}$$

$$\therefore P(A\,B) = P(A\,C) = P(C\,B) = \tfrac{1}{4}$$

كذلك

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

إذن

$$\tfrac{1}{4} = P(A\,B) = P(A)P(B) = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{4} = P(A\,C) = P(A)P(C) = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{4} = P(B\,C) = P(B)P(C) = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}$$

أى أن الأحداث الثلاثة مستقلة مثنى مثنى.

ولكن:

$$A\,B\,C = \{1\}$$
$$\therefore P(A\,B\,C) = \tfrac{1}{4}$$
$$\therefore \tfrac{1}{4} = P(A\,B\,C) \neq P(A)P(B)P(C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}$$

أى أن الأحــداث الثلاثة غير مستقلة ــ وهذا يؤكد أن استقلال الأحداث مثنى مثنى لا يعنى استقلالها.

يمكــن الآن اســتنباط شــروط أخرى لاستقلال الأحداث C وB وA مرادفه لتلك المقدمــة فــى تعــريف (1 ــ 25 ــ1) السابق ــ إذ يمكن استخدام العلاقات (1 .23 .1) لإيضاح أنه إذا كانت الأحداث C وB وA مستقلة ــ يكون:

$$P[C \mid A, B] = \frac{P[C\,A\,B]}{P[A\,B]}$$

بشرط أن $P[A\,B] > 0$

ومن العلاقات (1 .25 .1) يكون:

$$P[C \mid A, B] = \frac{P[C\,A\,B]}{P(A\,B)} = \frac{P(C)P(A)P(B)}{P(A)P(B)} = P(C)$$

وبالمثل:

$$P(C \mid A) = \frac{P(C\,A)}{P(A)} = \frac{P(C)P(A)}{P(A)} = P(C)$$

وكذلك:

$$P(C \mid B) = P(C)$$

وبذلك يمكن وضع الصيغة التالية المرادفة لاستقلال ثلاثة أحداث فى التعريف التالى:

تعــريف (1 ــ 25 ــ 2): تعتــبر الأحداث الثلاثة C وB وA مستقلة إذا تحققت العلاقات التالية:

$$(1.\,25.\,2):\begin{cases} P(A \mid B,C) = P(A \mid B) = P(A \mid C) = P(A) \\ P(B \mid A,C) = P(B \mid A) = P(B \mid C) = P(B) \\ P(C \mid A,B) = P(€ \mid A) = P(C \mid B) = P(C) \end{cases}$$

وذلك بشرط أن تكون احتمالات تحقق الأحداث C وB وA وB C وA C وA B كلها موجبة.

ملاحظـــة (1ــ 25 ــ 1): إذا كـــان الحدثان A وB المعرفان على فراغ احتمالى واحد مستقلان ــ يكون كل من الحدثان $\overline{B}$ وA مستقلان وكذلك B و $\overline{A}$ مستقلان وكذلك $\overline{B}$ و $\overline{A}$ مستقلان.

وذلك لأن:

$$\begin{aligned} P(A\,\overline{B}) &= P(A) - P(A\,B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

أى أنه إذا كان الحدثان A وB مستقلان ــ يكون الحدثان $\overline{B}$ وA مستقلان كذلك. ويمكـــن إثبات الباقى بطريقة مشابهة ــ كما يمكن تعميم شروط الاستقلال فى حالة n من الأحداث بتقديم التعريف التالى:

تعريف (1 ــ 25 ــ3): إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ معرفة على فراغ احتمالى واحد ــ فإن هذه الأحداث تكون مستقلة، إذا وفقط إذا كان:

$$(1.25.3):\quad \begin{cases} P(A_iA_J) = P(A_i)P(A_J)\;;\; i \neq J \\ P(A_iA_JA_k) = P(A_i)P(A_J)P(A_k) \\ \qquad i \neq J \quad J \neq k \quad i \neq k \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \end{cases}$$

بعد تعريف الأحداث المستقلة يمكن الآن إثبات بعض العلاقات الهامة.

إذا كانـــت الأحـــداث $A_1, \ldots, A_n$ أحداث مستقلة ومعرفة على فراغ احتمالى واحد يكون احتمال وقوع حدث واحد منها على الأقل هو:

$$(1.25.4):\quad P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$$

حيث أن $\overline{A}_i$ هو مكمل الحدث A_i .

وذلك لأن:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)$$

ومن قوانين دى مورجان نجد أن

$$\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$$

إذن:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n)$$

وبما أن الأحداث $A_1, \ldots, A_n$ مستقلة ــ إذن المكملات $\overline{A}, \ldots, \overline{A}_n$ مستقلة كذلك.

$$\therefore P(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$$

وهذا يثبت النتيجة (1. 25. 4) السابقة.

كذلك من النتيجة (1. 25. 4) يمكن الوصول إلى العلاقة (1. 25. 5) التالية وذلك إذا رمزنا لاحتمالات وقوع الأحداث $A_1, \ldots, A_n$ بالرموز:

$$P(A_i) = P_i \qquad ; i = 1, 2, \ldots, n$$

ولاحتمال عدم وقع أى من هذه الأحداث بالرمز P_0 ــ أى أن

$P_0 =$ ح (عدم وقوع أى من هذه الأحداث)

فإن:

$$(1.\ 25.\ 5):\ P_0 = \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i)$$

(1 ــ 26) المحاولات المتكررة المستقلة Repeated Independent Trials :

نـــتكلم الآن عـــن حالـــة تكرار تجربة عشوائية عدد من المرات بحيث أن نتيجة التجربة فى كل مرة لا تؤثر ولا تتأثر بنتيجتها فى أى مرة أخرى سابقة أو لاحقة ــ وهذه تعرف بالمحاولات العشوائية المتكررة المستقلة. والحالات الممكنة أو النتائج الممكنة لكل تجـــربة من هذه التجارب المتكررة المستقلة قد تكون حالتين أو أكثر ــ فإذا كانت النتائج الممكـــنة لكل تجربة نتيجتين فقط سميت التجربة «تجربة ذات وجهين أو ذات حدين». أما

إذا كانــت أكــثر من وجهين سميت التجربة «تجربة متعددة النواتج أو متعددة الأوجه». وسنتناول كلا النوعين كلٍ على حده مبتدئين بالتجارب ذات الوجهين.

(1 ــ 26 ــ 1) التجارب المستقلة ذات الحدين The Binomial Independent Trials:

(1 ــ 26 ــ 1 أ) محاولات برنوللى Bernoulli Trials:

فــى كثــير من التجارب العشوائية المستقلة قد تكون نتيجة التجربة إحدى نتيجتين تسمى إحداهما نجاح ونرمز له بالرمز s والأخرى فشل ونرمز له بالرمز f ــ ومثل هذه الــتجارب لها تطبيقات كثيرة ومفيدة من الناحية العملية ــ مثل فحص وحدات منتجة من منــتج معيــن بحيث تفحص كل وحدة بمفردها لمعرفة إذا ما كانت جيدة أم فاسدة فنتيجة الفحص هنا إحدى ناتجين ــ كذلك عند إطلاق عدة قذائف على هدف فإن كل قذيفة يمكن اعتــبارها تجــربة عشوائية مستقلة لها إحدى نتيجتين إما إصابة الهدف أو عدم الإصابة وغير ذلك الكثير من الأمثلة العملية. مثل هذه التجارب المستقلة التى لها نتيجتين ممكنتين فقــط نجــاح s وفشل f والتى تسمى محاولات برنوللى حيث نرمز عادة لاحتمال النجاح بالرمز P واحتمال الفشل بالرمز q حيث:

$$(1.26.1):\ P \geq 0 \quad , \quad P + q = 1$$

وبذلك يكون فراغ العينة لكل محاولة من محاولات برنوللى هو:

$$S_1 = \{s, f\}$$

أى أن فــراغ العيــنة S_1 مجموعة مكونة من عنصرين (أو من نقطتين) هما f، s ومعرف عليه دالة الاحتمال P[.] التى تحدد الاحتمالين:

$$P[\{s\}] = P \quad ، \quad P[\{f\}] = q$$

وبالتالى فإن فراغ العينة هنا محدود ولكنه لا يتكون من أحداث بسيطة متماثلة أى لا يمكــن تطبيق العلاقة (2 .14 .1) لتحديد احتمالات المجموعات الجزئية المختلفة للفراغ S_1. لــو تصــورنا أن محاولات برنوللى المستقلة يتم تكرارها n مرة ــ فإن فراغ العينة للتجربة المركبة (أى التى تتكون من تكرار المحاولة n مرة) يكون على الصورة التالية:

$$S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i = s \text{ or } f\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

فــراغ العيــنة S_n يتكون من عناصر عددها 2^n عنصراً كل عنصر يمكن تمثيله بنقطة فى الفراغ ذو النون بعداً $(x_1, \ldots, x_n)$ ولكن دالة الاحتمال المعرفة على هذا الفراغ لا تحــدد احــتمالات متســاوية لهذه النقط ــ أى أن الأحداث البسيطة $(x_1, \ldots, x_n)$ لا يمكن اعتــبارها أحــداث مــتماثلة وبالتالى لا يمكن تطبيق العلاقة (2 .14 .1) لتحديد احتمالات المجموعــات الجزئــية المختلفة للفراغ S_n، ولكن أى حدث بسيط يكون دائماً عبارة عن سلسلة مــن النتائج بعضها نجاح s وبعضها فشل f ــ فإذا كان عدد مرات النجاح k مرة

وعـــدد مــــــرات الفشل $(n-k)$ مرة وكلها مرات مستقلة فإن أى حدث بسيط وليكن مثلاً الحـــدث $A = s\,s\,f\,f\,s \ldots f\,s$ (وذلك باعتبار أن s و f تأخذ الترتيب الموضح) يكون احتمال تحقق مثل هذا الحدث يساوى $P^k\ q^{n-k}$ وذلك فى الـــ n محاولة. وتحقيق ذلك بسيط لأنه لـــو تصـــورنا أن المحاولات الأولى التى عددها k كانت كلها نجاح والباقى $(n-k)$ فشل تكون نتيجة المحاولات كلها كما يلى:

$$A = \underbrace{s\,s \ldots s}_{k\ \text{عددهم}}\ \underbrace{f\,f \ldots f}_{(n-k)\ \text{عددهم}}$$

$$\therefore P(A) = P(s\,s \ldots s\,f\,f \ldots . f)$$

ومن الاستقلال

$$P(A) = P(s)P(s)\ldots P(s)P(f)P(f)\ldots P(f)$$
$$= P\,P \ldots P\,q\,q \ldots q = P^k\ q^{n-k}$$

وبذلك يكون احتمال الحصول على مرات نجاح عددها k ومرات فشل عددها $(n-k)$ "بترتيب معين" "الترتيب السابق" هو:

$$(1.\ 26.\ 2):\ P(\overset{\text{k مرة نجاح}}{k\ \text{successes}}) = P^k\ q^{n-k}$$

والمقصود هنا بكلمة "ترتيب معين" هو الترتيب $s\,s \ldots s\,f\,f \ldots f$

وهـــو إحدى تراتيب الأحرف s التى عددها k والأحرف f التى عددها $(n-k)$ فى n من الأماكن حيث أنه يوجد فى هذه الحالة تراتيب مختلفة عددها $\binom{n}{k}$ ترتيب مختلف.

(1 ــ 26 ــ 1 ب) القانون الاحتمالى ذو الحدين The Binomial Probability Law:

احتمال الحصول على k مرة نجاح فى n من تجارب برنوللى المتكررة المستقلة:

دائماً فى تجارب برنوللى المتكررة المستقلة نهتم بعدد مرات النجاح ــ والحصول علـــى مـــرات نجاح عددها k معناه أن نتيجة المحاولات التى عددها n يكون منها k مرة نجاح (نعبر عنها بـــ k حرف s) و$(n-k)$ مرة فشل (نعبر عنها بـــ $(n-k)$ حرف f) ــ وعدد مرات النجاح k قد يكون $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. ولكن k مرة نجاح فى n من المحاولات المستقلة يمكن أن يحدث بعدة طرق ــ إحدى هذه الطرق أن تكون المحاولات الأولى التى عددها k كلها نجاح والمحاولات التالية التى عددها $(n-k)$ كلها فشل وهذه الحالة احتمال حدوثها يساوى $P^k\ q^{(n-k)}$ كما أوضحنا فى العلاقة (1. 26. 2) السابقة ــ ولكن الطرق

المخـــتلفة الـــتى قـــد يحدث بها k مرة نجاح و(n − k) مرة فشل تساوى تماماً عدد طرق اختـــيار k مـــن الأحرف من بين n من هذه الأحرف وهذا يساوى $\binom{n}{k}$ طريقة مختلفة واحـــتمال كـــل منها يساوى $P^k\ q^{(n-k)}$ وبالتالى يكون احتمال "الحصول على k مرة نجاح فى n محاولة" يساوى $\binom{n}{k}P^k\ q^{(n-k)}$. وعلى ذلك يمكن تقديم القانون الاحتمالى ذو الحدين بالتعريف التالى:

تعريف (1 ــ 26 ــ 1) القانون الاحتمالى ذو الحدين:

احتمال الحصول على k مرة نجاح فى n من محاولات برنوللى المتكررة المستقلة إذا كان احتمال النجاح فى كل محاولة هو P واحتمال الفشل $q = 1 - p$ هو :

$$(1.\ 26.\ 3):\ b(k;n,p) = \binom{n}{k}P^k\, q^{(n-k)} \qquad ,k = 0,1,2,\ldots,n$$

مـــن القانون السابق يكون احتمال عدم الحصول على أى مرة نجاح يساوى q^n واحـتمال الحصـــول علـــى مـــرة نجاح واحدة على الأقل يساوى $(1-q^n)$. والقانون الاحـــتمالى ذو الحديـــن يكتســـب تســـميته من القانون الرياضى ذو الحدين حيث نجد أن الاحـــتمال b(k; n, p) هـــو الحد العام فى مفكوك ذو الحدين $[P+q]^n$ ــ لذلك يكون من الواضح أن:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} P^k\ q^{(n-k)} = [P+q]^n = 1$$

والقـــانون الاحـــتمالى ذو الحدين من أهم القوانين الاحتمالية المستخدمة فى مجال نظـــرية الاحتمالات وفى كثير من التطبيقات العملية، ولأهمية هذا القانون تم عمل جداول إحصـــائية تبيـــن قيمة الاحتمال b(k; n, p) لبعض قيم k, n, p المختارة المناسبة لكثير من التطبيقات العملية. ويوجد فى نهاية الكتاب جدول مختصر لقيمb(k; n, p) لبعض قيم p بين p = 0.01 حتى p = 0.5 وقيم n = 2, 3, 4, ..., 10 هو الجدول رقم (1) بنهاية الجزء الثانى ويجـــب ملاحظة أن قيم b(k; n, p) عندما p = 0.5 يمكن الحصول عليها من نفس الجدول باستخدام العلاقة:

$$(1.\ 26.\ 4): b(k;n,p) = b(n-k;n,1-p)$$

والعلاقـــة الســـابقة يمكن إثباتها من القانـــون (3 .26 .1) باســـتخدام العلاقـــة التاليـــة $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

مــثال (1 ــ 26 ــ 1): إذا افترضـــنا أن نســبة الذكور ونسبة الإناث متساوية فى مجموعة من الأسر فما هو احتمال أن تجد 3 أولاد و 3 بنات فى أسرة بها 6 أطفال؟

(الحل)

لو رمزنا للولد بالرمز b والبنت بالرمز g يكون

$$P(g) = P(b) = \tfrac{1}{2}$$

ويكــون المطلــوب هو احتمال الحصول على 3 مرات نجاح (3 ذكور مثلاً) عند تكرار تجربة ذات حدين مرات عددها $n = 6$ علماً بأن $P = \tfrac{1}{2}$ هو:

$$b\left(3; 6, \tfrac{1}{2}\right) = \binom{6}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \tfrac{5}{16}$$

مثال: (1 ــ 26 ــ 2): فى سلسلة من الأعداد العشوائية يتم اختيار عدد من الأعداد $0, 1, 2, \ldots, 9$ فى كل مرة. كم تتوقع أن يكون طول هذه السلسلة الذى يجعل احتمال ظهور العدد 7 يساوى $\tfrac{9}{10}$ على الأقل؟

(الحل)

الأعداد من 0 حتى 9 عددهم 10 واحتمال اختيار أى عدد منها يساوى $\tfrac{1}{10}$.

فى كل محاولة اختيار لو اعتبرنا ظهور العدد 7 يمثل النجاح ونرمز له بالرمز (s) وعــدم ظهــور الســبعة يمثل الفشل (f) إذن سلسلة المحاولات تمثل سلسلة من تجارب بــرنوللى المســتقلة التى احتمال النجاح فيها $P = P(\{s\}) = \tfrac{1}{10}$ واحتمال الفشل $q = \tfrac{9}{10}$ وعــدد المحاولات n وبذلك يكون احتمال ظهور العدد 7 فى هذه السلسلة مرات عددها k هو:

$$P(k) = \binom{n}{k}(0.1)^k\,(0.9)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

والاحــتمال المطلوب هو: كم عدد المحاولات n التى تجعل احتمال ظهور العدد 7 ≤ 0.9 واحتمال ظهور العدد 7 هو احتمال أن يظهر العدد 7 مرة واحدة على الأقل أى المطلوب هو:

ح (ظهور العدد 7 مرة واحدة على الأقل)

= 1 − ح (عدم ظهور العدد 7 فى المحاولات التى عددها n)

وبتطبيق العلاقة (1: 25. 4) نجد أن:

ح (ظهور العدد 7 مرة واحدة على الأقل)

$$= 1 - (0.9)^n$$

إذن المطلوب هو قيمة n التى تجعل:

$$1 - (0.9)^n \geq 0.9$$
$$0.1 \geq (0.9)^n$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$-1 \geq n(-0.04575491)$$
$$n \geq \frac{1}{0.04575491}$$
$$n \geq 22$$

إذن نتوقع أن يكون طول هذه السلسلة أكبر من 22 عدد لكى يكون احتمال ظهور العدد 7 يساوى 0.9 على الأقل.

مثال (1 ــ 26 ــ 3): إذا كان احتمال إصابة هدف ما يساوى $\frac{1}{5}$ ــ فإذا أطلق على هذا الهدف عشرة طلقات مستقلة فأوجد:

(أ) احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل.

(ب) احــتمال إصـــابة الهدف مرتين على الأقل إذا كان معلوماً لدينا أنه تم إصابته مرة واحدة على الأقل.

(الحل)

هذا المثال يتبع توزيع ذو الحدين عندما تكون:

$$P = \frac{1}{5} \quad , \quad q = \frac{4}{5} \quad , \quad n = 10$$

(أ) ح (الإصابة مرتين على الأقل) =

1 – ح (عدم الإصابة) – ح (الإصابة مرة واحدة)

$$=1-P_0-P_1$$

$$=1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^{10}-\binom{10}{1}\left(\tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)^{9}$$

$$=0.6242$$

(ب) نفرض أن:

الحدث E: إصابة الهدف مرتين على الأقل

الحدث A: إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل

إذن $E\subset A$ و $EA=E$

والمطلوب حساب الاحتمال $P(E\mid A)$

$$\therefore P(E\mid A)=\frac{P(EA)}{P(A)}=\frac{P(E)}{P(A)}$$

ومن (أ) نعلم أن: $P(E)=0.6242$

$$\begin{aligned}P(A)&=1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^{10}\\&=1-0.107374\\&=0.893\end{aligned}$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(E\mid A)=\frac{0.6242}{0.893}=0.6993$$

(1 ــ 27) المحاولات المتكررة غير المستقلة Repeated Dependent Trials :

القــانون الاحتمالى الهايبرجيومترى (الهندسى الزائد) The Hypergeometric Probability Law:

يمكــن القــول أن القانون الاحتمالى ذو الحدين السابق تقديمه بالعلاقة (3 .26 .1) يطــبق فى حالة سحب عينة حجمها n مفردة مع الإحلال من كيس يحتوى على M مفردة

منها m مفردة معينة (أو لها خاصية معينة) ـ ويعطى احتمال أن تشمل هذه العينة على k مفـــردة معيـــنة أو k مرة نجاح إذا اعتبرنا أن الحصول على المفردة المعينة نجاح وعدم الحصـــول عليها فشل. ونقدم الآن الحالة التى يكون فيها سحب العينة بدون إحلال ـ أى أن المفـــردة المسحوبة لا تعاد إلى الكيس قبل سحب المفردة التالية ـ وهذه الحالة يطبق فيها قانون احتمالى يختلف عن القانون ذو الحدين ـ هذا القانون نسميه بالقانون الاحتمالى الهايبرجيومترى ـ ونقدمه فيما يلى:

نفرض أن لدينا كيس به M مفردة منها m مفردة معينة (أو لها خاصية معينة) ـ حيــث $m = PM$ و $0 \le P \le 1$ ـ وأن التجربة العشوائية تتكون من n محاولة متكررة كل محاولـــة عبارة عن سحب مفردة من الكيس بدون إحلال ـ أى أن المفردة المسحوبة لا تعاد إلى الكيس قبل سحب المفردة التالية ـ وهذه المحاولات هى التى نسميها بالمحاولات المتكررة غير المستقلة. والمطلوب هو إيجاد احتمال أن تشمل العينة التى حجمها n مفردة علـــى k مفـــردة معينة. فى هذه الحالة نجد أن فراغ العينة S للتجربة العشوائية المركبة المكونـــة من المحاولات التى عددها n يمكن إيجاده باستخدام العلاقة (1. 16. 1) حيث نجد أن حجم فراغ العينة فى هذه الحالة هو:

$$N(S) = M_{(n)} = M\ (M-1)\cdots(M-n+1)$$

حالة متماثلة. وإذا اعتبرنا أن الحصول على مفردة من هذه المفردات المعينة يعتبر نجاح، فيمكن طبقاً للعلاقة (1. 16. 1) إثبات أن عدد الحالات المواتية للحصول على k مرة نجاح من بين المحاولات التى عددها n إذا كانت مرات النجاح هذه ذات ترتيب معين يساوى:

$$m_{(k)} \cdot (M-m)_{(n-k)} = m(m-1)....(m-k+1)\times$$
$$(M-m)(M-m-1)\ldots(M-m-n+k+1)$$

وبذلك يكون عدد الحالات المواتية للحصول على k مرة نجاح من بين المحاولات المتكررة غير المستقلة التى عددها n ـ دون اشتراط ترتيب معين ـ هو:

$$\binom{n}{k} m_{(k)}\ (M-m)_{(n-k)}$$

ويكـــون احتمال الحصول على مرات نجاح عددها k مرة من بين n محاولة غير مســـتقلة (نتيجة كل منها نجاح أو فشل) طبقاً للعلاقة (2 .14 .1) هو عدد الحالات المواتية للحـــدث مقسوماً على عدد الحالات الممكنة للتجربة المركبة ـ وهو ما نعبر عنه رمزياً كما يلى:

$$(1.\ 27.\ 1):\ h(k;M,m,n)=\frac{1}{M_{(n)}}\cdot\binom{n}{k}m_{(k)}\,(M-m)_{(n-k)}$$

والعلاقة السابقة يمكن وضعها فى الصورة التالية:

$$h(k;M,m,n)=\frac{1}{\binom{M}{n}}\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}$$

وبذلك يمكن تقديم القانون الهايبرجيومترى فى التعريف التالى:

القانون الاحتمالى الهايبرجيومترى (الهندسى الزائد):

تعريف (1 ــ 27 ــ 1):

احــتمال الحصول على k مفردة معينة (k مرة نجاح) فى n من المحاولات غير المستقلة $(k \le n)$ التى تكون نتيجة كل محاولة منها عبارة عن سحب مفردة من كيس به M مفردة منها m مفردة معينة ــ (حيث $m = PM$ و $0 \,\square\, P \,\square 1$)

عندما يكون السحب بدون إحلال هو:

$$(1.\ 27.\ 2):\ h(k;M,m,n)=\frac{1}{\binom{M}{n}}\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}$$

$$,0\le k\le min(n,m);\ ;0\le n-k\le M-m$$

مثال (1 ــ 27 ــ 1): كيس يحتوى على 6 كرات متشابهة فى كل شىء عدا اللون مــنها 4 كــرات بيضاء والباقى من لون آخر ــ عند سحب عينة من الكيس مكونة من 3 كرات ــ بدون إعادة ــ ما هو احتمال أن تشتمل هذه العينة على كرتان بيضاء؟

(الحل)

طبقاً للقانون الهايبرجيومترى يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$h(2;6,4,3)=\frac{1}{\binom{6}{3}}\binom{4}{2}\binom{6-4}{3-2}=\frac{3!}{6!\,3!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}\cdot 2=\frac{1}{60}.$$

(1 ـ 28) القانون الاحتمالى ذو الحدين كتقريب للقانون الهايبرجيومترى:

مما سبق يتضح أن القانون الاحتمالى الهايبرجيومترى المعطى بالعلاقة (1. 27. 2) مشتق أصلاً من العلاقة (1. 27. 1) وبالتالى يمكن الرجوع إلى العلاقة (1. 27. 1) ووضعها فى الصورة التالية:

$$h(k;M,m,n)=\binom{n}{k}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1)}{M(M-1)\ldots\ldots(M-k+1)}$$

$$\times\frac{(M-m)(M-m-1)\ldots.(M-m-n+k+1)}{(M-k)(M-k-1)\ldots.(M-n+1)}.$$

$$=\binom{n}{k}\frac{m^k\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots.\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{M^n\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{2}{M}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{M}\right)}$$

$$\times\frac{(M-m)^{(n-k)}\left(1-\frac{1}{M-m}\right)\left(1-\frac{2}{M-m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k-1}{M-m}\right)}{\left(1-\frac{k}{M-m}\right)\left(1-\frac{k+1}{M-m}\right)\ldots..\left(1-\frac{n-1}{M-m}\right)}$$

وبوضع $P=\dfrac{m}{M}$ ، $q=\dfrac{M-m}{M}=1-P$

يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$(1.28.1):\ h(k;M,m,n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$\times\left[\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{M-m}\right)\ldots.\left(1-\frac{n-k-1}{M-n}\right)}{\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{2}{M}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{M}\right)\left(1-\frac{k}{M-m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{M-m}\right)}\right]$$

حيث $q=1-P$ ، $P=\dfrac{m}{M}$

فإذا كانت الكميات $\dfrac{n}{M},\dfrac{n-k}{M-m},\dfrac{k}{m}$ كلها كميات صغيرة فإن الكمية الموجودة داخل القوس المربع فى العلاقة السابقة تؤول إلى الواحد الصحيح ويصبح الاحتمال الهايبرجيومترى h(k; M, m, n) هو نفسه الاحتمال b(k; n, p) ذات الحدين، وبذلك يمكن القول أنه إذا تحقق الشرط التالى:

(1. 28. 2):

$$\left[\text{إذا كانت الكميات } \frac{k}{m}, \frac{n-k}{M-m}, \frac{n}{M} \text{ كلها كميات صغيرة (لتكن أقل من 0.1 تقريبا)}.\right]$$

يكون القانون الاحتمالى الهايبرجيومترى المعطى بالعلاقـــة (2 .27 .1) يســـاوى تقريباً القانون الاحتمالى ذو الحدين المعطى بالعلاقة (3 .26 .1) أى أن:

$$(1.28.3):\ h(k; M, m, n) \approx b(k; n, p).$$

حيث $P = \frac{m}{M}$.

والتقريب المعطى بالعلاقة السابقة يمكننا من استخدام جداول التوزيع ذو الحدين فى حساب الاحتمالات الخاصة بالقانون الهايبرجيومترى فى حالة السحب بدون إعادة أى فى حالة التجارب المتكررة غير المستقلة.

مثال (1 ــ 28 ــ 1): كيس به 30 كرة متشابهة فى كل شىء عدا اللــون ــ منهــا كرتان بيضاوتان والكرات الباقية كلها سوداء. عند سحب ثلاث كرات من الكيس ما هــو احتمال أن تكون بينها كرة واحدة بيضاء؟

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

ثالثاً: أوجد الفرق بين الاحتمالين فى أولاً وثانياً ــ وهل ترى مــن ذلــك أن اســتخدام القانون ذو الحدين كتقريب للقانون الهايبرجيومترى فى هــذه الحالــة يكــون ذو جدوى؟

(الحل)

أولاً: فى حالة السحب مع الإعادة نطبق القانون ذو الحدين المعطى بالعلاقــة (3 .26 .1) حيث:

$$P = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15} \quad , \quad q = \tfrac{14}{15} \quad , \quad n = 3 \quad , \quad k = 1$$

فإذا كان الحدث E هو: أن تكون كرة واحدة بيضاء.

$$\therefore P(E) = b\left(1; 3, \tfrac{1}{15}\right)$$

$$= \binom{3}{1}\left(\tfrac{1}{15}\right)\left(\tfrac{14}{15}\right)^2 = 0.1742$$

ثانياً: في حالة السحب بدون إعادة نطبق القانون الهـايبرجيومترى المعطـى بالعلاقـة (1. 27. 2) حيث نجد أن:

$$P(E) = h(1; 30, 2, 3)$$

$$P(E) = \binom{2}{1}\binom{28}{2} \Big/ \binom{30}{3} = 0.1862$$

ثالثاً: الفرق بين الاحتمالين في أولاً وثانياً يساوى تقريباً 0.01 وبقسمة هذا الفرق علـى الاحتمال P(E) المحسوب باستخدام القانون الهايبرجيومترى فى ثانياً نجد أن هـذه النسبة تساوى تقريباً 0.05.

أى أننا عندما نستخدم القانون ذو الحدين كتقريب للقانون الهايبرجيومترى فنكـون معرضين لخطأ يعادل تقريباً 5% من قيمة الاحتمال نفسه ــ وهذا الخطأ يمكن التغاضـى عنه في مقابل سهولة حساب الاحتمال وخاصة فى الحالات التـى يكـون فيهـا حسـاب الاحتمال الهايبرجيومترى صعب فى حين أن جداول القانون ذو الحدين تقدم لنا النتيجة فى سهولة ويسر.

(1 ــ 29) القانون الاحتمالى البواسونى Poisson Probability Law:

(1 ــ 29 ــ 1): هو قانون احتمالى قدمه العالم الفرنسى الشهير "بواسون" وسمى باسمه ويمكن تعريفه كما يلى:

تعريف (1 ــ 29 ــ 1): (القانون الاحتمالى البواسونى)

أى تجربة عشوائية يتكون فيها فراغ العينة S من مجموعة الأعداد الصـحيحة غير السالبة:

$$S = \{0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$$

ومعرف عليها دالة الاحتمال P(.) بالصيغة التالية:

$$(1.\ 29.\ 1):\ P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad ; \lambda > 0$$

حيث:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

يقال أن هذه التجربة تتبع قانون بواسون الاحتمالى بمعلمه λ.

(1 ــ 29 ــ 2) القانون البواسونى كتقريب للقانون ذات الحدين:

فى كثير من الحالات التطبيقية التى نتعامل فيها مع تجارب برنوللى المتكررة المستقلة قد تكون عدد المحاولات n كبيرة إلى حد ما واحتمال النجاح P صغيراً بحيث تكون الكمية n p كمية محدودة. نرمز لهذه الكمية بالرمز λ:

$$(1.\,29.\,2):\ n\,p = \lambda$$

حيث $\lambda \geq 0$ (لأن كلٍ من n، p كمية موجبة)

والكمية λ كمية محدودة بالرغم من أن n كبيرة وp صغيرة ونعلم أنه عندما تكون n كبيرة، p صغيرة يكون حساب الاحتمال ذو الحدين b(k; n, p) مرهقاً جداً ــ لذلك نقدم التقريب التالى الذى قدمه العالم الشهير بواسون الذى أثبت أنه عندما تكون n كبيرة وp صغيرة بحيث تكون n p كمية محدودة يمكن استخدام القانون البواسونى كتقريب للقانون الاحتمالى ذو الحدين إذ أنه فى مثل هذه الحالة يمكن إثبات أن العلاقة التالية صحيحة:

$$(1.\,29.\,3):\ b(k;n,p) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

حيث $\lambda = n\,p$ وذلك لجميع قيم .... $k = 0, 1, 2,$ و $b(k;n,p)$ هو القانون الاحتمالى ذو الحدين المعطى بالعلاقة (1. 26. 3).

ويمكن إثبات ذلك كما يلى:

بوضع $n\,p = \lambda$ (أى $p = \frac{\lambda}{n}$) فى القانون ذو الحدين (1. 26. 3) نجد أن:

$$b(k;n,p) = \binom{n}{k}\left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

وبكتابة مفكوك $\binom{n}{k}$ وأخذ نهاية طرفى العلاقة السابقة عندما $n \to \infty$ (مع اعتبار أن λ = n p تظل كمية محدودة وذلك لصغر p) يمكن الوصول إلى العلاقة التالية:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b(k;n,p) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \tfrac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\ &\quad\times\frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{n^k}\end{aligned}$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b(k;n,p)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (3 .29 .1).

والتقريب السابق يمكن استخدامه عملياً إذا كانت $p \le 0.1$.

مثال (1 ــ 29 ــ 1): عند إلقاء 6 زهرات نرد متزنة مرة واحدة أوجد:

(أ) احتمال الحصول على الآس مرة واحدة على الأقل.

(ب) احتمال الحصول على الآس مرة واحدة بالضبط.

(جـ) احتمال الحصول على الآس مرتين بالضبط.

(د) قارن الاحتمالات فى أ، ب، جـ بتقريب بواسون لكل منها.

(الحل)

التجربة تمثل 6 محاولات مستقلة من محاولات برنوللى ــ كل محاولة تمثلها زهرة نرد ــ وكل محاولة لها إحدى نتيجتين، نجاح أو فشل، النجاح هو الحصول على الآس ولنرمز لها بالرمز s والفشل هو عدم الحصول على الآس ولنرمز له بالرمز f وبالتالى يكون احتمال النجاح هو $P(\{s\})=\frac{1}{6}$ واحتمال الفشل هو $P(\{f\})=\frac{5}{6}$، وعدد المحاولات $n=6$.

(أ) نفرض أن الحدث A هو: الحصول على الآس مرة واحدة على الأقل.

$$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^6=0.6651$$

(ب) نفرض أن الحدث B هو: الحصول على الآس مرة واحدة بالضبط

$$\therefore P(B)=\binom{6}{1}\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^5=0.40188$$

(جـ) نفرض أن الحدث C هو: الحصول على الآس مرتين بالضبط

$$\therefore P(C)=\binom{6}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{5}{6}\right)^4=0.2009$$

(د) تقريــبات بواسون للاحتمالات السابقة نحصل عليها من العلاقة (3 .29 .1) وذلك كما يلى:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-b(0;n,p)$$

حيث $b(0;n,p)$ هى احتمال عدم الحصول على الآس طبقاً لقانون ذى الحدين.

نضع $\lambda=n\,p=6(\tfrac{1}{6})=1$

$$\therefore P(A)\simeq 1-e^{-1}=0.6321$$

كذلك:

$$P(B)\simeq b(1;n,p)=e^{-1}=0.3679$$

و

$$P(C)\simeq b(2;n,p)=\frac{e^{-1}}{2}=0.1839$$

ويمكن إجراء المقارنة كما يلى:

	P(C)	P(B)	P(A)
القيمة الحقيقة	0.2009	0.40188	0.6651
تقريب بواسون	0.1839	0.3679	0.6321

(1 ــ 30) التجارب المتكررة المستقلة المتعددة النتائج The Multinomial Repeated Independent Trials:

تكلمــنا فــى البند (1 ــ 26 ــ 1) عن التجارب (أو المحاولات) المتكررة المستقلة الــتى مــن نوع محاولات برنوللى وهى تتميز بأن كل محاولة لها إحدى ناتجين ــ لذلك تســمى محاولـــة أو تجــربة ذات حدين ــ ولكن كثيراً ما تكون المحاولات أو التجارب المــتكررة المستقلة كل تجربة لها أكثر من وجهين أو أكثر من ناتجين ــ وتسمى التجربة فــى هــذه الحالـــة بالتجربة متعددة الأوجه أو المتعددة النواتج ــ مثال ذلك إذا كانت فى

المحـــاولات المتكررة المستقلة كل محاولة عبارة عن إلقاء زهرة نرد متزنة ـ هنا تكون كـــل محاولـــة لهـــا 6 نتائج ممكنة أى تعتبر محاولة ذات ستة أوجه ـ وعند تكرار هذه المحاولـــة n مرة يكون اهتمامنا منصب على معرفة احتمال ظهور الوجه الأول k_1 مرة والوجـــه الـــثانى k_2 مـــرة ... والوجـــه الســـادس k_6 مـــرة بحيـــث يكـــون $k_1 + k_2 + \cdots + k_6 = n$ والقانون العام الذى يمكن به حساب مثل هذا الاحتمال يسمى بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود والذى نقدمه فيما يلى:

(1 ـ 30 ـ 1) القانون الاحتمالى المتعدد الحدود The Multinomial Probability Law:

نفـــرض أن لدينا تجربة عشوائية تتكون من عدة محاولات متكررة مستقلة عددها n محاولةٍ وكل محاولة لها نتيجة واحدة فقط من r من النتائج الممكنة الشاملة المتنافية (أى ذات r وجهـــا) حيـــث r عـــدد صحيح أكبر من 2 وبذلك يكون فراغ العينة لأى محاولة منفردة من هذه المحاولات (إذا رمزنا للأوجه المختلفة بالرموز $s_1, ..., s_r$) هو:

$$T = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$$

وفـــى أى محاولة نفرض أن احتمال أن تكون نتيجة المحاولة هى الوجه s_k هو P_k حيث $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = 1$ أى أنـــه يوجـــد r من الأعداد الحقيقية هى $P_1, P_2, ..., P_r$ تحقق العلاقة التالية:

$$(1.\ 30.\ 1): \begin{cases} P_1 + P_2 + \cdots + P_r = 1 \\ P_k = P[\{s_k\}] \quad , \quad 0 < P_k < 1 \\ \quad k = 1, 2, 3, \ldots, r \end{cases}$$

فإذا كانت S هى فراغ العينة للتجربة المكونة من n محاولة مستقلة من المحاولات السابقة التى نتيجة كلٍ منها T فإن S تكون هى المجموعة التالية:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i = s_1 \text{ or } s_2 \text{ or} \ldots \text{or } s_r\}$$

لجميع قيم $i = 1, 2, ..., n$

أى أن S تـــتكون مـــن r^n حـــدث بســـيط ـ فـــإذا كان عدد مرات ظهور الأوجه $s_1, s_2, ..., s_r$ فى الحدث البسيط المفرد $(x_1, ..., x_n)$ هو $k_1, k_2, ..., k_r$ على الترتيب حيث $k_1 + ... + k_r = n$ فإن احتمال تحقق مثل هذا الحدث يكون:

$$P[\{x_1, \ldots, x_n\}] = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots . P_r^{k_r}$$

ولكن عدد الأحداث البسيطة التى يظهر فيها الوجه s_1 مرات عددها k_1 مرة و ... والوجـــه s_r مـــرات عددها k_r مرة تساوى تماماً عدد طرق تقسيم n من الأشياء إلى r من المجموعـــات ـ تحتوى المجموعة الأولى على k_1 شيئا متشابهاً من هذه الأشياء والثانية

على k_2 شيئاً متشابهاً من الأشياء وهكذا حتى المجموعة r تحتوى على k_r شيئاً متشابهاً من هذه الأشياء وبحيث أن $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ ــ وعدد طرق التقسيم هذه تساوى:

$$(1.\ 30.\ 2):\ \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1!\ k_2! \ldots . k_r!}$$

وبالـــتالى يكون احتمال الحصول على الوجه الأول k_1 مرة والوجه الثانى k_2 مرة وهكذا حتى الوجه r مرات عددها k_r مرة يساوى:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} P_1^{k_1}\ P_2^{k_2} \ldots . P_r^{k_r}$$

وبناء على ذلك يمكن تقديم القانون الاحتمالى المتعدد الحدود بالتعريف التالى:

تعريف (1 ــ 30 ــ 1) القانون الاحتمالى المتعدد الحدود:

فـــى n مـــن المحاولات العشوائية المتكررة المستقلة إذا كانت نتيجة كل محاولة عـــبارة عن وجه واحد من الأوجه المتنافية $s_1, \ldots, s_r$ التى عددها r وجهاً ــ فإن احتمال ظهـــور الوجـــه الأول (s_1) k_1 مـــرة والوجه الثانى (s_2) k_2 مرة و .... والوجه الرائى (s_r) k_r مرة ــ حيث $k_1, \ldots, k_r$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق المعادلة

$$k_1 + \cdots + k_r = n$$

هو:

$$(1.\ 30.\ 3):\ P(k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} P_1^{k_1} \ldots P_r^{k_r}$$

حيث P_J هو احتمال ظهور الوجه s_J فى أى محاولة منفردة و $P_1 + \cdots + P_r = 1$

والقانون السابق يسمى بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود لأنه هو نفسه الحد العام فى المفكوك المتعدد الحدود $[P_1 + \cdots + P_r]^n$ على شكل حدود فى $P_1\ P_2 \ldots P_r$.

عـــندما $r = 2$ يخـــتزل القانون السابق إلى القانون الاحتمالى ذو الحدين الذى فيه $q = P_2$ ، $P = P_1$ و $k = k_1$ ، $n - k = k_2$.

ذكـــرنا أن العلاقـــة (1. 30. 3) هى الحد العام فى مفكوك $[P_1 + \cdots + P_r]^n$ وهذا يوصـــلنا إلـــى العلاقـــة الهامة التالية الخاصة بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود المعطى بالعلاقة (1. 30. 3) والتى توضح أن:

$$(1.30.4): \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\cdots\sum_{k_r=0}^{(n-k_1-\cdots-k_{r-1})}\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}P_1^{k_1}\ldots P_r^{k_r}$$

$$=[P_1+\cdots+P_r]^n=1$$

حيث $k_1, \ldots, k_r$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة $k_1+\cdots+k_r=n$

مثال (1 ـ 30 ـ 1): عند إلقاء إحدى وعشرون زهرة نرد متزنة مرة واحدة ـ ما هو احتمال الحصول على الوجه الأول مرة واحدة والوجه الثانى مرتين والثالث ثلاث مرات والرابع أربع مرات والخامس خمسة مرات والوجه السادس ستة مرات؟

(الحل)

نرمز للأوجه الستة بالرموز $s_1, \ldots, s_6$ حيث احتمال كل وجه منها فى كل رميـــة لزهرة نرد منفردة يساوى $(\frac{1}{6})$ أى أن:

$$P_1=P_2=\cdots=P_6=\tfrac{1}{6}$$

وطبقاً للقانون الاحتمالى المتعدد الحدود (3 .30 .1) يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(1,2,3,\ldots,6)=\frac{(21)!}{1!\,2!\ldots 6!}(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{6})^2\ldots(\tfrac{1}{6})^6$$

$$=0.0000936$$

ملاحظة (1 ـ 30 ـ 1):

يوجد تطبيق إحصائى للقانون الاحتمالى المتعدد الحدود ـ يتمثل فى حالة وجود مجتمع محدود مكون من N مفردة ومقسم إلى r من الطبقات المختلفة هـى $E_1, \ldots, E_r$ حيـث تتكـون الطبقـة E_J مـن NP_J مفـردة لجميـع قـيم $J=1, 2, \ldots, r$ حيـث $NP_1+\ldots+NP_r=N$ (أى أن $P_1+\ldots+P_r=1$) ـ عند سحب عينة حجمها n مفردة (مع الإعادة) من هذا المجتمع فإن احتمال أن تشتمل هذه العينة على k_1 مفردة من الطبقـة الأولى وk_2 مفردة من الطبقة الثانية و ... و k_r مفردة من الطبقة رقم r حيث $k_1+\ldots+k_r=n$ يمكن الحصول عليه باستخدام القانون الاحتمالى المتعدد الحدود (3 .30 .1) حيث أن P_J هو احتمال أن مفردة مسحوبة من المجتمع تكون من الطبقة E_J هو:

$$P_J=\frac{NP_J}{N}\quad,\quad J=1,2,\ldots,r.$$

ملاحظة (1 ـــ 30 ـــ 2): عندما تكون n كبيـــرة و $n\,p_J = \lambda_J$ كميـــة محـــدودة لجميع قيم $J = 1, 2, ..., r - 1$ يمكن إثبات أن القانون الاحتمـــالى المتعـــدد الحـــدود المعطى بالعلاقة (1. 30. 3) يساوى تقريباً

$$(1.\,30.\,5):\; e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1})}\,\frac{\lambda_1^{k_1}\,\lambda_2^{k_2}\cdots\lambda_{r-1}^{k_{r-1}}}{k_1!\,k_2!\,\ldots k_{r-1}!}$$

كما يمكن إثبات أن مجموع حدود القانون السابق يساوى الواحد الصحيح.

والقـــانون الســـابق يســـمى بتوزيـــع بواســـون المتعـــدد. Multiple Poisson Distribution. أى أنه يمكن استخدام توزيع بواسون المتعدد كتقريب للقانون الاحتمالى المتعدد الحدود. انظر تمرين (1 ـــ 82).

بعد تقديم التعريف الحديث للاحتمال ـــ التعريف (1 ـــ 13 ـــ 1) ـــ ذكرنا أنه لا يحدد كيفية حساب احتمال وقوع حدث معين ولكن من خصائص هذا التعريف ومن طبيعة التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب احتمال وقوع الحدث، وأوضحنا ذلك فى البند (1 ـــ 14) بالنسبة للتجارب العشوائية التى يكون فيها فراغ العينة محدود سواء كان مكوناً من أحداث بسيطة متماثلة أو غير متماثلة ـــ ونحاول الآن توضيح ذلك فى حالة فراغ العينة غير المحدود سواء كان قابلاً للعد أو غير قابل للعد.

(1 ـــ 31) فراغ العينة غير المحدود (اللانهائى) Infinite Sample Space:

(1 ـــ 31 ـــ 1) فراغ العينة غير المحدود (اللانهائى) المكون من مجموعة لانهائية قابلة للعد Infinite Countable Sample Space:

نفرض أن لدينا فراغ احتمالى (S ،β ،P(.)) حيث فراغ العينـــة S عبـــارة عـــن مجموعة مكونة من عدد لانهائى (قابل للعد) من العناصر

$$S = \{e_1, e_2, ...\}$$

ودالة الاحتمال P(.) تحدد الاحتمال $P(\{e_J\}) = P_J$ لكل عنصر من عناصر الفراغ S لجميع قيم ..... ,J = 1, 2 والاحتمالات ... ,P_1, P_2 ليس من الضرورى أن تكـــون كلهـــا متساوية أى أن فراغ العينة مكون من عناصر غير متماثلة ـــ كما أن:

$$\sum_{J=1}^{\infty} P(\{e_J\}) = P\left(\bigcup_{J=1}^{\infty}\{e_J\}\right) = P(S) = 1$$

أى أن:

$$\sum_J P_J = 1$$

كما أنه لأى مجموعة جزئية من فراغ العينة S ولتكن المجموعة A التى تكون عنصراً من عناصر العائلة β يمكن تحديد الاحتمال P(A) باستخدام العلاقة التالية:

$$(1.\ 31.\ 1):\ P(A) = \sum_{\{J: e_J \in A\}} P_J$$

حيث أن المجموع Σ مأخوذ على جميع قيم J التى تحقق العلاقة $e_J \in A$ ويمكن بذلك إثبات أن الدالة P(.) تحقق المسلمات الثلاثة للتعريف الحديث للاحتمال. ويجب أن نتذكر دائماً أن كل المجموعات الجزئية من أى مجموعة قابلة للعد تعتبر مجموعة بورالية.

(1 ــ 31 ــ 1 أ) القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب The Negative Binomial Probability Law:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية تتمثل فى إجراء سلسلة من محاولات برنوللى المستقلة كل محاولة نتيجتها إما نجاح (s) باحتمال P أو فشل (f) باحتمال $q = 1 - P$. فإذا افترضنا أن هذه المحاولات يستمر تكرارها حتى نحصل على مرات نجاح عددها r. أى أن آخر محاولة تكون هى النجاح رقم r. فى هذه الحالة لن يقل عدد مرات إجراء التجربة عن r مرة وذلك إذا كانت المحاولات الأولى التى عددها r كلها نجاح أى لا يوجد خلالها أى مرة فشل ــ ولكن لو حدث مرة فشل واحدة قبل النجاح رقم r يكون عدد مرات إجراء التجربة $(r + 1)$ مرة ــ ولو حدث مرتين فشل سيكون عدد مرات إجراء التجربة $(r + 2)$ مرة وهكذا لو حدث x مرة فشل سيكون عدد مرات إجراء التجربة $(x + r)$ مرة ــ وعلى ذلك فإن فى هذه التجربة يكون عدد مرات النجاح عدد ثابت يساوى r ولكن عدد مرات الفشل x متغير يأخذ القيم $x = 0, 1, 2, ...$.

فإذا كان عدد مرات الفشل x مرة يكون عدد مرات إجراء التجربة $(x + r)$ مرة وتكون المرة الأخيرة التى رقمها $(x + r)$ نجاح واحتمالها P والمرات التى قبلها التى عددها $(x + r - 1)$ مرة يكون منها $(r - 1)$ مرة نجاح و x مرة فشل واحتمال النجاح فى كل منها P واحتمال الفشل q ــ وعلى ذلك يمكن باستخدام القانون الاحتمالى ذو الحدين (1. 26. 3) إثبات أن احتمال الحصول على $(r - 1)$ مرة نجاح و x مرة فشل فى المرات التى عددها $(x + r - 1)$ هو $\binom{x + r - 1}{r - 1} P^{(r-1)} q^x$ وعلى ذلك يكون احتمال الحصول

على r مرة نجاح و x مرة فشل فــي جميــع مــرات إجــراء التجربــة التــى عــددها (r + x) والتى تنتهى بحالة نجاح احتمالها P هو:

$$(1.\ 31.\ 2):\ P(x;r,p)=\binom{x+r-1}{x}P^{r}q^{x}$$

$$x=0,1,2,\ldots \quad P>0 \quad , \quad P+q=1$$

والقانون السابق يسمى بالقانون الاحتمالى ذو الحدين السالب وذلك لأن الاحتمــال P(x; r, p) هو الحد العام فى مفكوك ذو الحدين السالب $(1-q)^{-r}$ مضروباً فى p^{r} حيث:

$$(1.\ 31.\ 3):\ a)\ \ (1-q)^{-r}=\sum_{J=0}^{\infty}\binom{-r}{J}(-q)^{J}$$

علماً بأن:

$$b)\ \ \binom{-r}{J}=\frac{-r(-r-1)....(-r-J+1)}{J!}=(-1)^{J}\binom{J+r-1}{J}$$

وعلى ذلك يكون:

$$(1.\ 31.\ 4):\ (1-q)^{-r}=\sum_{J=0}^{\infty}\binom{J+r-1}{J}q^{J}$$

وبمقارنة العلاقتين (1. 31. 2) ، (1. 31. 4) نجد أن P(x; r, p) هى الحد العام فى مفكوك ذو الحدين السالب $(1-q)^{-r}$ مضروباً فى P^{r}وذلك بوضع x = J.

ويمكن الآن إثبات أن:

$$(1.\ 31.\ 5):\ \sum_{x=0}^{\infty}P(x;r,p)=1$$

وذلك لأنه من العلاقة (1. 31. 2) نجد أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty}P(x;r,p)=P^{r}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+r-1}{x}q^{x}$$

ومن العلاقة (1. 31. 4) عندما x = J نجد أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty}P(x;r,p)=P^{r}(1-q)^{-r}=P^{r}\,P^{-r}=1.$$

ملاحظة (1 ـ 31 ـ 1 أ):

فى القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب P(x; r, p) المعطى بالعلاقة (1. 31. 2) عندما $q \to 0$ و $r \to \infty$ بطريقة ما بحيث تظل $\lambda = rq$ كمية ثابتة، يمكن إثبات أن:

$$(1.31.6):\ P(x;r,p) \approx \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad ;x = 0,1,2,\ldots$$

وهذا يقدم تقريب للاحتمال ذو الحدين السالب باستخدام الاحتمال البواسونى.

(1 ـ 31 ـ 1 ب) القانون الاحتمالى الهندسى The Geometric Probability Law:

فى القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب المعطى بالعلاقة (2 .31 .1) عندما يكون من المفروض أن تتوقف التجربة عند أول مرة نجاح (أى أن عدد مرات النجاح $r = 1$) يسمى القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب بالقانون الاحتمالى الهندسى ويأخذ الصورة التالية:

$$(1.31.7):\ P(x) = P(x;1,p) = Pq^x$$

$$x = 0,1,2,\ldots \qquad (p > 0 \quad , \quad q = 1-p)$$

ويجب ملاحظة أن:

$$(1.31.8):\ \sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$$

وذلك لأن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} Pq^x = P\sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{P}{1-q} = \frac{P}{P} = 1$$

ملاحظة (1 ـ 31 ـ 1 ب):

ويعتبر القانون الاحتمالى الهندسى نموذجاً لحالة فراغ العينة غير المحدود المكون من مجموعة قابلة للعد من العناصر البسيطة غير المتماثلة ـ مثله فى ذلك تماماً القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب وكذلك القانون الاحتمالى البواسونى ـ وذلك لأنه لا يمكن أن يكون فراغ العينة مكون من مجموعة لانهائية قابلة للعد من عناصر بسيطة متماثلة لأنه فى هذه الحالة يكون احتمال كل عنصر يساوى الواحد الصحيح مقسوماً على عدد العناصر اللانهائى أى أن احتمال كل عنصر يكون مساوياً للصفر تقريباً.

مثال (1 ــ 31 ــ 1): تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء زهرة نرد متزنة عدد من المرات حتى يظهر العدد 6 لأول مرة. ما هو احتمال أن تستمر المحاولات مرتين على الأكثر؟

(الحل)

هذه التجربة تتبع القانون الاحتمالى الهندسى ــ حيث ظهور العدد 6 هو النجاح واحتماله $P = \frac{1}{6}$ وعدد مرات النجاح $r = 1$ والفشل هو عدم ظهور العدد 6 واحتماله $q = \frac{5}{6}$ وعدد مرات الفشل نرمز له بالرمز x حيث x تأخذ القيم $x = 0, 1, 2, ...$.

من العلاقة (1. 31. 7) للقانون الهندسى نجد أن:

$$P(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^x$$

حيث x هو عدد مرات الفشل $x = 0, 1, 2, ...$

فإذا كان عدد المحاولات يستمر حتى حدوث أول مرة نجاح سيكون عدد المحاولات يساوى $(x + 1)$ وبذلك يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(x + 1 \leq 2) = P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}$$

(1 ــ 32) فراغ العينة غير المحدود (اللانهائى) المكون من مجموعة لانهائية غير قابلة للعد: Infinite Uncountable Sample Space

نقدم فيما يلى حالة التجارب العشوائية التى يكون فراغ العينة فى كل منها مكون من مجموعة لانهائية غير قابلة للعد وذلك عن طريق تقديم قانونين احتماليين أحدهما يسمى القانون الاحتمالى المنتظم ويمكن اعتباره تعميم لحالة فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة متماثلة الذى سبق تقديمه فى البند (1 ــ 14). والثانى يسمى القانون الاحتمالى الأسى السالب والذى يمكن اعتباره تعميم لحالة فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة الذى سبق تقديمه فى البند (1 ــ 18).

(1 ــ 32 ــ 1) القانون الاحتمالى المنتظم :The Uniform Probability Law

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية ــ لها فراغ العينة S الذى يمكن تمثيله بالفترة المحدودة $a \leq x \leq b$ حيث x عدد حقيقى و a و b عددان حقيقيان محدودان:

$$S = \{x \text{ عدد حقيقى } : a \leq x \leq b\}$$

إذا كانت دالة الاحتمال $P(\cdot)$ تحدد لأى فترة B عدد حقيقى $P(B)$ بالعلاقة:

(1. 32. 1):

$$P(B)=\begin{cases}\dfrac{L(B)}{L(S)} & \text{إذا كانت B مجموعة جزئية من S (أى } BS=B)\\ 0 & \text{إذا لم توجد نقطة مشتركة بين S, B (أى } BS=\phi)\end{cases}$$

حيث $L(S)$ هو طول الفترة S، $L(B)$ طول الفترة B.

والدالة $P(.)$ تحدد قيمة الاحتمال $P(B)$ لأى فترة B لذلك فهى صالحة لتحديد الاحتمال لأى مجموعة جزئية بورالية من الأعداد الحقيقية فى S. وعلى ذلك يمكن إثبات أن الدالة $P(.)$ تحقق المسلمات الثلاثة المعطاة فى التعريف الحديث للاحتمال ــ تعريف (1 ــ 13 ــ 1) ــ والقانون السابق المقدم بالعلاقة(1 .32 .1) يسمى بالقانون الاحتمالى المنتظم.

مثال (1 ــ 32 ــ 1): تجربة عشوائية تتمثل فى اختيار نقطة (أو عدد حقيقى) بطريقة عشوائية من الفترة $[0,1]$ فما هو احتمال أن يكون العدد المقابل للنقطة المختارة أكبر من $\frac{1}{2}$؟

(الحل)

فراغ العينة لهذه التجربة هو

$$S=\{x \text{ عدد حقيقى } : 0\le x\le 1\}$$

وهى فترة طولها $L(S)=1$

والفترة التى تقع داخل S ويقابلها أعداد حقيقية أكبر من $\frac{1}{2}$ هى الفترة $B=[\frac{1}{2},1]$ وطول هذه الفترة $L(B)=\frac{1}{2}$ ــ إذن احتمال أن يكون العدد المختار أكبر من $\frac{1}{2}$ يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة (1 .32 .1) السابقة كما يلى:

الاحتمال المطلوب هو:

$$P(B)=\frac{L(B)}{L(S)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

في المثال السابق استخدمنا تعبير معين هو ـ «اختيار نقطة عشوائية من الفترة $[0,1]$ أو بصورة عامة من الفترة $[a,b]$ » ـ هذا التعبير كثيراً ما يواجهنا ويكون هدفنا حساب احتمال أن تكون النقطة المختارة واقعة في فترة ما تمثل مجموعة جزئية بوراليــة من الفترة $[a,b]$ وهذا الاحتمال يمكن حسابه باستخدام العلاقة (1. 32. 1) السابقة والقانون الاحتمالي الذي يحكم هذه العلاقة يسمى بالقانون الاحتمالي المنتظم ومثل هذه المسائل كان يتم دراستها في الماضي تحت مسمى «الاحتمال الهندسي» ولكن في نظرية الاحتمــالات الحديثة يتم دراسة مثل هذه المسائل تحت مسمى جديد هو ـ «المتغير العشوائي الذي لــه توزيع منتظم» ـ وهو ما سوف نتعرض له بالدراسة فيما بعد.

(1 ـ 32 ـ 2) القــانون الاحتمــالي الأســي الســالب The Negative Exponential Probability Law:

نفرض أن لدينا فراغ احتمالي معين $(S, \beta, P(.))$ حيث فراغ العينة S مكون مــن مجموعة خطية غير قابلة للعد هي:

$$S = \{x \text{ عدد حقيقي } : 0 \le x \le \infty\}$$

فإذا كانت دالة الاحتمال $P(.)$ تحدد لأي فترة B عدد حقيقي $P(B)$ بالعلاقة:

(1. 32. 2):

$$P(B) = \begin{cases} \int_B \lambda e^{-\lambda x} dx & ; \lambda > 0 \ ; \ B \subset S \\ 0 & SB = \phi \quad S, B \text{ إذا لم توجد أي نقطة مشتركة بين } \end{cases}$$

وما دامت الدالة $P(.)$ تحدد قيمة الاحتمال $P(B)$ لأي فترة B فإنها تحدد الاحتمــال لأي مجموعة بوراليه جزئية في S وعلى ذلك يمكن إثبات أن الدالة $P(.)$ تحقق المسلمات الثلاثة للتعريف الحديث للاحتمال ـ تعريف (1 ـ 13 ـ 1) ـ والقانون السابق المعطــى بالعلاقة (1. 32. 2) يسمى بالقانون الاحتمالي الأسي السالب بمعلمه λ.

مثال (1 ـ 32 ـ 2): إذا كان معلوم أن الفترة المنقضية بالدقائق بــين وصــول سيارتين متتاليتين في إحدى محطات البنزين تتبع القانون الأسي السالب بمعلمــه $\lambda = 1$. احسب احتمال أن الفترة المنقضية بين وصول سيارتين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق وتقـل عن 8 دقائق.

(الحل)

نفرض أن:

الحدث B هو: أن الفترة المنقضية بين سيارتين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق وتقل عن 8 دقائق.

إذن من العلاقة (2 .32 .1) عندما $\lambda = 1$ يكون

$$P(B) = \int_5^8 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_5^8 = e^{-5} - e^{-8} = 0.0064$$

يجب ملاحظة أن القانون الاحتمالى المنتظم يعطى احتمال متساوى لأى فترتين مختلفتين إذا كانتا متساويتان فى الطول لذلك يمكن اعتباره مثال لحالة فراغ العينة غير القابل للعد المكون من أحداث بسيطة متماثلة ــ أما القانون الاحتمالى الأسى السالب يعطى قيمتى احتمال غير متساويتين لأى فترتين مختلفتين ومتساويتين فى الطول ــ لذلك يمكن اعتباره مثال لحالة فراغ العينة غير القابل للعد المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة.

فمثلاً فى مثال (1 ــ 32 ــ 1) لو اعتبرنا الفترتان:

$$B = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \qquad , \qquad C = \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

سنجد أنه طبقاً للاحتمال المنتظم

$$P(B) = \frac{L(B)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{L(C)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

أى أن الاحتمالين متساويين مادامت الفترتين متساويتى الطول.

ولكن فى مثال (1 ــ 32 ــ 2) لو اعتبرنا الفترتان:

B : الفترة المنقضية بين سيارتين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق وتقل عن 8 دقائق (طولها 3 دقائق)

C : الفترة المنقضية بين سيارتين متتاليتين تزيد عن دقيقة واحدة وتقل عن 4 دقائق (طولها 3 دقائق)

سنجد أنه طبقاً للاحتمال الأسى السالب

$$P(B) = 0.0064$$

كما فى مثال (1 ــ 32 ــ 2) فى حين أن:

$$P(C) = \int_{1}^{4} e^{-4} d\,x = \left[-e^{-x}\right]_{1}^{4} = e^{-1} - e^{-4} = 0.3495638$$

أى أن الاحتمالين غير متساويين مع أن الفترتين متساويتى الطول.

تمارين الباب الأول

(1 ـ 1): عند إلقاء قطعة عملة 3 مرات متتابعة ما هو احتمال:

(أ) الحصول على صورتين؟

(ب) الحصول على كتابة مرة واحدة على الأقل؟

(1 ـ 2): عند سحب ورقتين من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) محكمة الخلط، إذا كان السحب مع الإعادة (بدون إعادة) ما هو احتمال أن تكون كلا الورقتين آس؟

(1 ـ 3): كيس به 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. سحبت كرة من الكيس ووضعت جانباً دون معرفة لونها، ثم سحبت كرة ثانية. فما هو احتمال أن تكون الكرة الثانية سوداء (بيضاء)؟

(1 ـ 4): عند إلقاء زهرتي نرد متزنة n مرة. ما هو احتمال الحصول على الوجهين (6, 6) مرة واحدة على الأقل؟

(1 ـ 5): عند توزيع n من الكرات بطريقة عشوائية على N من الصناديق. ما هو احتمال أن صندوق معين يحتوى على m من هذه الكرات؟

(1 ـ 6): عند إلقاء 3 زهرات نرد متزنة مرة واحدة. ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على الأوجه الثلاثة:

أ: 9؟ ب: 10؟ جـ: 11؟

(1 ـ 7): عند إلقاء 4 قطع عملة متزنة مرة واحدة. ما هو احتمال الحصول على صورتين وكتابة؟

(1 ـ 8): عند سحب 6 ورقات من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) محكمة الخلط (بدون إعادة) ما هو احتمال أن تكون 3 منها حمراء و3 سوداء؟

(1 ـ 9): 12 كرة متشابهة تم توزيعها عشوائياً بين ثلاثة صناديق. ما هو احتمال أن الصندوق الأول سيحتوى على 3 كرات؟

(1 ـ 10): سحبت ورقتان عشوائياً من مجموعة أوراق اللعب (محكمة الخلط) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية. احسب الاحتمالات الآتية:

(أ) أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود.

(ب) أن تكون الورقتان من شكل معين.

(جـ) أن تكون الورقتان من نفس الشكل.

(1 ــ 11): حل المسألة السابقة إذا كان السحب بدون إعادة.

(1 ــ 12): رميت زهرتان من زهرات النرد. ما هو احتمال الحصول على نقط مجموعها 7؟

(1 ــ 13): عند إلقاء قطعة عملة متزنة 5 مرات أحصر الحالات الممكنة واحسب احتمال كل منها.

(1 ــ 14): ما هو احتمال الحصول على عددين متشابهين معينين عند إلقاء زهرتى نرد وما هو احتمال الحصول على أى عددين متشابهين؟

(1 ــ 15): لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين. اخترنا من كل زوج فرداً واحداً دون تحيز. ما هو احتمال أن يكون الأفراد الثلاثة المختارون من جنس واحد؟ وما احتمال أن يكونوا رجلين وامرأة؟

(1 ــ 16): كتاب مكون من ثلاث أجزاء. وضعت هذه الأجزاء الثلاثة على رف دون تعمد ترتيبها. ما هو احتمال أن تكون مرتبة ترتيباً صحيحاً؟

(1 ــ 17): مجموعة مكونة من طفلين وثلاث سيدات. جلست هذه المجموعة بطريقتين: فى خط مستقيم وفى دائرة. ما هو احتمال ألا يكون الطفلان متجاوران فى كلٍ من الطريقتين؟

(1 ــ 18): رميت قطعة عملة 5 مرات متتالية. احسب احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل (الحصول على صورتين على الأقل):

أولا: إذا كانت القطعة متجانسة.

ثانياً: إذا كان احتمال الحصول على صورة يساوى $\frac{5}{11}$.

(1 ــ 19): رميت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ما هو احتمال ألا تحدث صورتان متتاليتان؟ وما هو احتمال ألا تحدث صورتان أو كتابتان متتاليتان؟

(1 ــ 20): يقوم شخص برمى قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء فى صندوق أما إذا حصل على كتابة فإنه يضع كرتين سوداوين وكرة بيضاء. فإذا كرر هذا الشخص هذه العملية n مرة ثم سحبت كرة من الصندوق (عشوائيا) فاحسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء.

(1 ــ 21): رميت زهرة نرد n مرة. احسب احتمال أن:

(أ) أكبر رقم سيظهر على الزهرة سيكون رقماً معيناً k.

(ب) أصغر رقم سيظهر على الزهرة سيكون رقماً معيناً k.

(1 ــ 22): إذا كانت $\{A_k\} = A_1, A_2, A_3, \ldots$ متتابعة من المجموعات المضطردة الزيادة $A_k \subset A_{k+1}$ لجميع قيم $k = 1, 2, 3, \ldots$. أوجد النهاية $\lim_{k\to\infty} A_k$ إذا كانت:

(أ) $A_k = \{x : \frac{1}{k} \le x \le 3 - \frac{1}{k}\}\ ;\ k = 1, 2, 3, \ldots$

(ب) $A_k = \{(x, y) : \frac{1}{k} \le x^2 + y^2 \le 4 - \frac{1}{k}\}\ ;\ k = 1, 2, 3, \ldots$

(1 ــ 23): إذا كانت $\{A_k\} = A_1, A_2, A_3, \ldots$ متتابعة من المجموعات المضطردة النقصان $A_k \supset A_{k+1}$ لجميع قيم $k = 1, 2, 3, \ldots$ أوجد النهاية $\lim_{k\to\infty} A_k$، $k = 1, 2, 3, \ldots$ إذا كانت:

(أ) $A_k = \{x : 2 - \frac{1}{k} < x \le 2\}$

(ب) $A_k = \{x : 2 < x \le 2 + \frac{1}{k}\}$

(جـ) $A_k = \{(x, y) : 0 \le x^2 + y^2 \le \frac{1}{k}\}$

(1 ــ 24): مجموعة مكونة من 720 طالب تم اختبارهم فى ثلاث مواد هى الإحصاء والرياضة والاقتصاد. رسب منهم 90 طالب فى الإحصاء و90 طالب فى الرياضة و90 طالب فى الاقتصاد ورسب 30 طالب فى الإحصاء والرياضة كما رسب 30 طالب فى الرياضة والاقتصاد ورسب 30 طالب فى الاقتصاد والإحصاء. ورسب 10 طلاب فى المواد الثلاثة. أوجد عدد الطلاب الذين رسبوا فى:

(أ) k مادة بالضبط.

(ب) k مادة على الأقل.

(جـ) k مادة على الأكثر.

لجميع قيم $k = 0, 1, 2, 3$

(1 ــ 25): بين أنه لأى حدث E فى فراغ العينة S، تمثل المجموعات $E, \overline{E}, \phi, S$ عائلة بورال.

(1 ــ 26): إذا كان فراغ العينة S هو كل خط الأعداد الحقيقية R_1:

(أ) بين أن أى عائلة بوراليه تشتمل على كل الفترات المغلقة تشتمل أيضاً على كل الفترات المفتوحة.

(ب) بيـن أن العائلـة البوراليه المتولدة بالفترات $(-\infty, x]$ هى نفس العائلة البوراليه المتولدة بالفترات المحدودة.

(1 ــ 27): لأى مجموعة A، نفرض أن $Q(A) = \sum_{A} f(x)$ حيث:

$$f(x) = \left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)^x \ , \ x = 0,1,2,\ldots$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. إذا كانت:

$$A_1 = \{x : x = 0,1,2,3\} \ ; \ A_2 = \{x : x = 0,1,2,\ldots\}$$

أوجد: $Q(A_1)$ و $Q(A_2)$

(1 ــ 28): لأى مجموعة A نفرض أن:

$Q(A) = \int_A f(x)\,dx$ حيـث $f(x) = 6x(1-x)$، $0 < x < 1$ وتسـاوى الصـفر خلاف ذلك، هذا إذا كان التكامل موجود أما إذا لم يكن التكامل موجود نعتـبر أن $Q(A)$ غـير معـرفة. فـإذا كـان $A_1 = \{x : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\}$ و $A_2 = \{x : x = \frac{1}{2}\}$ و $A_3 = \{x : 0 < x < 10\}$ أوجـد $Q(A_1)$ و $Q(A_2)$ و $Q(A_3)$.

(1 ــ 29): لأى مجموعـة A نفرض أن $Q(A)$ تساوى عدد النقط فى A المقابلة للأعداد الصحيحة الموجبة. فإذا كان:

A_1={x: x a multiple of 3, less than or equal to 50,

x مضاعفات 3 التى تقل عن أو تساوى 50}

A_2={x: x a multiple of 7, less than or equal to 50,

x مضاعفات 7 التى تقل عن أو تساوى 50}

أوجد: $Q(A_1)$ و $Q(A_2)$ و $Q(A_1 \cup A_2)$ و $Q(A_1 \cap A_2)$. وبين أن:

$$Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2).$$

(1 ــ 30): إذا كانت: $Q(A)=\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$

وذلك عندما يكون التكامل موجود أما خلاف ذلك نعتبر أن $Q(A)$ غير معرفة. فإذا كان:

$$A_1=\{(x,y):-1\le x\le 1\,,\,-1\le y\le 1\};\ A_2=\{(x,y):-1\le x=y\le 1\}$$
$$;\ A_3=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}.$$

أوجد: $Q(A_1)$ و $Q(A_2)$ و $Q(A_3)$.

(1 ــ 31): لأى مجموعــة A إذا كانت $Q(A)=\int_A x^2\,dx$ عندما يكون التكامل موجود وتكون $Q(A)$ غير معرفة عندما لا يكون التكامل موجود.

(أ) إذا كانــــت $A_k=\{x:0\le x\le 2-\frac{1}{k}\};\ k=1,2,3,\ldots$ بيـــن أن $Q(\lim_{k\to\infty}A_k)=\lim_{k\to\infty}Q(A_k)$.

(ب) إذا كانــــت $A_k=\{x:|x|\le 1+\frac{1}{k}\};\ k=1,2,3,\ldots$ بيـــن أن $Q(\lim_{k\to\infty}A_k)=\lim_{k\to\infty}Q(A_k)$.

(1 ــ 32): صندوق به 8 كرات متشابهة فى كل شىء عدا اللون منها 5 كرات بيضاء و3 ســوداء ســحبت كرتان عشوائياً من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال أن:

(أ) كلا الكرتين المسحوبتين بيضاء.

(ب) كلا الكرتين من نفس اللون.

(جـ) كرة واحدة على الأقل بيضاء.

(1 ــ 33): صندوق به 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 سحبت كرتان عشوائياً من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال أن:

(أ) أن يكون مجموع رقمى الكرتين 7.

(ب) مجموع رقمى الكرتين يساوى k لجميع الأعداد الصحيحة k من 2 حتى 12

(1 ــ 34): صندوق به 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9. سحبنا منه عينة عشوائية مكونة من 3 كرات مع الإعادة (بدون إعادة). ثم كتبنا أرقام الكرات المسحوبة فى صف حسب ترتيب سحبها لتكوين رقم. بذلك سيكون الرقم المكون عبارة عن عدد صحيح ينحصر بين 0 و999. فما هو احتمال أن الرقم المكون يقبل القسمة على 39؟

(1 ــ 35): صندوق به 52 كرة مرقمة من 1 إلى 52 نفرض أن الكرات من 1 إلى 13 تعتبر كرات حظ "مكسب". عند سحب كرتان عشوائياً من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال:

(أ) أن تكون كلا الكرتان من كرات الحظ.

(ب) أن لا تكون كلا الكرتان من كرات الحظ.

(جـ) أن تكون كرة واحدة على الأقل من كرات الحظ.

(د) أن تكون كرة واحدة بالضبط من كرات الحظ.

(1 ــ 36): عند إلقاء قطعة عملة متزنة عشرة مرات متتالية. أوجد احتمال الحصول على:

(أ) صورة فى الخمسة رميات الأولى وكتابة فى الخمسة التالية.

(ب) صورة فى الرميات 1 و3 و5 و7 و9 وكتابة فى الرميات 2 و4 و6 و8 و10

(جـ) 5 صور و5 كتابة.

(د) 5 صور على الأقل.

(هـ) 5 صور على الأكثر.

(1 ــ 37): أربعة أشخاص وضعوا أحذيتهم فى مكان واحد وعند انصرافهم فى المساء انقطع تيار الكهرباء وأظلم المكان وسحب كل واحد منهم حذاء. فما هو احتمال ألا يأخذ أى منهم الحذاء الخاص به؟

(1 ــ 38): مجموعة من 4 أشخاص. ما هو احتمال أن يكون بينهم 2 على الأقل:

(أ) لهما نفس يوم الميلاد؟

(ب) مولودين فى نفس الشهر؟

(1 ــ 39): فى تمرين (1 ــ 37) أوجد احتمال:

(أ) أن يأخذ كل شخص حذاءه الخاص.

(ب) أن شخص منهم يأخذ حذاءه.

(1 ـ 40): فى يانصيب معين طرح للبيع n^2 تذكرة منها n تذكرة تكسب جـوائز. فـإذا اشترى شخص ما n تذكرة:

(أ) فما هو احتمال أن يفوز بجائزة.

(ب) أوجد احتمال الفوز وعدم الفوز عندما $n = 10$ وعندما $n \to \infty$.

(1 ـ 41): كيس به 3 كرات بيضاء وكرتان (2) سوداء، سحبنا منه كرة وركناها جانبـاً دون ملاحظة لونها. عند سحب كرة أخرى ما هو احتمال أن تكون بيضاء؟

(1 ـ 42): فى التمرين السابق إذا ركنا كرتين دون ملاحظة لونهما ثم سحبنا كرة أخـرى ما هو احتمال أن تكون الكرة الأخيرة بيضاء؟

(1 ـ 43): A و B و C ثلاثة أحداث و $P(C) > 0$ اثبت أن:

(أ) إذا كان S حدث مؤكد فإن ؛ $P[S \mid C] = 1$

(ب) إذا كانت $C \subset A$ فإن ؛ $P[A \mid C] = 1$

(جـ) إذا كانت $P(A) = 0$ فإن ؛ $P[A \mid C] = 0$

(د) $P[A \cup B \mid C] = P[A \mid C] + P[B \mid C] - P[A\,B \mid C]$

(هـ) $P(\overline{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C)$

(1 ـ 44): عند إلقاء ثلاث (3) زهرات نرد متزنة دفعة واحدة، إذا علمت أنـه لا توجـد زهرتان لهما نفس الناتج، فما هو احتمال أن:

(أ) مجموع الأوجه 7؟

(ب) ناتج إحدى الزهرات آس؟

(1 ـ 45): إذا كان $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(\overline{B}) = \frac{1}{4}$ هل من الممكن أن يكون الحـدثان A و B متنافيان؟ بين السبب.

(1 ـ 46): صندوق يحتوى على M كرة منها m كرة بيضاء (حيـث $m \le M$). عنـد سحب عينة حجمها n كرة من الصندوق مع الإحلال (أو بدون إحلال)، إذا كان الحدث B_J هو أن الكرة المسحوبة فى السحبة رقم J بيضـاء $J = 1, 2, \ldots, n$، والحدث A_k هو أن تحتوى العينة المسحوبة علـى k كـرة بالضـبط بيضـاء $k = 1, 2, \ldots, n$. اثبت أن: $P[B_J \mid A_k] = \frac{k}{n}$.

(1 ــ 47): صندوق يحتوى على M كرة منها $m(\le M)$ كرة بيضاء. سحبت منه $n(< M)$ كرة ووضعت جانباً (لم تعاد للصندوق) دون معرفة لونها، ثم سحبت كرة أخرى، فما هو احتمال أن تكون الكرة الأخيرة بيضاء؟

(1 ــ 48): صندوق به 8 كرات بيضاء و4 كرات سوداء.

(أ) عند سحب كرة من الصندوق ما هو احتمال أن تكون بيضاء؟

(ب) عند سحب عينة مكونة من كرتين، ما هو احتمال أن تحتوى على كرة واحدة بالضبط بيضاء؟

(جـ) ما هو الاحتمال الشرطى أن تحتوى العينة على كرتين بالضبط بيضاء علماً بأنها تحتوى على كرة واحدة على الأقل بيضاء؟

(1 ــ 49): فى التمرين السابق إذا فقدنا من الصندوق 5 كرات قبل السحب ولم نلاحظ لون الكرات المفقودة. أوجد أثر ذلك على نتائج التمرين السابق فى (أ) و(ب) و(جـ).

(1 ــ 50): صندوق يحتوى على 3 كرات بيضاء و6 حمراء و3 سوداء من حجم واحد سحبت ثلاث كرات عشوائياً. ما هو احتمال أن تكون من لون واحد؟

(1 ــ 51): صندوق به 12 كرة متماثلة منها 5 كرات بيضاء و3 حمراء و4 سوداء. سحبت منه ثلاث كرات احسب احتمال:

(أ) عدم ظهور كرات حمراء.

(ب) ظهور كرة واحدة حمراء.

(جـ) أن تكون كرة واحدة على الأقل حمراء.

(د) أن تكون الكرات كلها من نفس اللون.

(هـ) عدم وجود كرتان من لون واحد.

(1 ــ 52): صناديق عددها n يحتوى كل منها على a كرة بيضاء وb كرة سوداء. أخذت كرة عشوائياً من الصندوق الأول ووضعت فى الثانى ثم أخذت كرة من الثانى ووضعت فى الثالث ... وهكذا حتى أخذت كرة من الصندوق قبل الأخير ووضعت فى الأخير وأخيراً سحبت كرة من الصندوق الأخير فما هو احتمال أن تكون بيضاء؟

(ا ـ 53): صندوقان الأول به $(N - 1)$ كرة بيضاء وكرة واحدة سوداء والثانى به N كرة كلها بيضاء. سحبت كرة عشوائياً من كل صندوق ووضعت فى الصندوق الآخر وكررت العملية عدداً من المرات. احسب احتمال أنه بعد عدد من السحبات قدره n ستكون الكرة السوداء موجودة بالصندوق الأول وأدرس نهاية هذا الاحتمال عندما $N \to \infty$ (وكذلك عندما $N = n$. ثم $N \to \infty$).

(ا ـ 54): صندوق يحتوى على a من الكرات البيضاء وb من الكرات السوداء. بدأت سلسلة من سحب الكرات من الصندوق كرة واحدة فى كل سحبة بشرط أن تعاد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد سحب الكرة التالية مباشرة. ما هو احتمال أن الكرة التى ستظهر فى السحبة رقم n ستكون بيضاء؟

(ا ـ 55): إذا كان $P[A] = 0.5$ و $P[A \cup B] = 0.6$ أوجد $P[B]$ إذا كان:

(أ) الحدثان A و B متنافيان.

(ب) الحدثان A و B مستقلان.

(جـ) $P[A \mid B] = 0.4$.

(ا ـ 56): مجموعة من الأشخاص 60% منهم رجال و40% نساء. فإذا كان 40% من الرجال و60% من النساء مدخنين. فما هو احتمال أن يكون شخص مدخن من هذه المجموعة رجلاً؟ وما هو احتمال أن يكون امرأة؟

(ا ـ 57): لدينا حدثان A و B حيث $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$ و $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$.
حدد أى من الحالات الآتية صح أو خطأ:

(أ) الحدثان A و B متنافيان.

(ب) $A \subset B$.

(جـ) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{3}{4}$.

(د) $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = 1$

(ا ـ 58): صندوق يحتوى على 12 كرة منها 8 كرات بيضاء. سحبنا منه عينة مكونة 4 كرات مع الإحلال (بدون إحلال). ما هو احتمال أن أول كرة مسحوبة ستكون بيضاء إذا علمت أن العينة تحتوى بالضبط على:

(أ) كرتين بيضاء؟

(ب) 3 كرات بيضاء؟

(1 ــ 59): لدينا 3 مجموعات من أوراق اللعب (الكوتشينة). سحبت ورقة واحدة عشوائياً من كل مجموعة. ما هو احتمال أن تحتوى الأوراق الثلاثة المسحوبة على العشرة الطيبة مرة واحد على الأقل؟

(1 ــ 60): صندوق به n كرة ذات حجم متماثل ولكنها ذات ألوان مختلفة، منها b كرة سوداء سحبت الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى دون إعادة. اثبت أن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة فى المرة الثالثة سوداء يساوى $\frac{b}{n}$.

(1 ــ 61): سحبت ورقة من مجموعة أوراق لعب محكمة الخلط ثم أعيدت وسحبت ورقة ثانية احسب احتمال:

(أ) أن تكون الورقة الأولى من نفس لون الورقة الثانية.
(ب) أن تكون الورقة الأولى هى نفس الورقة الثانية.

(جـ) أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد.

(د) أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد أو نفس الصورة.

(1 ــ 62): احسب احتمال إصابة مركب إذا أطلق عليها 5 قذائف بفرض أن احتمال إصابة القذيفة الواحدة $\frac{1}{5}$.

(1 ــ 63): يلعب ثلاث أشخاص a و b و c إحدى ألعاب الصدفة حيث تتساوى فيها احتمالات الكسب لكل منهم وبحيث يكون الفائز أول من يكسب ثلاث مباريات. فإذا كسب المباراة الأولى a والثانية b والثالثة a. احسب احتمال أن يفوز c.

(1 ــ 64): صندوق به عدد متساو من الكرات من كل من ثلاثة ألوان مختلفة. سحبت إحدى الكرات وسجل لونها وأعيدت إلى الصندوق وكررت هذه العملية n من المرات حيث $n > 2$. اثبت أن احتمال أن يكون كل من الألوان الثلاثة قد ظهر مرة واحدة على الأقل أثناء هذه العملية يساوى $\frac{3^{(n-1)} - 2^n + 1}{3^{(n-1)}}$.

(1 ــ 65): إذا كان A و B حدثان مستقلان و $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ أوجد $P(A\,\overline{B} \cup \overline{A}\,B)$

(1 ــ 66): إذا كان $P(B) = P(A\,|\,B) = P(C\,|\,A\,B) = \frac{1}{2}$ أوجد $P(A\,B\,C)$.

(1 ــ 67): إذا كان A و B حدثان مستقلان و $P(A) = P(B\,|\,A) = \frac{1}{2}$ أوجد $P(A \cup B)$.

(1 ـــ 68): إذا علمت أن $P(A)=0.5$ و $P(A\cup B)=0.7$:

(أ) أوجد $P(B)$ إذا كان A و B مستقلان.

(ب) أوجد $P(B)$ إذا كان A و B متنافيا.

(جـ) أوجد $P(B)$ إذا كان $P(A\mid B)=0.5$.

(1 ـــ 69): اثبت صحة أو عدم صحة العلاقات التالية:

(أ) إذا كان $P(A\mid B)\geq P(A)$ فإن $P(B\mid A)\geq P(B)$.

(ب) إذا كان $P(B\mid \overline{A})=P(B\mid A)$ فإن A و B يكونا مستقلان.

(جـ) إذا كان $P(A)=a$ و $P(B)=b$ فإن $P(A\mid B)\geq (a+b-1)/b$.

(1 ـــ 70): صندوق يحتوى على 6 كرات منها 4 كرات بيضاء. سحبت منه عينة مكونة من 3 كرات مع الإحلال (بدون إحلال). نفرض أن الحدث A هو أن تحتوى العينة المسحوبة على كرتان بالضبط بيضاء والحدث B هو أن الكرة المأخوذة فى السحبة الثالثة بيضاء. اثبت أن:

$$P(B)=P[B\mid A]\;P[A]+P[B\mid \overline{A}]P[\overline{A}]$$

حيث $\overline{A}$ هو مكمل الحدث A.

(1 ـــ 71): لدينا ثلاث صناديق أ وب وجـ. الصندوق أ يحتوى على كرتان (2) بيضاء و4 حمراء والصندوق ب يحتوى على 8 كرات بيضاء و4 حمراء والصندوق جـ يحتوى على كرة واحدة بيضاء و3 حمراء. سحبنا عشوائياً كرة واحدة من كل صندوق. ما هو احتمال أن الكرة المسحوبة من الصندوق الثانى ستكون بيضاء إذا علمت أن الكرات الثلاثة المسحوبة تحتوى على كرتان بالضبط بيضاء؟

(1 ـــ 72): صندوقان يحتوى الأول على a كرة بيضاء و b كرة سوداء ويحتوى الثانى على c كرة بيضاء و d كرة سوداء. سحبت كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثانى ثم سحبت كرة من الصندوق الثانى. ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء؟

(1 ـــ 73): فى التمرين السابق إذا سحبت كرتان من الصندوق الأول ووضعت فى الثانى ثم سحبت كرة واحدة من الصندوق الثانى. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

(ا ــ 74): نفرض أن B_1 و B_2 و B_3 ثلاث أحداث متنافية. فإذا كان $P(B_J)=\frac{1}{3}$ و $P(A\,|\,B_J)=\frac{J}{6}$ لقيم $J=1,2,3$. أوجد $P(A)$.

(ا ــ 75): صندوقان الأول به كرتان بيضاء وكرة سوداء والثانى به كرة بيضاء و5 كرات سوداء. أخذت كرة عشوائيا من الأول ووضعت فى الثانى ثم سحبت كرة من الثانى ووجد أنها بيضاء. احسب احتمال أن الكرة المسحوبة من الصندوق الأول كانت سوداء.

(ا ــ 76): نفرض أن $B_1, B_2, ..., B_n$ مجموعة من الأحداث المتنافية و $B=\bigcup_{J=1}^{n} B_J$ و $P(B_J)>0$ و $P(A\,|\,B_J)=q$ لقيم $J = 1, 2, ..., n$ اثبت أن:

$$P(A\,|\,B)=q$$

(ا ــ 77): صندوق يحتوى على 10 كرات وكل ما نعرفه هو أن بعض هذه الكرات لونها أبيض وبعضها أسود. سحبت كرة من الصندوق عشوائياً ووجد أن لونها أبيض فما هو احتمال أن يحتوى الصندوق على 5 كرات بيضاء على الأقل؟

(ا ــ 78): فى التمرين السابق إذا كانت $P_0 = P_1 = \cdots = P_{10}$ أوجد الاحتمال المطلوب. حيث P_k هو احتمال أن يحتوى الصندوق على k كرة بيضاء، $k = 0, 1, 2, ..., 10$.

(ا ــ 79): صندوق يحتوى على 10 كرات وكل ما نعرفه هو إما أن: (أ) كل الكرات بيضاء أو (ب) 5 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. سحبت كرة من الصندوق وكانت بيضاء.

فما هو احتمال أن تكون كل الكرات الموجودة فى الصندوق بيضاء؟

(ا ــ 80): فى n من المحاولات المتكررة المستقلة لتجربة ما إذا كان احتمال النجاح فى كل محاولة يساوى p. بين أن احتمال أن تكون نتيجة محاولة معينة نجاح، إذا علمت أن عدد مرات النجاح فى الــ n محاولة يساوى k، هو $\frac{k}{n}$.

(ا ــ 81): أجرى شخص m + n محاولة مستقلة لتجربة ما واحتمال النجاح فى كل محاولة يساوى p و $q=1-p$.

(أ) بين أن احتمال أن m + k محاولة ستكون نتيجتها نجاح إذا علمت أن الــ m محاولة الأولى نجاح يساوى $\binom{n}{k} P^k\ q^{n-k}$ لجميع قيم $k=0,1,2,\ldots,n$.

(ب) بين أن احتمال أن $m + k$ محاولة ستكون نتيجتها نجــاح إذا علمــت أن m محاولة على الأقل نتيجتها نجاح هو:

$$\frac{\binom{m+n}{m+k}\left(\frac{p}{q}\right)^{k}}{\sum_{J=0}^{n}\binom{m+n}{m+J}\left(\frac{p}{q}\right)^{J}}.$$

(I ـ 82): اثبت صحة العلاقة (1. 30. 5) واثبت أن مجموع حــدود القــانون الاحتمــالى المعطى بهذه العلاقة يساوى الواحد الصحيح.

(I ـ 83): خط مستقيم طوله a ونقطة منتصفه m. اخترنا عشوائياً نقطتين علــى الخــط المستقيم على جانبى نقطة المنتصف m. أوجد احتمال أن المسافة بين النقطتــين المختارتين تكون أقل من $\frac{a}{3}$.

(I ـ 84): عند اختيار نقطتين عشوائياً على ضلعين متجاورين لمربع. أوجد احتمــال أن مساحة المثلث الذى يتكون من ضلعى المربع والخط الواصــل بــين النقطتــين يكون:

(أ) أقل من $\frac{1}{8}$ مساحة المربع.

(ب) أكبر من $\frac{1}{2}$ مساحة المربع.

(I ـ 85): نقطتان اخترنا عشوائياً على خط مستقيم طوله a. ما هو احتمال أن أى مــن الأجزاء الثلاثة التى يتجزأ إليها الخط المستقيم لا تقل عن $\frac{a}{4}$؟

الفصل الثانى
المتغيرات العشوائية
ودوال التوزيع الاحتمالى
Random Variables and Probability Distribution Functions

(2 ـ 1) مقدمة:

لقد قدمنا فى الباب الأول بعض المفاهيم الرياضية الهامة مثل الاحتمال والفراغ الاحتمالى بهدف استخدام هذه المفاهيم فى إخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية المنظمة. وفى هذا الباب نقدم مفهوم آخر غاية فى الأهمية هو "المتغير العشوائى" الذى يمثل دالة حقيقية معرفة على فراغ العينة بهدف إيجاد مدخل آخر لدراسة الظواهر العشوائية. وباستخدام مفهوم المتغير العشوائى يمكن بناء هيكل رياضى مناظر لفراغ الاحتمال نستطيع بواسطته إخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية الجادة. لذا سنبدأ بتعريف المتغير العشوائى ودالة كثافة احتماله ودالة توزيعه الاحتمالى فى حالة المتغير العشوائى المفرد ثم المتغير العشوائى المتعدد المركبات كما سنتناول بالدراسة استقلال المتغيرات العشوائية.

(2 ـ 2) المتغير العشوائى Random Variable:

ذكرنا عند تعريف علم الإحصاء فى بداية الباب الأول [تعريف (1 ـ 1 ـ 1)] أنه ذلك العلم الذى يعمل على جمع البيانات المتعلقة بأى ظاهرة علمية أو اجتماعية وصياغتها فى شكل رقمى لإخضاعها للدراسة العلمية المنظمة باستخدام الأساليب والطرق العلميـة المتوفرة فى أفرعه المختلفة خاصة ما يزخر به ذلك الفرع الهام من أفرع هذا العلم وهو فرع "نظرية الإحصاء". والظواهر التى تواجهنا فى الدراسة نوعان ـ النوع الأول هو ما

يسمى بالظواهر الكمية ــ Numerical Valued Random Phenomena وهى ظواهر كمية مقيسة مثل الطول والوزن ودرجات الحرارة وغير ذلك من الظواهر التى تتميز بأن نتيجتها يمكن قياسها كمياً والتعبير عنها بعدد حقيقى ــ فلو رمزنا لظاهرة مثل درجات الحرارة بالرمز X فيمكن القول أن X عدد حقيقى ينحصر بين ∞±. والنوع الثانى من الظواهر يعرف بالظواهر النوعية أو الوصفية Descriptive Phenomena مثل الجنس (ذكر أو أنثى) والحالة التعليمية لمجموعة من الأشخاص وغير ذلك من الظواهر التى تتميز بأن نتيجة الظاهرة تتحدد بالوصف وليس بالكم. ولما كان علم الإحصاء يعمل على صياغة أى بيانات فى شكل رقمى قبل التعامل معها ــ لذلك فإن البيانات التى نحصل عليها من أى ظاهرة وصفية يمكن صياغتها هى الأخرى فى شكل كمى ــ فلو كانت الظاهرة محل الدراسة هى مثلاً جنس المولود فيمكن الإشارة للذكر بالعدد (1) والأنثى بالعدد (0) ــ أو العكس ــ فتكون نتيجة الظاهرة إما واحد أو صفر بالنسبة لأى مفردة من مفردات الدراسة وهى نتيجة كمية ــ وبذلك يمكن ــ عملياً ــ اعتبار كل الظواهر الخاضعة للدراسة ظواهر كمية (مقيسة). والظواهر بصفة عامة يمكن تمثيلها بالتجارب العشوائية فلو كانت الظاهرة محل الدراسة هى جنس المولود فيمكن اعتبارها كتجربة عشوائية نتيجتها (1 أو صفر) ــ ويكون فراغ العينة لهذه التجربة العشوائية (أو الظاهرة العشوائية) هو: $S = \{0,1\}$ ولو كانت الظاهرة العشوائية هى أطوال مجموعة من الأشخاص فيمكن تمثيل هذه الظاهرة بتجربة عشوائية فراغ العينة فيها هو:

$$S = \{X\,(\text{real no.}) : a \le X \le b\}$$

حيث X عدد حقيقى و a عدد حقيقى يمثل أقل طول و b عدد حقيقى يمثل أكبر طول ممكن. وعادة عند دراسة أى ظاهرة عشوائية تتم الدراسة عن طريق عينة عشوائية يتم سحبها من مجتمع هذه الظاهرة ــ لذلك فإن النتائج المختلفة التى يمكن الحصول عليها عند دراسة أى ظاهرة يمكن اعتبارها مشابهة تماماً لنتائج التجارب العشوائية ــ لذلك نطلق على هذه الظواهر اسم الظواهر العشوائية Random Phenomena. ويمكن النظر إلى أى ظاهرة عشوائية كمية على أنها تجربة عشوائية نتيجتها عبارة عن عدد X من الأعداد الحقيقية وفراغ العينة لمثل هذه الظواهر هو مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$S = \{X : -\infty \le X \le \infty\} = R_1$$

حيث R_1 هو خط الأعداد الحقيقية. ونظرية الاحتمالات تقدم لنا الأساس الرياضى لدراسة الظواهر العشوائية الكمية باعتبار أن أى ظاهرة عشوائية كمية (أو تجربة عشوائية) تكون نتيجتها عدد حقيقى ــ وفراغ العينة لمثل هذه الظواهر هو مجموعة الأعداد الحقيقية R_1، ومعرف على هذا الفراغ دالة الاحتمال P(.) التى تحدد لكل مجموعة جزئية بوراليه E من الأعداد الحقيقية (أو حدث E) عدداً حقيقياً هو P(E) طبقاً للمسلمات الثلاث المذكورة فى التعريف الحديث للاحتمال [تعريف (1 ــ 13 ــ 1)] بالباب الأول. وبذلك يمكن حساب احتمال تحقق أى حدث E معرف على الظاهرة العشوائية محل

الدراسة. ويتم إخضاع أى ظاهرة عشوائية للدراسة العلمية المنظمة عن طريق فراغ الاحتمال ــ أى عن طريق التجربة العشوائية وفراغ العينة لها الذى يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية $S = R_1$ والأحداث المختلفة E_i المعرفة على فراغ العينة S والتى تكون عائلة بوراليه. وهذا ليس هو المدخل الوحيد لدراسة الظواهر العشوائية ــ إنما يوجد مدخل آخر لإخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية المنظمة ــ هذا المدخل يمكن تقديمه باستخدام مفهوم جديد هو المتغير العشوائى ودالة توزيعه الاحتمالى، حيث يمكن لكل ظاهرة عشوائية (أو تجربة عشوائية) تحديد ما يسمى بالمتغير العشوائى المرافق لهذه الظاهرة (أو لهذه التجربة)، وباستخدام مفهوم المتغير العشوائى يمكن بناء هيكل رياضى مناظر لفراغ الاحتمال يتم بواسطته دراسة أى ظاهرة عشوائية دراسة علمية جادة. ويمكن الآن تقديم مفهوم المتغير العشوائى كما يلى:

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء قطعتى عملة متزنة مرة واحدة ــ نعلم أن فراغ العينة لهذه التجربة هو مجموعة مكونة من 4 عناصر ــ أى 4 أحداث بسيطة ــ هى المجموعة:

$$S = \{TT, TH, HT, HH\}$$
$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

حيث H ترمز للصورة و T ترمز للكتابة. ولو اعتبرنا أن الأحداث البسيطة متماثلة ــ وهى كما نعلم شاملة ومتنافية ــ فإننا نكون بذلك قد عرفنا دالة احتمال P(.) على الفراغ S التى تحدد لكل عنصر e_i الاحتمال $P(e_i) = \frac{1}{4}$ لجميع قيم $i = 1, 2, 3, 4$ ــ وإذا رمزنا لعدد الصور بالرمز X سنجد أنه إذا كانت نتيجة التجربة هى العنصر $e_1 = TT$ تكون $X = 0$ وإذا كانت نتيجة التجربة e_2 أو e_3 تكون $X = 1$ وإذا كانت النتيجة e_4 تكون $X = 2$. من ذلك نرى أن عدد الصور X يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة معرفة على فراغ العينة S وتحدد لكل عنصر من عناصر S عدد حقيقى وحيد ــ هذه الدالة X هى ما نطلق عليها اسم المتغير العشوائى X المرافق لهذه التجربة العشوائية. وعلى ذلك يمكن تحديد قيم المتغير العشوائى X لكل عنصر من عناصر التجربة العشوائية محل الدراسة كما يلى:

$$X(e_1) = 0 \quad , \quad X(e_2) = X(e_3) = 1 \quad , \quad X(e_4) = 2.$$

أى أن:

$$(2.2.1): \begin{cases} X = 0 & (\text{عندما } e = TT \\ X = 1 & (\text{عندما } e = TH \text{ or } HT \\ X = 2 & (\text{عندما } e = HH \end{cases}$$

فى الواقع العلاقة الدالية للمتغير العشوائى X بالنسبة لعناصر فراغ العينة لا تهمنا بقدر ما يهمنا معرفة احتمال أن المتغير X يأخذ قيمة معينة أو ينتمى لمجموعة معينة ــ أى لا يهمنا حساب القيمة X(e) التى يأخذها المتغير العشوائى X بالنسبة لعنصر معين e من عناصر فراغ العينة S ــ بقدر ما يهمنا معرفة احتمال أن X يساوى قيمة معينة مثل احتمال أن $X = 1$ أو ينتمى لمجموعة معينة مثل احتمال أن $X \geq 1$ مثلا. وهذه الاحتمالات يمكن حسابها باستخدام دالة الاحتمال P(.) المعرفة على فراغ العينة S كما يلى:

بفرض أن E مجموعة جزئية فى R_1 ونريد معرفة احتمال أن المتغير العشوائى X ينتمى إلى المجموعة E فإن:

$$P(X \in E) = P(\{e : X(e) \in E\}) = P_X(E)$$

حيث E مجموعة جزئية بوراليه من مجموعة الأعداد الحقيقية R_1 (أى أن E حدث معين). بذلك نكون قد حددنا دالة احتمال للمتغير العشوائى X هى الدالة $P_X(E)$ التى تمثل احتمال تحقق الحدث E (أو احتمال المجموعة الجزئية البوراليه E من فراغ المتغير العشوائى X) باستخدام العلاقة:

$$(2.2.2):\ P_X(E) = P(X \in E) = P(\{e : X(e) \in E\}).$$

بهذه الدالة يمكن تحديد الاحتمالات المختلفة لأن ينتمى المتغير العشوائى X لأى مجموعة جزئية بوراليه من الفراغ R_1. من هذا نرى أن دالة الاحتمال $P_X(E)$ المرافقة للمتغير العشوائى X تقوم بنفس الدور الذى تقوم به دالة الاحتمال P(.) المرافقة لفراغ العينة S حيث أنها تقوم بتوزيع الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) على المجموعات الجزئية البوراليه المختلفة E لفراغ المتغير العشوائى X بحيث يكون ما يخص أى مجموعة E من الاحتمال الكلى هو الكمية $P_X(E)$ ــ لذلك يمكن استخدام المتغير العشوائى X ودالة الاحتمال المرافقة له $P_X(.)$ لدراسة الظواهر العشوائية بتكوين هيكل رياضى مناظر تماماً لفراغ الاحتمال (S, β, P) الذى يستخدم لتوزيع الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) على كل المجموعات الجزئية البوراليه لفراغ العينة S والتى تعتبر عناصر للعائلة β التى تسمى فراغ الأحداث. والهيكل الرياضى المناظر لفراغ الاحتمال هو فراغ احتمالى آخر خاص بالمتغير العشوائى X والدالة المرافقة له $P_X(.)$ ويمكن أن نرمز له بالرمز $(R_1, \beta_1, P_X(.))$ حيث R_1 هو خط الأعداد الحقيقية الذى قد يكون هو فراغ المتغير العشوائى X أو شاملاً لهذا الفراغ وβ_1 هى أصغر عائلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ R_1 و$P_X(.)$ هى دالة الاحتمال المعرفة بالعلاقة (2. 2. 2) والتى تحدد الاحتمال المناظر لكل مجموعة جزئية بوراليه فى الفراغ R_1. ومما هو جدير بالذكر أن كل ظاهرة عشوائية (أو تجربة عشوائية) يرافقها متغير عشوائى. والمتغيرات العشوائية ــ مثلها مثل الظواهر العشوائية قد تكون متقطعة (منفصلة) Discrete وقد تكون مستمرة (متصلة) Continuous. ويجب ملاحظة أن الظاهرة العشوائية

(أو التجربة العشوائية) التى تكون نتيجتها عدد حقيقى يكون فراغ العينة لها S هو نفسه فراغ المتغير العشوائى المرافق لها X وبالتالى تكون دالة الاحتمال P(.) المعرفة على فراغ العينة S هى نفسها الدالة $P_X(.)$ المعرفة على فراغ المتغير X. والمتغير العشوائى عندما يكون من النوع المتقطع يكون من السهل تحديد كل المجموعات الجزئية البوراليه لفراغه، كما تكون كل المجموعات الجزئية لفراغه مجموعات بوراليه، ولكن الأمر لا يكون بنفس السهولة فى حالة الظواهر العشوائية المتصلة. لهذا سنحاول فيما يلى تقديم مفهوم المتغير العشوائى X والدالة $P_X(.)$ المرافقة له والمعرفة على كل المجموعات الجزئية البوراليه المعرفة على فراغه بصورة أعمق بعض الشىء من حيث المعالجة الرياضية وذلك بتقديم ما يسمى بدالة كثافة احتمال المتغير العشوائى ودالة توزيعه الاحتمالى بهدف تكوين بنيان رياضى دقيق يمكن به إخضاع الظاهرة العشوائية للدراسة العلمية الدقيقة وتحديد خصائص الظواهر العشوائية المختلفة.

وحيث أنه قد سبق لنا فى الباب الأول من هذا الكتاب تقديم بعض المفاهيم الرياضية الأساسية واستخدام رموز معينة للإشارة إليها مثل فراغ الاحتمال (S, β, P) وخط الأعداد R_1 فى الفراغ ذو البعد الواحد، وقياساً على ذلك نرمز للفراغ ذو النون بعداً بالرمز R_n كما نستخدم التعبير المرتب $(X_1, ..., X_n)$ للدلالة على نقطة فى الفراغ R_n، كما نرمز لأصغر عائلة بوراليه فى الفراغ R_n بالرمز β_n. وعلى هذا فإن فراغات الاحتمال (R_n, β_n, P) لجميع قيم $n = 1, 2, ...$ تلعب دوراً أساسياً وهاماً فى الدراسات الإحصائية موضوع هذا الكتاب. ونبدأ الآن بتقديم تعريف دقيق للمتغير العشوائى.

(2 ــ 3) تعريف المتغير العشوائى (I):

إذا كان (S, β, P) فراغ احتمال و X(e) دالة حقيقية (Real) وحيدة القيمة Single Valued – معرفة على كل عنصر (أو نقطة عينة) e فى فراغ العينة S ــ والحدث E_r يمثل مجموعة جزئية من S هى:

$$(2.3.1):\ E_r = \{e : X(e) \le r\}$$

لكل عدد حقيقى r ــ فإذا كان أى حدث E_r عنصراً فى العائلة β (التى تمثل فراغ الأحداث) فإن الدالة X(e) تسمى "متغيراً عشوائياً" مرافقاً للعائلة β "Random Variable relative to β" أو "دالة مقيسة" أو "دالة بوراليه مقيسة" "β - measurable function".

والتعريف السابق يتضمن شرط هام هو أن تكون المجموعة E_r عنصراً فى العائلة البوراليه β $(E_r \in \beta)$ التى تمثل فراغ الأحداث وهذا يؤكد أن اهتمامنا منصب على المجموعات المقيسة فقط والتى تعتبر أحداثاً نهتم بها أما المجموعات التى لا يمكن اعتبارها عنصراً فى العائلة β فإنها تعتبر مجموعات غير مقيسة ولا نعتبرها أحداث ولا

نهتم بحساب احتمال تحقق أى منها وبالتالى فإن مثل هـذه المجموعـات لا تؤخـذ فـى الاعتبار عند تعريف المتغير العشوائى.

إذا كانت β_1 تمثل أصغر عائلة بوراليه للمجموعات البوراليه فى خط الأعداد R_1 ـ والمتغير العشوائى $X(e)$ يمثل دالة تحدد لكل نقطة e فى فراغ العينة S عـدداً حقيقيـاً وحيداً فى الفراغ R_1 بطريقة ما بحيث أن لكل مجموعـة بوراليـه A فـى العائلـة β_1 $(A \in \beta_1)$ يوجد مجموعة (أو حدث) E فى فراغ الأحداث β [$E \in \beta$ ونستخدم الرمز $\in$ لأن A، E عناصر فى كلٍ من β_1، β وليست مجموعات جزئية فيهما] بحيث يتكون E من كل العناصر e لفراغ العينة S التى تحقق العلاقة:

$$(2.3.2):\ X(e) \in A$$

أى أن المجموعة E تنتقل بواسطة الدالة $X(e)$ إلى المجموعة A وهذا ما نعبـر عنه داليا بالعلاقة:

$$(2.3.3):\ E \xrightarrow{x(e)} A$$

حيث A تسمى صورة (image) للمجموعة E وهذا يمكن التعبير عنـه رمزيـاً بصورة قياسية كما يلى:

$$(2.3.4):\ E = X^{-1}(A)$$

حيث E تسمى صورة عكسية (inverse image) للمجموعة A. وبذلك فإن احتمالات المجموعات البوراليه التى تمثل عناصر العائلة β_1 يمكن تحديدها باسـتخدام احتمـالات العناصر المناظرة فى العائلة β وذلك كما يلى:

نعلم أن : $A \in \beta_1$ ، $E \in \beta$ فإذا كان فراغ الاحتمال المرافق لفراغ العينة S هو (S, β, P) فإن احتمال تحقق الحدث E (الذى يعتبر عنصراً فى β) هو $P(E)$ ـ وإذا رمزنا لاحتمال تحقق الحدث A (الذى يعتبر عنصراً فى β_1) بالرمز $P_X(A)$ فإن:

$$P_X(A) = P(E)$$

ومن العلاقة (2.3.4) نجد أن:

$$(2.3.5):\ P_X(A) = P(E) = P\left[X^{-1}(A)\right]$$

وبهذا يمكن استخدام فراغ الاحتمال (S, β, P) المرافق لفراغ العينة S لتحديـد أو استنباط فراغ الاحتمال (R_1, β_1, P_X) المرافق لخط الأعداد R_1. ومـن السـهل إثبـات أن (R_1, β_1, P_X) تمثل فراغ احتمال وهذا متروك للطالب.

قدمنا حتى الآن حالة متغير عشوائى واحد على فراغ العينة S وهذه تسمى حالـة المتغير العشوائى المفرد Single Random Variable ويمكن تعريـف أكثـر مـن متغيـر

عشوائى على فراغ العينة S وهو ما يسمى بحالة المتغير العشوائى متعدد المركبات أو المتغير العشوائى المشترك Multi – Component Random Variable or Joint Random Variable فإذا كان لدينا فراغ احتمال معين (S, β, P) وكانت $X_1(e), ..., X_n(e)$ تمثل n من المتغيرات العشوائية ــ والحدث $E_{r_1, ..., r_n}$ يتكون من كل العناصر e للفراغ S التى تحقق العلاقات الآتية:

$X_i(e) \le r_i$ لجميع قيم $i = 1, 2, .., n$ حيث r_i عدد حقيقى ــ أى أن:

$$(2.3.6):\ E_{r_1, ..., r_n} = \{e : X_1(e) \le r_1, \dots, X_n(e) \le r_n\}$$

حيث $r_1, \dots, r_n$ أعداد حقيقية.

فإن الحدث $E_{r_1, ..., r_n}$ يعتبر عنصراً فى العائلة البوراليه β (التى تمثل فراغ الأحداث لفراغ العينة S) كما أن $(X_1(e), ..., X_n(e))$ يسمى "متغير عشوائى مشترك" مرافق للعائلة β_n أو "متغير عشوائى متعدد المركبات عدد مركباته n" أو "متغير عشوائى متعدد بورالى مقيس عدد مركباته n" β - measurable n – dimensional r. v. وعادة نطلق عليه مجرد اسم "متغير عشوائى متعدد" للسهولة. كما أن احتمال أن المتغيرات العشوائية تحقق العلاقات $X_i(e) \le r_i$ لجميع قيم $i = 1, 2, \dots, n$ يمكن الحصول عليها بدلالة احتمال تحقق المجموعة $E_{r_1, ..., r_n}$ المعطاة بالعلاقة (2.3.6) كما يلى:

$$P_{X_1, ..., X_n}(X_1(e) \le r_1, \dots, X_n(e) \le r_n) = P(E_{r_1, ..., r_n})$$

كذلك إذا كانت العائلة β_n هى عائلة المجموعات البوراليه لكل المجموعات الجزئية للفراغ R_n وكانت المجموعة A_n تتبع العائلة β_n $(A_n \in \beta_n)$ ــ فإن المجموعة E التى تتكون من كل العناصر e لفراغ العينة S والتى تحقق العلاقة:

$$\{X_1(e), \dots, X_n(e)\} \in A_n$$

تكون هى الأخرى إحدى عناصر العائلة β $(E \in \beta)$ ــ أى أن A_n تعتبر صورة للمجموعة E كما أن E تعتبر الصورة العكسية للمجموعة A_n وبالتالى فإن:

$$P_{X_1, ..., X_n}(A_n) = P(E)$$

وبهذا يمكن تحديد احتمال أى مجموعة A_n من عناصر العائلة β_n وذلك بتحديد احتمال المجموعة E (الصورة العكسية لـ A_n) المناظرة لها فى العائلة β. وبهذا يمكن أن نستنبط فراغ الاحتمال $(R_n, \beta_n, P_{X_1, ..., X_n})$ من فراغ الاحتمال (S, β, P) بواسطة المتغيرات العشوائية $X_1(e), \dots, X_n(e)$.

وإذا كانت العلاقة $|X(e)| < C$ صحيحة ــ حيث C عدد حقيقي محدود $(C < +\infty)$ لكل عنصر e من عناصر فراغ العينة S فإن X(e) يسمى متغيراً عشوائياً محدوداً (a bounded r. v.) والمتغير العشوائى المتعدد الذى عدد مركباته n يكون محدوداً إذا كانت كل مركبة من مركباته محدودة. ويمكن توضيح مفهوم المتغير العشوائى المفرد وكذلك المشترك بتقديم بعض الأمثلة التوضيحية.

مثال (2 ــ 3 ــ 1): عند إلقاء قطعتى عملة متزنة مرة واحدة يكون فراغ العينة هو:

$$S = \{TT, TH, HT, HH\}$$

حيث H ترمز للصورة، T للكتابة

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

وحيث أن الأحداث البسيطة e_1, e_2, e_3, e_4 متماثلة وشاملة ومتنافية فإن

$$P(\{e_1\}) = \cdots = P(\{e_4\}) = \frac{1}{4}$$

وهذا يحدد دالة الاحتمال P المرافقة لفراغ العينة S ويمكن كذلك تحديد العائلة β التى تمثل فراغ الأحداث كما يلى:

$$\beta = \{\phi, \{e_1\}, \ldots, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \ldots, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \\ \ldots, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$$

ويمكن باستخدام الدالة P(.) حساب احتمال أى عنصر من عناصر العائلة β فمثلاً احتمال العنصر $\{e_2, e_3\}$ هو احتمال الحصول على صورة واحدة:

$$P(\{e_2, e_3\}) = P(\text{one Head}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وهكذا.

وبهذا يتحدد فراغ الاحتمال (S, β, P) والذى يمكن بواسطته تحديد الاحتمال المخصص لأى عنصر من عناصر β (أى لأى مجموعة جزئية من S). فإذا كان المتغير العشوائى X يمثل عدد الصور فإن:

$$X(e_1) = 0 \;\;,\;\; X(e_2) = X(e_3) = 1 \;\;,\;\; X(e_4) = 2$$

فيمكن تحديد فراغ العينة للمتغير العشوائى X(.) بأنه

$$A = \{0, 1, 2\}$$

فإذا رمزنا لفراغ الاحتمال المرافق للمتغير العشوائى X بأنه $(A, \beta_1, P_X(.))$ فيمكن تحديد كلٍ من β_1، $P_X(.)$ كما يلى:

باستخدام العلاقة (2. 3. 5) نجد أن:

$$P_X(\{0\}) = P[X^{-1}(\{0\})] = P[e_1] = \frac{1}{4}$$

وبالمثل

$$P_X(\{1\}) = P[X^{-1}(\{1\})] = P[\{e_2\} \cup \{e_3\}] = \frac{1}{2}$$

$$P_X(\{2\}) = P[X^{-1}(\{2\})] = P[e_4] = \frac{1}{4}$$

ويمكن تلخيص قيم X(.) والاحتمالات المناظرة فى الجدول التالى:

X(.)	0	1	2	Σ
$P_X(.)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

والجدول السابق يوضح الطريقة التى توزع بها الدالة $P_X(.)$ الاحتمال الكلى الـذى يعادل الوحدة على قيم المتغير العشوائى X وهو ما يسمى بالتوزيع الاحتمالى للمتغيـر X كما سنوضح فيما بعد. ويمكن تحديد العائلة β_1 التى تتكون من كل المجموعات الجزئيـة البوراليه للمجموعة A فى الصورة التالية:

$$\beta_1 = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

وباستخدام الدالة $P_X(.)$ يمكن تحديد الاحتمال لأى عنصر من عناصر العائلة β_1 ــ فمثلاً احتمال العنصر $\{0,1\}$ هو:

$$P_X(\{0,1\}) = P[X = 0 \text{ or } X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

وهكذا بالنسبة لباقى عناصر β_1.

مما سبق يتضح أن فراغ الاحتمال المرافق لفراغ العينة A للمتغيـر X هــو (A, β_1, P_X) وهذا الفراغ يمكن استنباطه من فراغ الاحتمال (S, β, P) المرافــق لفــراغ العينة S.

وسوف نقدم الآن مثال توضيحى لمناقشة حالة متغيرين والتى يمكن تعميمها إلى حالة أكثر من متغيرين.

مثال (2 ــ 3 ــ 2): عند إلقاء قطعة عملة متزنة ثلاث مرات متتالية مع الاهتمام بالترتيب ــ إذا كان المتغير X_1 هو عدد الصور فى الرميتين الأولى والثانية والمتغير X_2 هو عدد الصور فى الرميات الثلاث. سنجد أن فراغ العينة هو:

$$S = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$
$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

كما أن X_1، X_2 يمكن اعتبارهما دالتين معرفتين على فراغ العينة S حيث أن:

$$X_1(e_1) = X_1(e_2) = 0 \;;\; X_1(e_3) = X_1(e_4)$$
$$= X_1(e_5) = X_1(e_6) = 1 \;;\; X_1(e_7) = X_1(e_8) = 2$$

و

$$X_2(e_1) = 0 \;,\; X_2(e_2) = X_2(e_3) = X_2(e_4) = 1$$
$$;\; X_2(e_5) = X_2(e_6) = X_2(e_7) = 2 \;;\; X_2(e_8) = 3.$$

إذن X_1، X_2 دالتان حقيقيتان وحيدتا القيمة معرفتان على فراغ العينة S وينقلاننا من فراغ العينة S إلى الفراغ التالى:

$$A = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\}$$

وهى مجموعة من النقط فى المستوى ذو البعدين. ولذلك نقول أن A هو الفـــراغ المرافق للمتغير الثنائى (X_1, X_2). فإذا كانت المجموعة E تمثل مجموعة جزئية من A $(E \subset A)$ فإننا نرغب فى حســاب احتمـــال الحـــدث E والـــذى نرمـــز لـــه بـــالرمز $P[(X_1, X_2) \in E]$. نفرض أن C هى المجموعة الجزئية التى تتكون من كل العناصر e لفراغ العينة S والتى تحقق العلاقات $\{X_1(e), X_2(e)\} \in E$ أى:

$$C = \{e : \{X_1(e), X_2(e)\} \in E\}$$

إذن

$$(2.3.7):\; P_{X_1,X_2}(E) = P[\{X_1(e), X_2(e)\} \in E] = P[C].$$

حيث P هى دالة الاحتمال المعرفة فى فراغ الاحتمال (S, β, P) وبالتالى يمكــن استخدام دالة الاحتمال $P_{X_1,X_2}(.)$ لتحديد الاحتمال لأى مجموعة جزئية من الفراغ A ــ فإذا كانت E مجموعة جزئية من الفراغ A هى مثلا:

$$(2.3.8):\; E = \{(0,1) \;,\; (1,2)\}$$

ونرغب فى حساب احتمال الحدث E سنجد من العلاقة (2. 3. 7) أن

$$P_{X_1,X_2}(E) = P(C)$$

حيث C تتكون من كل عناصر فراغ العينة S التى تكون فيها المتغيـــران (X_1, X_2) تحققان العلاقة $(X_1, X_2) \in E$ وهذا يتحقق بالنسبة للعناصر التالية:

$$e_2 = TTH \; ; X_1(e_2) = 0 \; , \; X_2(e_2) = 1$$
$$e_5 = THH \; ; X_1(e_5) = 1 \; , \; X_2(e_5) = 2$$
$$e_6 = HTH \; ; X_1(e_6) = 1 \; , \; X_2(e_6) = 2$$
$$\therefore C = \{e_2, e_5, e_6\}$$

$$(2.\,3.\,9):\; P_{X_1,X_2}(E) = P(C) = P[\{e_2, e_5, e_6\}] = \frac{3}{8}.$$

حيث أن دالة الاحتمال P(.) تخصص احتمال يساوى $\frac{1}{8}$ لكل عنصـــر e مـــن عناصر فراغ العينة S. ويمكن إيجاد احتمالات كل عناصر الفـــراغ A ووضـــعها فـــى الجدول التالى:

(X_1, X_2)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	Σ
P_{X_1,X_2}	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

وهذا الجدول يوضح الطريقة التى يمكن أن نستخدم بها دالـــة الاحتمـــال P_{X_1,X_2} لتوزيع الاحتمال الكلى الذى يساوى الوحدة على قيم المتغير الثنائى (X_1, X_2) وهـــو مـــا يسمى بالتوزيع الاحتمالى لهذا المتغير الثنائى. ويمكن تحديد العائلة β_2 التى تتكون من كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ A واستخدام الدالـــة P_{X_1,X_2} لتحديـــد احتمـــال أى عنصر من عناصر العائلة β_2 مثل الاحتمال (2. 3. 9) الذى يحدد احتمال الحدث E المعطى بالعلاقة (2. 3. 8) ويتضح من ذلك أن فراغ الاحتمال المناظر لفراغ المتغير المشتـــــرك (X_1, X_2) والذى نرمز له بالرمـــز $(A \,,\, \beta_2 \,,\, P_{X_1,X_2})$ يمكن استنباطه من فراغ الاحتمال (S, β, P) المرافق لفراغ العينة S.

ولتبسيط الكتابة فإننا بدلاً من أن نستخدم الرمز X(e) أو X(.) للإشارة إلى المتغير العشوائى فإننا سنكتفى باستخدام الرمز X كما نستخدم الرمز P(E) بدلاً من $P_X(E)$ للإشارة إلى احتمال أن ينتمى المتغير العشوائى X للمجموعة E. ونفس الشىء بالنســبة للمتغيــر المشترك إذ أننا سوف نعتاد على استخدام الرمز (X_1, X_2) بدلاً من $(X_1(e), X_2(e))$ وكذلك

$P[E]$ بدلا من $P_{X_1,X_2}[E]$ وذلك لتبسيط الكتابة مادام معروف من سياق العرض أن $P(E)$ هى دالة الاحتمال المرافقة للمتغير الثنائى (X_1, X_2) ــ وسوف نتبع هذا الاختصار فى الكتابة بالنسبة لأى متغير مفرد أو متعدد. وعادة نرمز للمتغيرات العشوائية بالأحرف اللاتينية الكبيرة:

X, Y, Z, U, V, T, R, ...

ونرمز لأى قيمة معينة من قيم المتغير العشوائى بالحرف اللاتينى الصغير المقابل ــ فإذا كان المتغير العشوائى هو Y فإن أى قيمة معينة منه يمكن أن نرمز لها بالحرف الصغير y وبالتالى فإن القيم الخاصة للمتغيرات العشوائية يمكن أن نرمز لها بالأحرف الصغيرة:

x, y, z, u, v, t, r, ...

ومن تعريف المتغير العشوائى نرى أن مجاله عناصر فراغ العينة S ومجاله المقابل (مداه) يقع فى مجموعة الأعداد الحقيقية R_1 حيث أشرنا إلى أن المتغير العشوائى عبارة عن دالة حقيقية وحيدة القيمة تنقل من S إلى R_1 أو هى علاقة من S إلى R_1 أو بصورة رمزية $S \xrightarrow{X} R_1$ ومعنى ذلك أن مدى أى متغير عشوائى X يمكن تمثيله بمجموعة A تسمى بفراغ العينة للمتغير العشوائى X أو تسمى بفراغ المتغير العشوائى X. والمجموعة A قد تكون مجموعة جزئية من R_1 وقد تشمل كل خط الأعداد الحقيقية R_1 أى أن $A \subset R_1$. فإذا كانت المجموعة A التى تمثل فراغ المتغير X تتميز بأنها تشتمل على عدد محدود من النقط على الأكثر فى كل فترة محدودة فى R_1 فإن هذه المجموعة (A) تسمى مجموعة من النقط المنفصلة وأى متغير عشوائى X مداه مجموعة منفصلة A يسمى متغير منفصل أو متغير متقطع Discrete r. v. ــ أما إذا كانت المجموعة A تحتوى على عدد غير محدود من النقط فى كل فترة محدودة فى R_1 فإن هذه المجموعة (A) تسمى مجموعة متصلة من النقط وكذلك المتغير X يسمى متغير مستمر أو متغير متصل.Continuous r. v.

وأى متغير عشوائى X يكون فراغه خط الأعداد R_1 أو مجموعة جزئية منه وتكون له دالة الاحتمال $P_X(.)$ المعطاة بالعلاقة (2 .2 .2) والتى تحدد الاحتمال لكل مجموعة جزئية بوراليه فى الفراغ R_1، يكون فراغ الاحتمال لهذا المتغير هو (R_1, β_1, P_X) حيث β_1 هى أصغر عائلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ R_1. وهنا نستخدم الدليل 1 للإشارة إلى أن كلٍ من الفراغ R_1 والعائلة β_1 هما للمتغير المفرد X تمييزاً لهما عن الفراغ R_2 والعائلة β_2 اللتان تكونا للمتغير الثنائى (X_1, X_2) وكذلك R_n، β_n للمتغير المتعدد $(X_1, ..., X_n)$ كما سنقدم ذلك فيما بعد.

سبق أن ذكرنا أن الدالة (أو المتغير العشوائى) X تنقل من فراغ العينة S إلى خط الأعداد الحقيقية R_1 $\left(S \xrightarrow{X} R_1\right)$ وبناء على ذلك فإن لكل مجموعة من النقط E فى R_1 يوجد مجموعة من النقط (أو العناصر) C فى S تتكون من كل عناصر S التى تحقق

العلاقة $E \xrightarrow{X} C$ وهذا يمكن التعبير عنه رمزياً بصورة مناسبة كما سبق القول على النحو التالى:

$$X^{-1}(E) = C$$

حيث E تسمى صورة المجموعة C والمجموعة C تسمى الصورة العكسية للمجموعة E. وباستخدام هذا الترميز يمكن وضع التعريف المرادف التالى للمتغير العشوائى:

(2 ــ 4) تعريف المتغير العشوائى (II):

الدالة X تسمى متغيراً عشوائياً، إذا وفقط إذا، كان:

$$X^{-1}(-\infty, x] \in \beta$$

لجميع الأعداد الحقيقية x.

حيث β هى فراغ الأحداث المناظر لفراغ العينة S، $(-\infty, x]$ هــى مجموعــة النقط على خط الأعداد الحقيقية من ∞- وحتى x حيث x عدد حقيقى يمثــل إحــدى قــيم المتغير العشوائى X.

ذكرنا سابقاً أن فراغ الاحتمال (R_1, β_1, P_X) للمتغير العشوائى X يتم استنباطه من فراغ الاحتمال (S, β, P) المرافق لفراغ العينة S وذلك لاستخدامه فى تحديد احتمال كــل عنصر من عناصر العائلة β_1 التى تمثل كل المجموعات الجزئية البوراليه للفــراغ R_1 ــ ومن أهم المجموعات الجزئية البوراليه فى الفراغ R_1 ــ بل أهم هذه المجموعات علــى الإطلاق ــ هى المجموعة (أو الفترة) التالية:

$$(2.4.1):\quad E_x = \{X : X \le x\} = (-\infty, x]$$

وهى الفترة التى تتكون من جميع النقط على خط الأعداد الحقيقيــة R_1 مــن ∞- وحتى قيمة معينة x. واحتمال هذه المجموعة يعتبر دالة فى x ــ وهى دالة من أهم الدوال التى تستخدم فى نظرية التوزيعات فى الإحصاء الرياضى لأهمية استخدامها فى توزيــع الاحتمال الكلى على فراغ المتغير العشوائى وتحديد الاحتمال لكل مجموعة جزئية بوراليه فى هذا الفراغ ــ لــذلك يوضــع لهــذه الدالــة تســمية خاصــة ويســتخدم للإشــارة إليهــا رمــز خــاص ــ فيطلــق عليهــا اســم "دالــة التوزيــع الاحتمــالى" Probability Distribution Function (D. F.) لأهمية اســتخدامها فــى توزيــع الاحتمــال ويستخدم لها غالباً الرمز F(x) لأنها دالة فى القيمة x التى تعتبــر إحــدى قــيم المتغيــر العشوائى X. لذلك سنقدم فيما يلى تعريف وخصائص دالة التوزيع الاحتمالى لكل من:

الفصل الثاني ـ المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالى

أولاً: المتغير المفرد (المتقطع والمستمر والمختلط)

ثانياً: المتغير المتعدد

كما سنقدم دالة أخرى شديدة الاتصال بدالة التوزيع الاحتمالى تسمى "بدالة كثافة الاحتمال" Probability Density Function للمتغير المستمر أو "دالة الاحتمال" Probability Function للمتغير المتقطع.

(2 ـ 5) دوال التوزيع الاحتمالى للمتغيرات العشوائية المفردة:

Distribution Functions of One – dimensional Random Variable:

(2 ـ 5 ـ 1) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المفرد:

نفرض أن X متغير عشوائى فراغه الاحتمالى (R_1, β_1, P_X) ـ حيث R_1 خط الأعداد الحقيقية وβ_1 أصغر عائلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ R_1 وP_X دالة الاحتمال المرافقة للمتغير X. سنرى أن توزيع الاحتمال الكلى على فراغ المتغير X فى R_1 يمكن أن يتم باستخدام دالة تسمى "دالة التوزيع الاحتمالى" "Distribution Function" F(x) للمتغير المفرد X معرفة عند كل نقطة فى الفراغ R_1 ولها خصائص معينة. لذلك سنعرف أولاً دالة التوزيع الاحتمالى F(x) ثم نقدم خصائصها بعد ذلك. وسيستخدم الرمز Pr للدلالة على الاحتمال بدلاً من الرمز P حيث يخصص الرمز P للإشارة إلى دالة احتمال المتغير المتقطع.

تعريف (2 ـ 5 ـ 1) دالة التوزيع الاحتمالى:

لأى فترة $(-\infty, x]$ على خط الأعداد R_1 ـ والتى تعتبر عنصراً من عناصر العائلة β_1 ـ يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالى F(x) للمتغير العشوائى X كما يلى:

$$(2.5.1):\ F(x) = Pr(X \le x)$$

لأى عدد حقيقى x.

ومن التعريف السابق يتضح أن F(x) دالة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة لجميع قيم x فى الفراغ R_1 وهى دالة نقطة وليست دالة مجموعة.

نرى مما تقدم فى البنود (2 ـ 2) حتى (2 ـ 4) أن أى متغير عشوائى X يكون له توزيع احتمالى معين فى الفراغ R_1. والاحتمال الكلى الذى يساوى الوحدة يمكن تمثيله مادياً بتوزيع كتلة (من مادة ما) وزنها يساوى الوحدة (وحدة الوزن) على جميع نقط الفراغ R_1 بطريقة ما بحيث أن الكمية P(E) تكون هى تلك الجزء من الكتلة التى تختص بها المجموعة البوراليه E $(E \subset R_1)$ وهذه الكمية تمثل احتمال أن المتغير العشوائى X يأخذ قيمة تقع داخل المجموعة E. كما أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) تمثل ذلك الجزء

من الكتلة الذى تختص به الفتـــرة $(-\infty, \ x]$ وهـــو طبعاً كسر أقل من أو يساوى الواحـــد الصحيح.

وفى الواقع أمامنا أحد أسلوبين مترادفين لتوزيع الاحتمالى الكلى (الـــذى يســـاوى الوحدة) للمتغير العشوائى. الأول باستخدام دالة الاحتمال $P(.)$ والتى تسمى دالة احتمـــال المتغير العشوائى والمعرفة بالعلاقة (2. 2. 2) وهى دالة مجموعة والثانى باستخدام دالـــة نقطة هى دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ والمعرفة بالعلاقة (2. 5. 1). ولكننا فى الواقع سوف نستخدم دائماً دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ لتوزيع الاحتمال الكلى للمتغير العشوائى علـــى المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ R_1. ومما هو جدير بالذكر أن الأسلوبين متـــرادفين ومتكافئين وذلك لوجود علاقة تبادل وحيدة $(1 - 1)$ بين دالة الاحتمال $P(.)$ ودالة التوزيـــع الاحتمالى $F(.)$ لأى متغير عشوائى X. وسنقدم فيما يلى خصائص دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ وبعد ذلك نقدم مثالين توضيحيين نستعرض من خلالهما دالة توزيع احتمالى لمتغير متقطع وأخرى لمتغير مستمر حتى يساعد ذلك على سهولة عرض وفهم خصائص دالـــة التوزيع الاحتمالى بصفة عامة، ولكن قبل ذلك نقدم الملاحظة التالية:

ملاحظة (2 ــ 5 ــ 1): المجموعات الخطية التى نهـــتم بهـــا والتـــى ســـتواجهنا طـــوال دراستنا فى بقية هذا الكتاب (والتى تعتبر مجموعات جزئية من خـــط الأعـــداد الحقيقيـــة R_1) كلها مجموعات بوراليه مقيسة ــ وكذلك الدوال التى سوف نتناولها فى بقية هذا الكتاب كلها دوال بوراليه مقيسة ــ لذلك سنكتفى دائماً فى بقية هـــذا الكتـــاب بذكر كلمة مجموعة (أو دالة) دون أن نذكر صراحة أن المجموعة (أو الدالة) بوراليـــه مقيسة (إلا إذا دعت الحاجة لذلك) وذلك يجب أن يكون مفهوم دائماً دون ذكره صراحة.

(2 ــ 5 ــ 2) خصـــائص دالـــة التوزيـــع الاحتمـــالى Properties of The Distribution Function:

دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ للمتغير العشوائى المفرد X تتميز بالخصائص التالية:

(1) $F(x)$ دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة وتنحصر بين الصفر والواحد الصحيح.

وذلك لأن من العلاقة (2. 5. 1) نرى أن

$$F(x) = \Pr(X \le x)$$

والدالة $\Pr(.)$ دالة احتمال فهى حقيقية وحيدة القيمة موجبة وتنحصر بين الصـــفر والواحد الصحيح كما يتضح من التعريف الحديث للاحتمال فى الباب الأول.

(2) $$(2.\,5.\,2):\quad F(-\infty) = 0 \quad ; \quad F(+\infty) = 1$$

وذلك لأنه:

باستخدام المجموعة E_x المعطاة بالعلاقة (2. 4. 1) نجد أن:

$$E_{-1} \supset E_{-2} \supset ....$$

وهى مجموعات مضطردة (غير تزايدية) لها نهاية موجودة هى المجموعة الفارغة ϕ:

$$\lim_{x\to\infty} E_{-x} = \phi$$

وباستخدام العلاقة (1. 13. 12) نجد أن:

$$F(-\infty) = \lim_{x\to\infty} F(-x) = \lim_{x\to\infty} \Pr(E_{-x})$$
$$= \Pr\left(\lim_{x\to\infty} E_{-x}\right) = \Pr(\phi) = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $F(+\infty) = 1$ إذا اعتبرنا المجموعات المضــطردة غيــر التناقصية

$$E_1 \subset E_2 \subset ...$$

حيث

$$\lim_{x\to\infty} E_x = R_1.$$

$$F(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \Pr(E_x)$$
$$= \Pr\left(\lim_{x\to\infty} E_x\right) = \Pr(R_1) = 1.$$

(3) F(x) دالة غير تناقصية F(x) Non - decreasing Function:

أى أنه إذا كانت $a < b$ فإن

$$(2.\ 5.\ 3):\ F(b) \geq F(a)\ ;\ a < b$$

وذلك لأن من (2. 5. 1)

$$(2.\ 5.\ 4):\ F(b) - F(a) = \Pr(-\infty < X \leq b) - \Pr(-\infty < X \leq a)$$
$$= \Pr(a < X \leq b) \geq 0$$

إذن

$$F(b) \geq F(a)$$

(4) F(x) دالة مستمرة من ناحية اليمين عند كل قيم المتغير العشوائى X:

The Function F(x) is Continuous on the Right at each Value of X:

أى أن:

$$(2.5.5):\ F(x+0) = F(x)$$

$$F(x-0) \leq F(x)$$

[حيث $x + 0$ تعتبر (تصوريا) النقطة التالية مباشرة للنقطة x من ناحية اليمين و $x - 0$ هى السابقة لها مباشرة من ناحية اليسار.]

(الإثبات)

من العلاقة (2.5.1) نرى أن:

$$\lim_{x \to a+0} F(x) = \lim_{x \to a+0} \Pr(E_x)$$

حيث E_x هى الفترة $(-\infty, x]$ وباستخدام العلاقة (1.13.12) نجد أن:

$$\lim_{x \to a+0} F(x) = \Pr(\lim_{x \to a+0} E_x) = \Pr(E_{a+0}) = F(a+0)$$

أى أن:

$$(1)\ \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a+0)$$

وبالمثل:

$$(2)\ \lim_{x \to a-0} F(x) = F(a-0)$$

وبما أن الدالة F(x) دالة غير تناقصية إذن

$$(3)\ F(a-0) \leq F(a+0)$$

ولأى قيمة x عندما $x > a$ تكون:

$$(4)\ F(x) - F(a) = \Pr(a < X \leq x) = \Pr(I_x)$$

حيث

$$(5)\ I_x = \{X : a < X \leq x\}$$

وعندما تأخذ x قيم متناقصة مقتربة من النقطة a تكون I_x متتابعة من المجموعات المضطردة التناقصية لها نهاية محددة عندما $x \leftarrow a$ هى

$$(6)\ \lim_{x\to a} I_x = \phi \quad (\text{المجموعة الفارغة})$$

ومن العلاقة (12 .13 .1) من الباب الأول نجد أن:

$$\lim_{x\to a} \Pr(I_x) = \Pr(\lim_{x\to a} I_x)$$

ومن (4)، (5) مع العلاقة السابقة نجد أن:

$$\lim_{x\to a}(F(x) - F(a)) = \Pr(\lim_{x\to a} I_x) = \Pr(\phi) = 0$$

ومن (4)، (1) ــ مع الأخذ فى الاعتبار أن $x > a$ ــ نجد أن العلاقة السابقة تصبح:

$$F(a+0) - F(a) = 0$$

إذن:

$$(7)\ F(a+0) = F(a)$$

وبالمثل عندما $X < a$ تكون:

$$F(a) - F(x) = \Pr(x < X \le a)$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to a}\{x : x < X \le a\} = \{a\}$$

أى أن نهاية الفترة $(x, a]$ عندما $x \to a$ تكون هى المجموعة $\{a\}$ التى تتكون من نقطة واحدة هى النقطة $X = a$ ــ وهذا على خلاف العلاقة (6) السابقة ــ إذن يمكن بأسلوب مماثل لما سبق أن نصل إلى أن:

$$(8)\ F(a) - F(a-0) = \Pr(X = a)$$

أو أن:

$$(9)\ F(a-0) = F(a) - \Pr(X = a) \le F(a)$$

من (7)، (9) نرى أن الدالة F(x) دائماً مستمرة من ناحية اليمين.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (2 ــ 5 ــ 2): بكتابة العلاقة (8) فى الإثبات السابق فى الصورة التالية:

$$(2.5.6):\ Pr(X = x) = F(x) - F(x - 0).$$

نرى أنه إذا كانت $Pr(X = x) > 0$ تكون الدالة F(x) غيـر مسـتمرة عنـد النقطة $X = x$ ــ وتقفز الدالة عند هذه النقطة قفزة تساوى الاحتمال $Pr(X = x)$ ــ أما إذا كانت $Pr(X = x) = 0$ تكون الدالة F(x) مستمرة عند هذه النقطة.

يمكن الآن تلخيص ما سبق فى التعريف التالى:

تعريف (2 ــ 5 ــ 2) دالة التوزيع الاحتمالى F(x) للمتغيـر المفـرد X وتحديـد خصائصها:

من فراغ الاحتمال (R_1, β_1, P) للمتغير العشوائى المفرد X يمكـن تحديـد دالـة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة تسمى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$(2.5.7):\ F(x) = Pr(X \leq x)$$

وذلك لجميع قيم x فى خط الأعداد الحقيقية R_1 وتتميز بالخصائص التالية:

$$(2.5.8):\ (a)\ F(-\infty) = 0\ ,\ F(+\infty) = 1$$

$$(b)\ F(b) \geq F(a)$$

عندما $b > a$ لجميع الأعداد الحقيقية a، b $(a < b)$

$$(c)\ F(x + 0) = F(x)$$

$$F(x - 0) \leq F(x)$$

أى أن الدالة مستمرة من ناحية اليمين.

بعد تقديم دالة التوزيع الاحتمالى وتحديد خصائصها فـى البنـد السـابق (2 ــ 5) سنتعامل مع نوعين أساسيين من المتغيرات العشوائية المفردة هما: المتغيرات المتقطعـة والمتغيرات المستمرة ــ كما يوجد نوع آخر أقل منهما فى العموميـة هـى المتغيـرات العشوائية المختلطة وهو كما يبدو من التسمية خليط من النـوعين المتقطـع والمسـتمر. وسنقدم كل نوع من هذه الأنواع الثلاثة على حده. وحيث أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) وكذلك الاحتمالات المختلفة P(E) للمجموعات الجزئية المختلفة E مـن فـراغ المتغيـر العشوائى يمكن الحصول عليها باستخدام دالة معينة تسمى دالة كثافـة الاحتمـال، لـذلك سنقدم أيضاً دالة التوزيع الاحتمالى وكذلك دالة كثافة الاحتمال والعلاقة بينهما واسـتخدام كلٍ منهما فى حساب الاحتمالات المختلفة بالنسبة لكل نوع من الأنواع الثلاثة (المتقطعـة والمستمرة والمختلطة) فى البنود (2 ــ 6) و(2 ــ 7) و(2 ــ 8) على الترتيب.

(2 ــ 6) دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغيــر العشــوائى المتقطــع Distribution Function & Density Function of The Discrete r. v.:

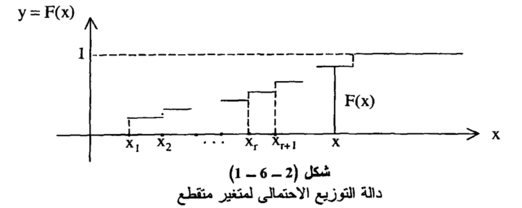
دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ للمتغير المتقطع X تسمى دالة توزيع احتمــالى مــن النوع المتقطع ــ وهى دالة مستمرة من ناحية اليمين فقط (أى أن استمرارها ليس مطلقاً) ــ فهى غير مستمرة عند مجموعة من النقط S عى خط الأعــداد الحقيقيــة R_1 (تمثــل مجموعة القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير X) هذه المجموعة (S) تكون على أكثر تقدير مجموعة قابلة للعد (أى أن عدد نقط S إما محدود أو لانهائى قابل للعد) وذلك لأى متغير عشوائى متقطع X ــ وكل نقطة x من نقط المجموعة S تمثل حدث بسيط احتماله موجب أى أن:

$\Pr(X = x) > 0$ عندما $x \in S$ وهذا الاحتمال معطى بالعلاقة (2. 5. 6) كما يلى:

$$\Pr(X = x) = F(x) - F(x - 0)$$

وعند أى نقطة أخرى x' فى R_1، $\Pr(X = x') = 0$.

وهذا يوضح إن قيمة الاحتمال $\Pr(X = x)$ عند نقط المجموعة S يساوى الفرق بين قيمة دالة التوزيع الاحتمالى عند النقطة x وقيمتها عند النقطة التى تسبق x مباشــرة مما نعبر عنه بالقول أن عند النقطة x تقفز دالة التوزيع الاحتمالى قفزة (فجائية) تســاوى قيمة الاحتمال $\Pr(X = x)$ ، وبالتالى فإن نقط المجموعة S تعتبر نقط عدم استمرار لدالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$، لأنها نقط قفزات، حيث نجد أن شكل الدالة $F(x)$ يكون موازيــاً للمحور الأفقى (محور x) بين نقط هذه المجموعة ثم تقفز قفزة فجائية عند كل نقطة x من نقط هذه المجموعة تعادل احتمال هذه النقطة. وشكل الدالة $F(x)$ يأخذ شكل السلم (الدرج) لذلك فإن الدالة $F(x)$ للمتغير المتقطع X تسمى "دالة درجيه" "Step function" ــ أو "دالــة قفازة" وتأخذ الشكل التالى:



شكل (2 ــ 6 ــ 1)
دالة التوزيع الاحتمالى لمتغير متقطع

حيث ... $x_1, x_2,$ هى نقط المجموعة S التى أشرنا إليها وهى مجموعة القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير المتقطع X (ولا يمكن أن يأخذ قيم أخرى غيرها) وتسمى "نقط القفز" "Jump Points" أو "نقط الاحتمال" "Probability Points" والاحتمالات عند هذه النقط هى "القفزات". والاحتمال عند النقطة x $(Pr(X = x))$ يسمى بـ "دالة الاحتمال" Probability Function أو بـ "دالة كثافة الاحتمال" Probability density function للمتغير المتقطع X عند النقطة x وهى تعادل "القفزة" التى تحدث فى الدالة F(x) عند النقطة x. وسنرمز لدالة كثافة الاحتمال عند النقطة x_i بالرمز $P(x_i)$ أو P_i ـــ ويمكن الآن تلخيص ما سبق فى التعريف التالى:

(2 ـ 6 ـ 1) المتغير العشوائى المتقطع:

تعريف (2 ـ 6 ـ 1): يقال أن المتغير العشوائى X من النوع المتقطع إذا كان يأخذ، باحتمال يساوى الواحد الصحيح، قيم x تنتمى إلى مجموعة S $(S \subset R_1)$ تتكون من، عدد محدود أو على الأكثر قابل للعد، من النقط. وكل قيمة x (أو نقطه) فى S يكون عندها الاحتمال موجب $(Pr(X = x) > 0)$.

وعلى هذا يقال أن المتغير العشوائى X من النوع "المتقطع" "Discrete" إذا كان يأخذ مجموعة من القيم S تتكون من عدد محدود finite أو لانهائى قابل للعد countable من النقط لتكن:

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

وعند كل نقطة x_i من نقط S يكون احتمال أن يأخذ المتغير X هذه النقطة احتمال موجب هو:

$$Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i > 0$$

هذه الاحتمالات تسمى "قفزات". كما أن نقط المجموعة S تسمى "نقط الاحتمال" أو "قيم المتغير العشوائى X" أو "مدى المتغير العشوائى المتقطع X"، وهى مجموعة النقط التى يأخذها المتغير المتقطع X ولا يمكن أن يأخذ غيرها وهذا ما نعبر عنه فى التعريف السابق بأن X يأخذ هذه النقط باحتمال يساوى الواحد الصحيح، أى أنه لا يأخذ قيمة خارج هذه المجموعة S. واحتمال أن يأخذ المتغير X قيمة معينة x_i (إحدى قيم S) هو الذى نرمز له بالرمز:

$$Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i > 0$$

والدالة $P(x_i)$ أو P_i تسمى "دالة احتمال المتغير المتقطع X عند النقطة x_i (Probability function of X at x_i) أو تسمى "دالة كثافة احتمال المتغير المتقطع X عند النقطة x_i Probability density function of X at x_i وهى دالة موجبة. ومما سبق يمكن أن نستنتج ما يلى:

إذا كان X متغير عشوائى من النـوع المتقطـع يأخـذ القـيم x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ باحتمالات $P(x_i)$ (أو P_i) فإنه طبقاً للتعريف (2 ـ 6 ـ 1) السابق يكون:

$$(2.6.1): \sum_i P_i = 1$$

والمجموع مأخوذ على جميع قيم x_i التى يأخذها المتغير X.

ويمكن الآن تعريف دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى المتقطع كما يلى:

(2 ـ 6 ـ 2) دالة التوزيع الاحتمالى F(x) ودالة كثافة الاحتمال P_i للمتغير المتقطـع X والعلاقة بينهما:

تعريف (2 ـ 6 ـ 2): إذا كان X متغير عشوائى متقطع يأخذ عدد محـدود أو قابل للعد من القيم: x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ـ فإن:

أولاً:

احتمال أن المتغير X يأخذ القيمة x_i يسمى "دالة احتمال" أو "دالة كثافة احتمـال" المتغير المتقطع X عند النقطة x_i التى تسمى نقطة احتمال وتكتب فى الصورة:

$$(2.6.2a): Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i$$

لجميع قيم i وتحقق العلاقة:

$$(2.6.2b): P_i > 0 \quad , \quad \sum_i P_i = 1$$

ثانياً:

دالة التوزيع الاحتمالى F(x) لنفس المتغير المتقطع X تأخذ الصورة:

$$(2.6.3): F(x) = \sum_{i: x_i \le x} P_i$$

أى أن المجموع مأخوذ على جميع قيم i التى عندها $x_i \le x$.

والعلاقة (2. 6. 3) توضح كيفية الحصول على F(x) باستخدام دالة الاحتمال P_i ـ كما أن العلاقة (2. 5. 6) توضح كيفية الحصول على P_i باستخدام F(x). حيث نجد أن:

$$(2.6.4): P_i = Pr(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

(حيث $F(x_i - 0)$ تساوى $F(x_{i-1})$)

وبذلك يمكن إيجاد P_i من $F(x)$ عند جميع نقط الاحتمال x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ مــن العلاقة السابقة وخلاف ذلك $P_i = 0$.

من التعريف السابق ومن العلاقة (4 .6 .2) يتضح أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ للمتغير العشوائى المتقطع X تتحدد بصفة وحيدة باستخدام دالة الاحتمال $P(x_i)$ والعكــس صحيح.

(2 ــ 6 ــ 3) حساب احتمال أن ينتمى المتغير المتقطع X إلى المجموعة E:

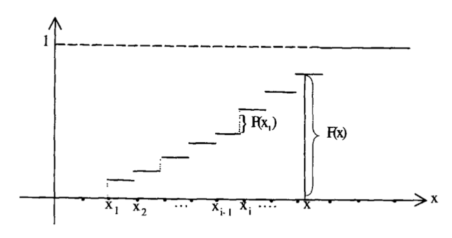
احتمال أن المتغير العشوائى المتقطع X ينتمى إلى المجموعة E هو:

$$(2.\ 6.\ 5):\ \Pr[X \in E] = \sum_{i: x_i \in E} P(x_i)$$

حيث أن المجموع Σ مأخوذ على جميع قيم x_i التى تنتمى للمجموعة E، $P(x_i)$ هى دالة كثافة احتمال المتغير X عند نقط الاحتمال x_i التى تنتمى إلى المجموعة E.

عند التعامل مع المتغير العشوائى المتقطع X يكون واضحاً من سياق العرض مــا هى نقط الاحتمال ــ أى ما هى القيم التى يأخذها المتغير X ــ ولذلك لن يكون هناك أى غموض إذا أهملنا الدليل i عند الإشارة إلى الاحتمــال $P(x_i)$ فيمكن الاكتفاء بكتابة دالــة الاحتمال فى الصورة $P(x)$، فيمكن الإشارة إلى دالة كثافة احتمــال المتغيــر العشــوائى المتقطع X بالرمز $P(x)$ عندما يكون الهدف هو مجرد الإشارة إلى دالة كثافة الاحتمــال دون الحاجة إلى تحديد الاحتمال عند نقطة معينة بذاتها. ولكــن إذا لــزم الأمــر تحديــد الاحتمال عند نقطة معينة x_i فنرمز لدالة كثافة الاحتمال عند هذه النقطة الرمــز $P(x_i)$ أو مجرد P_i، وتكون هى نفسها الاحتمال عند هذه النقطة. ومن الناحيــة العمليــة نــرى أن استخدام دالة كثافة احتمال المتغير المتقطع ــ الدالة $P(x)$ ــ يكون أكثر سهولة ويسراً فى حساب الاحتمالات المختلفة من استخدام دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$.

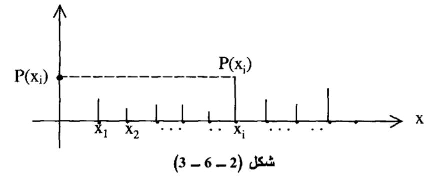
ويمكن تمثيل دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ بيانياً للمتغير العشوائى المفرد المتقطــع X بخط بيانى لدالة درجيــه (علــى شــكل درج أو ســلم) لهــا قفــزات عنــد الــنقط x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ تعادل القيم أو الاحتمــالات $P(x_i)$ لجميــع قــيم $i = 1, 2, \ldots$ علــى الترتيب. كما يتضح من شكل (2 ــ 6 ــ 2) التالى.



شكل (2 ـ 6 ـ 2)

دالة التوزيع الاحتمالى F(x) لمتغير مفرد متقطع

كما أن دالة كثافة الاحتمال P(x)، لنفس المتغير المتقطع X الذى له دالة التوزيع الاحتمالى F(x) الموضحة بالشكل (2 ـ 6 ـ 2) ـ يمكن تمثيلها بيانياً بخطوط عمودية عند نقط الاحتمال x_i بحيث يكون الخط العمودى على النقطة x_i طوله يساوى $P(x_i)$، أى يساوى الاحتمال عند هذه النقطة، لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots$ على الترتيب كما يتضح من شكل (2 ـ 6 ـ 3).



شكل (2 ـ 6 ـ 3)

دالة كثافة الاحتمال P(x) لمتغير مفرد متقطع

(2 ـ 6 ـ 4) المتغير المفرد المدمج The Degenerate r. v.:

لو كانت دالة التوزيع الاحتمالى F(x) للمتغير المتقطع X لها قفزة واحدة، لتكن P(c)، عند نقطة الاحتمال $x = c$ فإن المتغير X يسمى متغير عشوائى "متلاشى أو مدمج" "Degenerate" r. v. وسنرمز لدالة توزيعه الاحتمالى برمز خاص هو:

$$(2.\ 6.\ 6a):\ F_c(x) = \in(x-c) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

وتكون دالة كثافة احتماله هى:

$$(2.\ 6.\ 6b):\ P(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq c \end{cases}$$

إذن:

$$(2.\ 6.\ 6c):\ \Pr(X = c) = 1$$

أى أن الاحتمال الكلى للمتغير العشوائى X يتركز عند نقطة واحدة $x = c$ ، هى نقطة الاحتمال الوحيدة لهذا المتغير كما أنها هى نقطة التزايد الوحيدة لدالة التوزيع الاحتمالى $F_c(x)$ كما أن:

$$(2.\ 6.\ 6d):\ F(c+0) - F(c-0) = 1$$

ويمكن التعبير عن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) المعطاة بالعلاقة (2. 6. 3) باستخدام الدالة $\in(.)$ المعطاة بالعلاقة (2. 6. 6a) كما يلى:

$$(2.\ 6.\ 7):\ F(x) = \sum_i P(x_i) \in (x - x_i).$$

وهذا يوضح أن المجموع مأخوذ على جميع قيم i التى تحقق العلاقة $x_i \leq x$ ، لأنه طالما $x_i \leq x$ تكون $\in(x - x_i) = 1$ ولكن عندما تزيد x_i عن قيمة x فإن $\in(x - x_i) = 0$.

يمكن تقديم العديد من الأمثلة لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المفرد، وسنقدم فى باب التوزيعات الاحتمالية أمثلة على ذلك لأهم المتغيرات العشوائية المتقطعة ولكننا الآن نقدم المثال البسيط التالى:

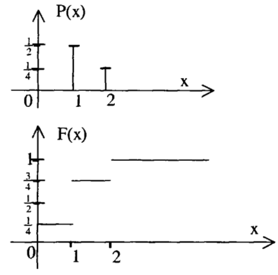
مثال (2 ــ 6 ــ 1): إذا كان X متغير عشوائى متقطع يمثل عدد الصور عند إلقاء قطعتى عملة متزنة مرة واحدة ــ نجد من مثال (2 ــ 3 ــ 1) أن نقط الاحتمال للمتغير العشوائى X هى x_1, x_2, x_3 حيث $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 1\ ,\ x_3 = 2$ وأن دالة كثافة الاحتمال P(x) عند نقط الاحتمال x_1, x_2, x_3 هى:

$$P(x_1) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(x_2) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(x_3) = \frac{1}{4}$$

ودالة التوزيع الاحتمالى F(x) هى:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , x < 0 \\
&= \frac{1}{4} \quad , 0 \le x < 1 \\
&= \frac{3}{4} \quad , 1 \le x < 2 \\
&= 1 \quad , x \ge 2
\end{aligned}
$$

ويمكن تمثيل دالة كثافة الاحتمال P(x) ودالة التوزيع الاحتمالى F(x) كما يلى:



ذكرنا أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) ـ بصفة عامة ـ مستمرة من ناحية اليمين ـ كما أن كل نقطة (أو قيمة) x من قيم المتغير العشوائى X يكون عندها $\Pr(X = x) > 0$ تعتبر نقطة عدم استمرار discontinuity point للدالة F(x) أو نقطة قفز Jump point، حيث تقفز الدالة F(x) عند هذه النقطة قفزة تعادل الاحتمال $\Pr(X = x)$ ـ وهذا هو ما يحدث فى حالة المتغيرات المتقطعة ـ ونقط عدم الاستمرار هذه (إن وجدت) تشكل مجموعة محدودة من النقط finite أو قابلة للعد countable على أكثر تقدير، وهذا ما تنص عليه النظرية التالية:

نظرية (2 ـ 6 ـ 4 أ):

نقط عدم الاستمرار لدالة التوزيع الاحتمالى F(x) لأى متغير عشوائى متقطع تشكل (على أكثر تقدير) مجموعة قابلة للعد. (انظر تمرين(2 ـ 28)).

لذلك عند تعريف المتغير العشوائى المتقطع X ذكرنا أن المتغير X يأخذ، باحتمال يساوى الواحد الصحيح، عدد محدود أو قابل للعد (على الأكثر) من القيم، وكل قيم المتغير العشوائى x التى يكون عندها $\Pr(X = x) = 0$ تعتبر نقط استمرار للدالة F(x). فإذا كانت F(x) مستمرة عند جميع نقط (أو قيم) المتغير العشوائى X فإن هذا المتغير لا يكون له نقط قفز وتكون الدالة F(x) مستمرة من كل اتجاه وليس من ناحية اليمين فقط Everywhere Continuous ــ وسنهتم أساساً بمجموعة خاصة (Special Class) من هذه المتغيرات العشوائية تسمى بالمتغيرات العشوائية المستمرة وسنقدم فيما يلى تعريف لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغيرات العشوائية المستمرة.

(2 ــ 7) دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المستمر Distribution Function and Density Function of Continuous Random Variable:

نتناول الآن حالة المتغير العشوائى X الذى ليس له قفزات ويمكن أن يأخذ أى قيمة فى مدى تغيره ودالة توزيعه الاحتمالى مستمرة من كل اتجاه (Everywhere Continuous) ــ أى ليس بها قفزات. وسوف نهتم أساساً بمجموعة خاصة من مثل هذه المتغيرات تسمى المتغيرات العشوائية المستمرة، آخذين فى الاعتبار ما سبق تقديمه فى البند (2 ــ 5) عن تعريف دالة التوزيع الاحتمالى وخصائصها.

(2 ــ 7 ــ 1) تعريف المتغير العشوائى المستمر (I):

يعتبر المتغير العشوائى X من النوع المستمر إذا كان يأخذ ــ باحتمال يساوى الواحد الصحيح ــ مجموعة من القيم S (على الخط الحقيقى R_1) تشكل مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد Uncountable ودالة توزيعه الاحتمالى F(x) دالة مستمرة (من كل اتجاه) لا يوجد بها قفزات.

ويجدر أن ننبه القارئ أن التعريف السابق يعتمد على سبق تعريف دالة التوزيع الاحتمالى وخصائصها كما فى البند (2 ــ 5) ويمكن أن نقدم الآن تعريفاً آخر أكثر تفصيلاً للمتغير العشوائى يعتمد على سبق معرفتنا لدالة التوزيع الاحتمالى مع تقديم دالة أخرى هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المستمر.

(2 ــ 7 ــ 2) تعريف المتغير العشوائى المستمر (II):

يعتبر المتغير العشوائى X متغيراً مستمراً أو متصلاً Continuous r. v. إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالى F(x) مستمرة من كل اتجاه، لا يوجد بها قفزات، وإذا كان يوجد دالة f(x) غير سالبة وتكاملية على كل الخط الحقيقىR_1 تسمى دالة كثافة احتمال المتغيرX، (Probability Density Function of X) (P. d. f. of X) بحيث أن لكل عدد حقيقى x تكون دالة التوزيع الاحتمالى F(x) معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.7.1):\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

وفى هذه الحالة تكـون المشـتقة التفاضـلية $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ موجـودة ومستمرة عند جميع قيم x على الخط الحقيقى R_1 ــ (وإذا وجد نقط عدم استمرار فإنها تشكل مجموعة محدودة أو قابلة للعد من قيم x) ــ وعند جميع نقط استمرار المشـتقة التفاضلية $F'(x)$ تكون دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ هى هذه المشتقة التفاضلية:

$$(2.7.2):\ f(x) = F'(x).$$

والتعريف السابق يشترط أن تكون دالة كثافة احتمال المتغير المستمر موجودة ومستمرة عند جميع قيم المتغير ما عدا (من الممكن) عند مجموعة قابلة للعد من هذه القيم. وهذا الشرط لا يعتبر قيداً مضيقاً لنطاق مجموعة الدوال التى يمكن اعتبارها دوال كثافات احتمال لمتغيرات مستمرة وذلك لأن جميع الدوال التى تصادفنا فى التطبيق والتى يمكن اعتبارها دوال كثافات احتمال لمتغيرات مستمرة تكون جميعها دوال موجودة ومستمرة عند جميع قيم المتغير ــ مع إمكانية وجود عدد محدود على الأكثر من نقط عدم الاستمرار.

وبهذا فإن كل دوال كثافات الاحتمال التى تصادفنا فى التطبيق لا تتعارض مع هذا الشرط. ودالة كثافة الاحتمال أحياناً نكتفى بالإشارة إليها بلفظ مختصر هو "دالة الكثافـة Density function".

(2 ــ 7 ــ 3): يمكن حساب احتمال تحقق حدث معين باستخدام كلٍ من دالة كثافـة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ فى حالة المتغير المستمر، باستخدام نظريـة (1 ــ 13 ــ 3) من الباب الأول ــ حيث نجد لأى عددين حقيقيين a, b $(a \lneqq b)$ ولأى متغير عشوائى مستمر X دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ ودالة كثافة احتماله $f(x)$:

$$(2.7.3):\ \Pr(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

وبصفة عامة نجد لكل مجموعة بوراليه مقيسة E على الخط الحقيقى R_1:

$$(2.7.4):\ P(E) = \Pr[X \in E] = \int_{E} f(x)\,dx$$

فإذا كانت المجموعة E تتكون من نقطة واحدة عندها قيمة المتغير X تساوى x_0 مثلاً فإن العلاقة السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$(2.7.5):\ \Pr[X = x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$$

أى أن احتمال أن المتغير المستمر يساوى قيمة معينة (x_0 مثلاً) يساوى الصفر

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها بطريقة أخرى حيث أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) لأى متغير مستمر تكون دالة مستمرة من كل اتجاه (ليس بها قفزات)، إذن عند أى قيمة معينة من قيم المتغير (لتكن $X = x_0$) تكون $F(x_0) = F(x_0 - 0)$ وبالتالى يتضح من العلاقة (2. 5. 6) أن:

$$Pr[X = x_0] = F(x_0) - F(x_0 - 0) = 0$$

(2 ــ 7 ــ 4) ملاحظة (2 ــ 7 ــ 4 أ):

إذا كانت المجموعة E تمثل مجموعة محدودة أو قابلة للعد من قيم متغير مستمر X فإن:

$$(2.7.6):\ Pr[X \in E] = 0$$

أى احتمال أن ينتمى المتغير المستمر لأى مجموعة محدودة أو قابلة للعد يساوى الصفر. لذا فإن أى مجموعة محدودة (منتهية) أو قابلة للعد من قيم أى متغير مستمر تسمى مجموعة ذات احتمال صفر أو مجموعة احتمالها صفر A set with probability measure zero وإثبات ذلك بسيط ومتروك للقارئ.

والعلاقة (2. 7. 6) لا تكون صحيحة فى حالة المتغير المتقطع ــ أى أن هذه الخاصية يختص بها المتغير المستمر دون المتغير المتقطع.

ملاحظة (2 ــ 7 ــ 4 ب):

من المعلوم أن كل حدث مستحيل احتماله يساوى الصفر وكل حدث مؤكد احتماله يساوى الواحد الصحيح ــ ولكن العكس غير صحيح ــ إذ يتضح من العلاقتين (2. 7. 6)، (2. 7. 5) أنه ليس من الضرورى أن كل حدث احتماله واحد صحيح يكون حدث مؤكد كما أنه ليس من الضرورى أن كل حدث احتماله صفر يكون حدث مستحيل. فلو كان X متغير عشوائى مستمر معرف على الخط الحقيقى R_1 ودالة كثافة احتماله f(x) فإن الحدث $X = x_0$ يعتبر حدث بسيط وهو حدث غير مستحيل وبالرغم من ذلك نجد من العلاقة (2. 7. 5) أن $Pr[X = x_0] = 0$ كما أن الحدث $X = \overline{x}_0$ المكمل للحدث $X = x_0$ ($\overline{x}_0 = R_1 - x_0$) الذى يمثل كل الخط الحقيقى R_1 بدون النقطة x_0 يعتبر حدث غير مؤكد بالرغم من أن احتماله يساوى الواحد الصحيح ــ حيث يتضح من العلاقة (2. 7. 4) أن:

$$Pr[X \in \overline{x}_0] = \int_{R_1 - x_0} f(x)dx = 1$$

(2 ـ 7 ـ 5) خواص دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى المستمر:

من خصائص دالة التوزيع الاحتمالى نرى من العلاقة (2 .5 .2) أن دالة كثافة الاحتمال لأى متغير عشوائى مستمر تحقق العلاقة التالية:

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

وحيث أننا أشرنا فى تعريف (2 ـ 7 ـ 2) أن دالة كثافة الاحتمال دالة غير سالبة ـ إذن يمكن القول أن دالة كثافة الاحتمال f(x) لأى متغير مستمر X تحقق الخاصيتين التاليتين:

(2. 7. 7): (a) $f(x) \geq 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

ويتضح مما سبق أن أى دالة حقيقية f(x) إذا كانت مستمرة وغير سالبة وتحقق العلاقة $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ فإنها تكون دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائى مستمر.

(2 ـ 7 ـ 6): يمكن تمثيل الاحتمال الكلى للمتغير المفرد X بكتلة (من مادة ما) وزنها الوحدة (وحدة الوزن) وموزعة على الخط الحقيقى R_1 بطريقة ما (تبعاً لدالة كثافة الاحتمال أو دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X) بحيث أن أى مجموعة جزئية E على الخط الحقيقى R_1 تحتوى على كمية من هذه المادة وزنها يعادل الاحتمال P(E) الذى يمثل احتمال أن المتغير العشوائى X ينتمي إلى المجموعة E ـ وعلى ذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) تمثل كمية الاحتمال أو كتلة ذلك الجزء من المادة الذى تحتوى عليه الفترة $(-\infty, x]$ من الخط الحقيقى R_1، كما أن دالة كثافة الاحتمال f(x) عند النقطة x تمثل كثافة المادة عند هذه النقطة، وهذا يعرف بالتمثيل الميكانيكى للاحتمال Mechanical Interpretation of Pr.

(2 ـ 7 ـ 7): بعد أن تعرفنا على كلٍ من دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى نرى أنه من الممكن استخدام أيٍ منهما فى حساب الاحتمالات المختلفة. إلا أنه من الناحية العملية نرى أن استخدام دالة كثافة الاحتمال أكثر سهولة ويسراً فى حساب الاحتمالات من استخدام دالة التوزيع الاحتمالى لأى متغير مستمر. وقد سبق الإشارة إلى أن ذلك صحيح أيضاً فى حالة المتغير المتقطع. ويمكن تمثيل دالة كثافة الاحتمال لأى متغير مستمر بخط متصل ودالة التوزيع الاحتمالى بخط متصل آخر (غير متناقص) ليس به قفزات كما يتضح من شكل (2 ـ 8 ـ 3أ) وشكل (2 ـ 8 ـ 3ب)، ولكن

قبل تقديم هذين الشكلين سنقدم ملخصاً لكيفية حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام دالـــة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى فى كلٍ من المتغير المتقطع والمســـتمر لإيضـــاح التمثيل الهندسى لبعض هذه الاحتمالات على الرسمين المشار إليهما.

(2 ـــ 8) كيفية حساب احتمالات الأحداث المختلفة باستخدام دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى:

(2 ـــ 8 ـــ 1) احتمال أن المتغير العشوائى X يساوى قيمة معينة x:

(2 ـــ 8 ـــ 1 أ) حالة المتغير العشوائى المتقطع:

سبق أن قدمنا العلاقة (2 .6 .2) التى تعطى احتمال أن المتغير المتقطع X يســـاوى قيمة معينة x_i بالعلاقة:

$$(2.8.1):\ \Pr[X = x_i] = P(x_i) = P_i$$

حيث P_i هى دالة كثافة احتمال المتغير X (أو دالة احتماله) عند نقطة الاحتمـــال x_i لجميع قيم i.

(2 ـــ 8 ـــ 1 ب) حالة المتغير العشوائى المستمر:

سبق أن أوضحنا فى العلاقة (5 .7 .2) أن احتمال أن المتغير المستمر X يســـاوى قيمة معينة x هو:

$$(2.8.2):\ \Pr[X = x] = 0$$

لأى قيمة x لجميع قيم x على الخط الحقيقى R_1.

(2 ـــ 8 ـــ 2) احتمال أن المتغير العشوائى X ينتمى إلى المجموعة E (حيث $E \subset \beta_1$) وذلك باستخدام دالة كثافة الاحتمال f(x):

إذا كانت المجموعة E عنصر من عناصر العائلة β_1 التى تمثل عائلة المجموعات الجزئية البوراليه لخط الأعداد R_1 فإن:

$$(2.8.3):\ \Pr(X \in E) = \int_E f(x)\,dx$$

إذا كان المتغير العشوائى X من النوع المستمر ودالة كثافة احتماله f(x).

أما إذا كان X متغير متقطع فإن:

$$(2.8.4):\ \Pr(X \in E) = \sum_{i:x_i \in E} P(x_i)$$

حيث $P(x_i)$ هى دالة كثافة احتمال X عند النقطة x_i والمجموع مأخوذ على جميع نقط الاحتمال x_i التى تنتمى للحدث E.

فإذا كانت $E = R_1$ فإن

$$(2.8.5):\ \Pr(X \in R_1) = \int_{R_1} f(x)dx = 1$$

عندما يكون X متغير مستمر

$$= \sum_{i: x_i \in R_1} P(x_i) = 1$$

عندما يكون X متغير متقطع.

(2 ـ 8 ـ 3) احتمال أن يقع المتغير X فى الفترة I باستخدام دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$:

إذا كانت I فترة ما على خط الأعداد R_1 حدها الأدنى العدد a وحدها الأعلى b $(a \le b)$ فيمكن إثبات أن:

(أ) إذا كان X متغير متقطع:

$$(2.8.6):\ (a)\ \Pr[X = b] = F(b) - F(b-0) = P(b)$$

$$(b)\ \Pr[a < X \le b] = F(b) - F(a)$$

$$(c)\ \Pr[a \le X \le b] = F(b) - F(a) + P(a)$$

$$(d)\ \Pr[a \le X < b] = F(b) - F(a) + P(a) - P(b)$$

$$(e)\ \Pr[a < X < b] = F(b) - F(a) - P(b)$$

حيث $F(x)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المتقطع X و$P(x)$ هى دالة كثافة احتماله عند النقطة $X = x$. والعلاقة الأولى (a) سبق إثباتها بالمعادلة (2. 6. 4) ـ وكما فى البند (2 ـ 8 ـ 1) ـ كما أن العلاقة الثانية (b) سبق إثباتها بالعلاقة (2. 5. 4) ـ أما بقية العلاقات فيمكن إثباتها بتقديم الأحداث A, B, C, D كما يلى:

$$A = \{x : x \le a\}\ ,\ B = \{x : x \le b\}\ ,\ C = \{a\}\ ,\ D = \{b\}$$

إذن يمكن إثبات العلاقة (c) كما يلى:

$$\Pr[a \le X \le b] = \Pr[B\overline{A} \cup C] = \Pr(B) - \Pr(A) + \Pr(C)$$

$$= F(b) - F(a) + P(a)$$

والعلاقة (d)

$$\Pr[a \le X < b] = \Pr[B\,\overline{A}\,\overline{D} \cup C]$$
$$= \Pr(B) - \Pr(A) - \Pr(D) + \Pr(C)$$
$$= F(b) - F(a) - P(b) + P(a).$$

وبالمثل (e):

$$\Pr[a < X < b] = \Pr[B\,\overline{A}\,\overline{D}]$$
$$= \Pr(B) - \Pr(A) - \Pr(D) = F(b) - F(a) - P(b)$$

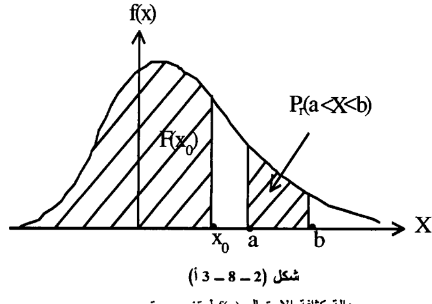
(ب) إذا كان X متغير مستمر:

إذا كان X متغير مستمر فإن احتمال أن يقع X فى الفترة I التى حدها الأدنى a وحدها الأعلى b يكون:

$$(2.\,8.\,7):\ \Pr[X \in I] = F(b) - F(a)$$

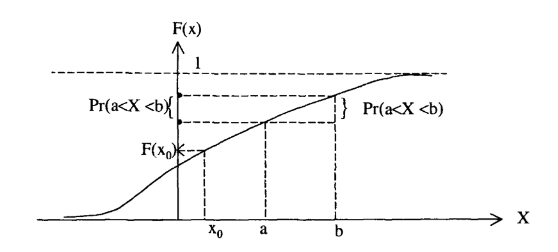
سواء كانت I فترة مفتوحة أو مغلقة من أحد أو كلا طرفيها.

والاحتمال (2. 8. 7) يمكن توضيحه هندسياً بالشكل (2 ـ 8 ـ 3أ) حيث يكون $\Pr[X \in I]$ هو المساحة أسفل المنحنى والمحصورة بين الخطين $X = a$ ، $X = b$.



شكل (2 ـ 8 ـ 3 أ)

دالة كثافة الاحتمال f(x) لمتغير مستمر



شكل (2 ــ 8 ــ 3 ب)

دالة التوزيع الاحتمالى F(x) لمتغير مستمر

مثال (2 ــ 8 ــ 1):

إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

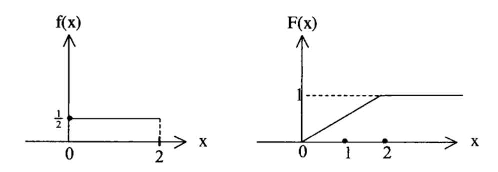
$$f(x)=\frac{1}{2} \qquad ; \quad 0\le x\le 2$$

فإن دالة توزيعه الاحتمالى تكون:

$$F(x)=\int_0^x \tfrac{1}{2}\,dt=\tfrac{x}{2} \;\; ; \; 0\le x\le 2$$

$$=1 \;\; ; \; x>2$$

نرى أن كلٍ من f(x)، F(x) يمكن تمثيلها بخط متصل (لا يرتفع فيه سن القلم عــن ورقة الرسم) ــ كما أن F(x) دالة غير تناقصية، والمتغير هنا من النوع المســتمر كمــا يتضح من شكل f(x) و F(x) فى الرسم التالى:



مثال (2 ــ 8 ــ 2): إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

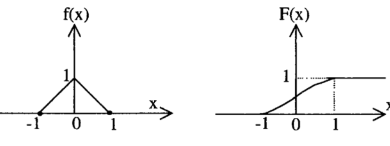
$$f(x) = 1 - |x| \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى F(x) وارسم كلٍ من f(x)، F(x) [انظر فقرة (2 ــ 12 ــ 3)].

(الحل)

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} (1+t)dt \quad ; \quad -1 \le x < 0 \\ \int_{-1}^{0} (1+t)dt + \int_{0}^{x} (1-t)dt \ ; \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 \ ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



من الشكلين السابقين نجد أن:

(أ) منحنى الدالة f(x) يمكن تمثيله بخط متصل عبارة عن خط مستقيم بين النقطتين (0 ,1-)، (1 ,0) وخط آخر مستقيم من النقطة (1 ,0) حتى النقطة (0 ,1) ـ والخطان المستقيمان المشار إليهما متصلان عند النقطة (1 ,0) وبالتالى فإنهما يمثلان خط واحد متصل يمكن رسمه دون رفع سن القلم من على ورقة الرسم.

(ب) أما منحنى الدالة F(x) فهو منحنى متزايد حيث تتزايد F(x) من الصفر عندما $x=-1$ عند النقطة(0 ,1-) ثم تأخذ فى التزايد حتى تصل إلى الواحد الصحيح عندما $x=1$.

(جـ) ومنحنى الدالة F(x) يوجد له نقطة انقلاب عندما $x=0$. وبالتالى فإن $\frac{d\,F(x)}{dx}=0$ عندما $x=0$ أى أنه عندما $x=0$ نجد أن $f(x)\neq F'(x)$ (لأن $f(x)=1$ عندما $x=0$).

(د) من هذا يتضح أن $f(x)=F'(x)>0$ عند جميع قيم x ماعدا عند نقطة واحدة هى النقطة $x=0$ التى عندها $F'(x)=0$ أى أن $F'(x)\neq f(x)$ وهذا ليس له تأثير لأن عدد النقط التى عندها $F'(x)\neq f(x)$ محدود يمكن حصره (هنا نقطة واحدة) ولذلك يمكن تعريف f (x) كما يلى:

$$f(x)=F'(x) \quad ; \quad \text{عند جميع قيم x ماعدا } x=0$$
$$=1 \quad ; \quad \text{عندما } x=0$$

ويمكن أن تكون $f(x)\neq F'(x)$ عند عدد غير منته من النقط، ولكن يمكن حصره وبالتالى يمثل مجموعة ذات احتمال صفر ومثال ذلك دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x)=\frac{3}{\pi^2|k|}\left[1-|k-x|\right]\;;;\;|k-x|\le 1\;\;,k=\pm 1,\pm 2^2,\pm 3^2,....$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. انظر تمرين (3 ـ 33).

من هذا يتضح أن دالة كثافة احتمال المتغير المستمر يمكن تمثيلها بخط متصل (يمكن رسمه دون أن نرفع سن القلم من على ورقة الرسم) إلا أنه يمكن أن توجد مجموعة من النقط يكون عندها $F'(x)\neq f(x)$ ـ حيث أن ـ $F'(x)$ لا تكون موجودة أو تساوى الصفر عند هذه النقط ـ وبالتالى فإن f(x) لا تكون معرفة عند هذه المجموعة من النقط والتى دائماً ما تمثل مجموعة ذات احتمال صفر، وبالتالى يمكن تحديد أى قيمة للدالة f(x) عند هذه النقط دون أن يؤثر ذلك على دالة التوزيع الاحتمالى F(x). لذلك فإننا نعتبر أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x) هى الدالة الأساسية لتحديد المتغير العشوائى وليست دالة كثافة الاحتمال، لأننا فى حالة المتغير العشوائى المستمر يمكن تغيير صيغة دالة كثافة

الاحــتمال عــند أى عــدد يمكن حصره من النقط دون أن يؤثر ذلك على توزيع المتغير العشوائى أو على حساب احتمالات الأحداث المختلفة المتعلقة به، فى حين أن تغيير صيغة دالــة التوزيع الاحتمالى ولو عند نقطة واحدة يؤثر على دالة كثافة الاحتمال وكذلك على حساب احتمالات الأحداث المختلفة المتعلقة بالمتغير العشوائى المستمر وكذلك المتقطع.

مثال (2 ــ 8 ــ 3):

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال إحدى الدالتين التاليتين:

$$f_1(x) = 1 \quad ; \; 0 \le x \le 1$$

$$f_2(x) = 1 \quad ; \; 0 < x < 1$$

نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى المناظرة لكلتا الدالتين السابقتين دالة واحدة هى:

$$\begin{aligned} F(x) &= x \quad ; \; 0 \le x \le 1 \\ &= 1 \quad ; \; x \ge 1 \end{aligned}$$

أى أن F(x) لــم تــتأثر باختلاف صيغة الدالة f(x) عند النقطتين $x = 0,1$ وهما نقطتان من نقط الفترة $0 \le x \le 1$ وتكامل الدالة f(x) عند هاتين النقطتين يساوى الصفر لــذا فهما يمثلان مجموعة ذات احتمال صفر وبالتالى فإن تغيير صيغة الدالة f(x) عندهما لا يكون له أى تأثير على حساب F(x) أو حساب الاحتمالات المختلفة.

(2 ــ 9) عنصر الاحتمال Probability Element:

سبق أن ذكرنا فى حالة المتغير المتقطع أن دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى X عند نقطة الاحتمال x_i هى:

$$\Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i$$

ولكــن بالنســبة للمتغير المستمر يكون الاحتمال عند نقطة يساوى الصفر أى أن $\Pr(X = x) = 0$ وذلك لأن التكامل عند نقطة يساوى الصفر ــ وحيث أن:

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - F\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

إذن

$$f(x) \cdot \Delta x \simeq F\left(x + \tfrac{\Delta x}{2}\right) - F\left(x - \tfrac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f(x) \cdot \Delta x \simeq \Pr\left[x - \tfrac{\Delta x}{2} < X \le x + \tfrac{\Delta x}{2}\right]$$

أى احــتمال أن يقع المتغير العشوائى المستمر X فى فترة صغيرة طولها (Δx) ومركــزها النقطة x يساوى تقريباً f(x) مضروباً فى طول هذه الفترة. وكلما كانت الفترة

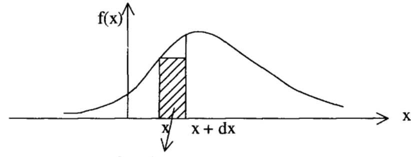
Δx صغيرة كلما اقتربت قيمة $f(x)\cdot\Delta x$ من الاحتمال $P=\Pr\left[x-\frac{\Delta x}{2}<X\le x+\frac{\Delta x}{2}\right]$ حتى فى النهاية عندما تكون Δx متناهية الصغر ونرمز لها بالرمز dx يمكن اعتبار أن $f(x)\cdot dx$ والاحتمال P السابق متساويان وفى هذه الحالة نطلق على الاحتمال السابق P لفظ عنصر الاحتمال ـ ويكون عنصر الاحتمال لأى متغير عشوائى مستمر X هو:

$$(2.9.1):\ f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\Delta x$$

ويمكن كتابته فى الصورة التالية

$$f(x)dx=d\,F(x).$$

كما يمكن تمثيله بالرسم التالى:



عنصر الاحتمال هو المساحة المظللة f(x) dx

شكل (2 ـ 9 ـ 1)

(2 ـ 10) التوزيعات المختلطة Mixed Distributions:

معظم التوزيعات الاحتمالية التى تواجهنا فى التطبيق إما دوال مستمرة أو دوال متقطعة ومع ذلك فى بعض الحالات القليلة توجد دوال توزيع احتمالى تكون مستمرة فى أجزاء من مدى المتغير العشوائى ومتقطعة فى الأجزاء الأخرى والتوزيعات التى من هذا النوع تسمى توزيعات مختلطة، ويمكن تعريف التوزيع المختلط كما يلى:

(2 ـ 10 ـ 1) تعريف التوزيع الاحتمالى المختلط:

دالة التوزيع الاحتمالى F(x) تسمى دالة توزيع احتمالى مختلطة إذا أمكن وضعها فى شكل علاقة خطية بين دالتى توزيع احتمالى أحدهما مستمرة (نرمز لها بالرمز $(F^c(x))$ والثانية متقطعة (نرمز لها بالرمز $(F^d(x))$ على الشكل التالى:

$$(2.10.1):\ F(x)=b\,F^d(x)+(1-b)F^c(x)$$

حيث b ثابت يحقق العلاقة $0<b<1$.

مثال (2 ـ 10 ـ 1):

إذا كان المتغير العشوائى X له دالة التوزيع الاحتمالى المختلطة التالية:

$$F(x)=\tfrac{2}{3}F_1(x)+\tfrac{1}{3}F_2(x)$$

حيث $F_1(x)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المتقطع المعطاة فى مثال (2 ـ 6 ـ 1) و $F_2(x)$ دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المستمر المعطاة فى مثال (2 ـ 8 ـ 2)

(أ) اكتب الصيغة الجبرية للدالة $F(x)$ وارسم منحنى $F(x)$.

(ب) أوجد $Pr(x>1)$

(جـ) أوجد $Pr(1<x<2)$

(د) أوجد $Pr(x<0)$

(هـ) أوجد $Pr(x=1)$

(و) أوجد $Pr(x<2\,|\,x>1)$

(ز) أوجد $Pr(x>0\,|\,x<2)$

(الحل)

(أ)

$$\begin{aligned}
F_1(x)&=\tfrac{1}{4} &&, [0,1)\\
&=\tfrac{3}{4} &&, [1,2)\\
&=1 &&, [2,\infty)
\end{aligned}$$

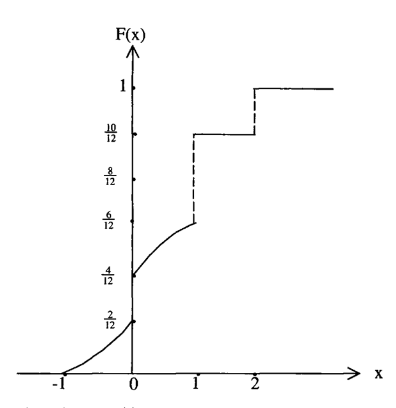
$$\begin{aligned}
F_2(x)&=\tfrac{1}{2}+x+\tfrac{1}{2}x^2 &&; [-1,0)\\
&=\tfrac{1}{2}+x-\tfrac{1}{2}x^2 &&; [0,1)\\
&=1 &&; [1,\infty)
\end{aligned}$$

$$F(x)=\tfrac{2}{3}F_1(x)+\tfrac{1}{3}F_2(x)\quad ,[-1,\infty)$$

$$\begin{aligned}
\therefore F(x)&=\tfrac{2}{3}(0)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}+x+\tfrac{1}{2}x^2\right) &&; [-1,\ 0)\\
&=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{4}{12} &&; x=0\\
&=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}+x-\tfrac{1}{2}x^2\right) &&; (0,1)\\
&=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)+\tfrac{1}{3}(1)=\tfrac{10}{12} &&; x=1\\
&=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)+\tfrac{1}{3}(1)=\tfrac{10}{12} &&; (1,\ 2)\\
&=\tfrac{2}{3}(1)+\tfrac{1}{3}(1)=1 &&; x\ge 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{6}x^2 && ; -1 \le x < 0 \\
&= \tfrac{4}{12} && ; x = 0 \\
&= \tfrac{4}{12} + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6}x^2 && ; 0 < x < 1 \\
&= \tfrac{10}{12} && ; 1 \le x < 2 \\
&= 1 && ; x \ge 2
\end{aligned}
$$

(ب)



$$Pr(x > 1) = 1 - F(1) = 1 - \tfrac{10}{12} = \tfrac{2}{12}$$

(جـــ) لإيجاد $Pr(1 < x < 2)$ نجد أن منحنى الدالة F(x) فى الفترة $1 < x < 2$ عبارة عن خط مستقيم موازى للمحور الأفقى ــ لذا فإن F(x) فى هذه الفترة ثابتة لا يوجد بها زيادة أو قفزات ــ أى أن المتغير X بعد أن يأخذ القيمة 1 يأخذ القيمة 2 مباشرة وبالتالى فإن:

$$Pr[1 < X < 2] = 0$$

وعلى هذا يمكن إيجاد المطلوب فى الفقرة (ب) السابقة بصورة أخرى كما يلى:

$$\Pr[X > 1] = \Pr[X = 2]$$

وباستخدام العلاقة (2. 5. 6)

$$= F(2) - F(2-0) = 1 - \tfrac{10}{12} = \tfrac{2}{12}$$

(د)

$$\Pr(X < 0) = F(0-0) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2}0^2\right) = \tfrac{1}{6}$$

أو من الصيغة الأخيرة للدالة $F(x)$ مباشرة باعتبار $0 - 0 \simeq 0$

$$\Pr(x < 0) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}0 + \tfrac{1}{6}0^2 = \tfrac{1}{6}$$

(هـ)

$$\Pr[X = 1] = F(1+) - F(1-)$$

حيث

$$F(1+) = \tfrac{10}{12}$$

$$F(1-) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{2}(1)^2\right] = \tfrac{6}{12} = \tfrac{1}{2}$$

[أو من الصيغة الأخيرة للدالة $F(x)$ مباشرة باعتبار $1 - \simeq 1$:

$$F(1-) = \tfrac{4}{12} + \tfrac{1}{3}\cdot 1 - \tfrac{1}{6}\cdot 1^2 = \tfrac{6}{12} = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \Pr[X = 1] = \tfrac{10}{12} - \tfrac{6}{12} = \tfrac{4}{12}$$

(و)

$$\Pr[X < 2 \mid X > 1]$$

نفرض أن الحدث A هو $X < 2$

والحدث B هو $X > 1$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P = \Pr[X < 2 \mid X > 1] = P(A \mid B) = P(A\,B)/P(B)$$

$$A\,B \equiv x < 2 \text{ and } X > 1 \equiv 1 < X < 2$$

$$\therefore P = \frac{\Pr[1 < X < 2]}{P(X > 1)} = \frac{0}{P(X > 1)} = 0$$

(ز) الاحتمال المطلوب $P = \Pr[X > 0 \mid X < 2]$

نفرض أن الحدث A : $X > 0$

الحدث B : $X < 2$

$$\therefore P = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(0 < X < 2)}{P(X < 2)}$$

وباستخدام معادلات (2. 8. 6) نجد أن:

$$\Pr(0 < X < 2) = F(2) - F(0) - \Pr(X = 2)$$
$$= 1 - \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12}$$
$$\Pr(X < 2) = F(2-) = \frac{10}{12}$$
$$\therefore P = \Pr[X > 0 \mid X < 2] = \frac{6}{12} \div \frac{10}{12} = \frac{3}{5}.$$

(2 ــ 11) التوزيعات المبتورة Truncated Distributions:

نفــرض أن لدينا متغير عشوائى X فراغه خط الأعداد الحقيقية R_1 ودالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ ــ وحدث لأى سبب من الأسباب أننا نهتم فقط بالقيم التى يمكن أن يأخذها هــذا المتغير فى مدى معين ليكن A حيث $A \subset R_1$ ــ فإن توزيع المتغير X فى المدى (أو المجموعــة) A يكــون هــو محــور اهتمامنا. واحتمال أن المتغير X ينتمى إلى أى مجموعــة جزئية B (حيث $B \subset A$) علما بأن $X \in A$ (أى مع تحقق الشرط $X \in A$) يمكن الحصول عليه طبقا لقانون الاحتمال الشرطى من العلاقة (I .19 .1) بالباب الأول ــ حيــث أن هذا الاحتمال هو الاحتمال الشرطى لتحقق الحدث: $X \in B$ حيث B مجموعة جزئية من المجموعة A $(B \subset A)$ كما أن $0 < P(A) < 1$ وذلك إذا علمنا أن $X \in A$ ــ ويمكن كتابة ذلك فى الصورة التالية:

$$(2.\ 11.\ 1):\ \Pr(X \in B \mid X \in A) = \Pr(X \in B\ ;\ X \in A)/\Pr(X \in A)$$
$$= \Pr(X \in B)/\Pr(X \in A)$$

فــإذا كــان المتغــير X مــن النوع المتقطع ونقط احتماله (أو نقط القفز) هى x_i باحتمالات (أو قفزات P_i)، $i = 1, 2, \ldots$، وكانت A مجموعة جزئية من مدى المتغير X و B مجموعة مكونة من نقطة واحدة هى النقطة $X = x_i$ سنجد من العلاقة (2. 11. 1) أن دالة الاحتمال للتوزيع المبتور للمتغير X تأخذ الصورة:

$$(2.\ 11.\ 2):\ \Pr(X = x_i \mid X \in A) = P_i \Big/ \sum_{j: x_j \in A} P_j$$

عندما $x_i \in A$ وتساوى الصفر خلاف ذلك.

والـــتوزيع الاحتمالى المعطى بالعلاقة السابقة لجميع قيم $x_1 \in A$ يسمى بالتوزيع المبتور للمتغير المتقطع X في المدى $X \in A$.

أمـــا إذا كـــان المتغـــير X من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال f(x) (حيث $f(x) = F'(x) > 0$) فإن:

$$(2.11.3): \Pr(X \in B \mid X \in A) = P(X \in B)/P(X \in A)$$

$$= \int_B f(x)dx \Big/ \int_A f(x)dx$$

حيث A، B مجموعتان خطيتان على الخط الحقيقى R_1، $B \subset A$.

فـــإذا كانـــت المجموعـــة A هى الفترة $a < X \leq b$ حيث a, b عددان حقيقيان و $a < b$ و B هى الفترة $a < X \leq x$ حيث x عدد حقيقى ينحصر بين a, b فإن:

$$\Pr(X \in A) = \Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

كما أن:

$$\Pr(X \in B) = \Pr(a < X \leq x) = F(x) - F(a)$$

ويكون توزيع المتغير العشوائى المستمر X فى المدى $a < X \leq b$ ـــ مع إهمال كل قيم المتغير X خارج هذا المدى ـــ يطلق عليه اسم "التوزيع المبتور" للمتغير المستمر X فى المدى $a < X \leq b$ ويكون له دالة التوزيع الاحتمالى التالية:

$$(2.11.4): \Pr(X \in B \mid X \in A) = \Pr(a < X \leq x \mid a < X \leq b)$$

$$= F(x \mid a < X \leq b)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & ; a < X \leq b \\ 1 & ; x > b \\ 0 & \text{، خلاف ذلك} \end{cases}$$

كمــــا أن دالة كثافة احتمال المتغير X فى هذا المدى $a < X \le b$ يمكن الحصول عليها بمفاضلة الدالة (2. 11. 4) مع الأخذ فى الاعتبار أن F(a) و F(b) كميتان ثابتتان وذلك فى الصورة التالية:

$$(2.\ 11.\ 5):\ f(x \mid a < X \le b) = f(x) \Big/ \int_a^b f(t)\,dt.$$

لجميع قيم X فى المدى $a < X \le b$ وتساوى الصفر خلاف ذلك، علماً بأن كلٍ من العددان a, b قد يكون محدود أو لانهائى.

مثال ذلك إذا افتراضنا أن X متغير عشوائى يمثل أطوال مجموعة من الأشخاص له دالة كثافة الاحتمال f(x) ودالة التوزيع الاحتمالى F(x) فالمتغير X متغير موجب فراغه كل الجزء الموجب من الخط الحقيقى R_1 ـــ أى أن:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

فــــإذا كــــان اهتمامــــنا منصب على الأشخاص المجندين فقط وليس كل مجموعة الأشـــــخاص الــــذى يمثل أطوالها المتغير X، وإذا علمنا أن أى شخص يتم تجنيده لا يقل طوــــله عن 165 سم، فإن أطوال الأشخاص المجندين ـــ فى هذه الحالة ـــ يمكن اعتباره متغير X له توزيع مبتور فى الفترة $X > 165$ ودالة توزيعه الاحتمالى هى:

$$F(x \mid X > 165) = \frac{F(x) - F(165)}{1 - F(165)} \quad ;\ x \ge 165$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

كما أن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير ذو التوزيع المبتور هى:

$$f(x \mid X > 165) = f(x) \Big/ \int_{165}^{\infty} f(t)\,dt$$

ممــــا سبق يتضح الفرق بين كلٍ من F(x) و $F(x \mid X > 165)$ وكذلك بين f(x) و $f(x \mid X > 165)$.

(2 ــ 12) بعض الملاحظات الهامة:

نقدم فيما يلى بعض الملاحظات المتعلقة بدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المستمر ودالة كثافة احتمال التوزيع المختلط.

(2 ــ 12 ــ 1): ذكرنا أن دالة كثافة الاحتمال f(x) للمتغير العشوائى المستمر X هى المشتقة التفاضلية الأولى لدالة توزيعه الاحتمالى F(x) عند جميع نقط X التى تكون عندها الدالة F(x) قابلة للتفاضل (Differentiable) ــ أى عندما تكون $F'(x) > 0$ ــ وفى هذه الحالة تكون $f(x) = F'(x)$. ولكن فى حالات نادرة جداً تكون $F'(x) = 0$ عند غالبية قيم X تقريباً وتكون أكبر من الصفر عند باقى القيم، فىمثل هذه الحالة تُسمى دالة التوزيع الاحتمالى المستمرة F(x) دالة مستمرة شاذة Singular Continuous Function ومثل هذه الدوال لا وجود لها تقريباً فى مجال دراستنا، لذلك فإننا نهملها ولن نتعامل معها، وسنعتبر دائماً أن دالة التوزيع الاحتمالى المستمرة هى التى فيها $f(x) = F'(x) > 0$ عند جميع قيم X ماعدا (من الممكن) عند مجموعة قابلة للعد من هذه القيم.

(2 ــ 12 ــ 2): لو اعتبرنا أن دالة كثافة الاحتمال المختلطة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالى المختلطة المعطاة بالعلاقة (2. 10. 1) هى:

$$f(x) = b\, f^{d}(x) + (1-b) f^{c}(x)$$

حيث $0 < b < 1$ و $f^{d}(x)$ هى دالة كثافة الاحتمال المتقطعة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالى المتقطعة $F^{d}(x)$ و $f^{c}(x)$ هى دالة كثافة الاحتمال المستمرة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالى المستمرة $F^{c}(x)$ ــ فإننا سنحتاج فى التعامل مع دالة كثافة الاحتمال المختلطة f(x) إلى درجة كبيرة من الحذر ــ لذلك فنحن نفضل التعامل مع دالة التوزيع الاحتمالى المختلطة فى حالة وجودها.

(2 ــ 12 ــ 3): فى كثير من الحالات تكون دالة كثافة الاحتمال (وكذلك دالة التوزيع الاحتمالى) معرفة بصيغ جبرية مختلفة فى فترات مختلفة من مدى المتغير العشوائى، وفى مثل هذه الحالات عند إيجاد تكامل الدالة يجب أن نضع هذا التكامل على شكل مجموع تكاملات كل منها يختص بفترة معينة من فترات المتغير العشوائى X ونستخدم فيه الصيغة الجبرية الخاصة بهذه الفترة كما فى مثال (2 ــ 8 ــ 2).

(2 ــ 12 ــ 4): التوزيع الاحتمالى يسمى "توزيعاً متماثلاً حول النقطة a" "Symmetric about a" إذا حققت دالة توزيعه الاحتمالى العلاقة التالية:

$$F(a+x) = 1 - F(a-x) + Pr(X = x).$$

والـــنقطة "a" تســـمى مركـــز التماثل. فإذا كان التوزيع من النوع المستمر فإن: $f(a+x)=f(a-x)$ حيــث f(x) هـــى دالــــة كثافة الاحتمال. وإذا كان التوزيع من الـــنوع المـــتقطع فـــإن نقط الاحتمال Jump points والاحتمالات المقابلة تكون موزعة بطريقة متماثلة حول مركز التماثل. The Center of Symmetry.

(2 ـ 13) المتغـــيرات العشوائية الثنائية المشتركة Two – Dimensional Random Variables:

فى تعريفنا للمتغير العشوائى المفرد X فى البندين (2 ـ 3) و(2 ـ 4) ذكرنا أن X دالـــة حقيقـــية وحيدة القيمة معرفة على فراغ العينة S مجالها هذا الفراغ ومجالها المقابل الخط الحقيقى R_1، أى أن X دالة حقيقية وحيدة القيمة تنقل من S إلى R_1 وبتعبير رمزى:

$$S \xrightarrow{X} R_1$$

وفـــراغ العينة S ـ كما سبق أن ذكرنا فى الباب الأول ـ هو مجموعة عناصرها أحداث أولية بسيطة ـ لذا فإن المتغير العشوائى المفرد X يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة تحـــدد لكـــل حدث بسيط (فى المجموعة S) عدد حقيقى (أو نقطة على الخط الحقيقى) ـ وحيـــث أنه يمكن تعريف أكثر من دالة على فراغ العينة ـ لذلك يمكن تعريف أكثر من متغـــير عشوائى على فراغ العينة لأى تجربة عشوائية ـ أى يمكن تعريف n من الدوال (أو n مـــن المتغـــيرات العشـــوائية) $X_1, X_2, ..., X_n$ على فراغ العينة ـ هذه الدوال (أو المتغـــيرات) تحـــدد لكل حدث بسيط (فى الفراغ S) n من الأعداد المرتبة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ وفـــى هـــذه الحالة نعتبر المتغيرات التى عددها n كأنها متغير عشوائى مشترك واحد فى الفراغ ذو النون بعداً مكون من مركبات (أو متغيرات) عددها n ويكون له توزيع احتمالى يسمى بالتوزيع الاحتمالى المشترك.

فمـــثلاً ـ عندما $n = 2$ ـ إذا عرفنا المتغيران العشوائيان X وY كدوال حقيقية وحـــيدة القـــيمة علـــى فراغ العينة S لتجربة عشوائية فإن المتغيران X وY يقال أن لهما توزيـــع احتمالى مشترك أى لهما دالة احتمال مشتركة $P_{12}(.)$ تستخدم لحساب احتمالات وقوع الأحداث المشتركة لهذين المتغيرين. والأحداث المشتركة للمتغيرين العشوائيين ذات التوزيع الاحتمالى المشترك دائماً تكون فى صورة مجموعات جزئية فى الفراغ المشترك (المزدوج) للمتغيرين. فلو كان خط الأعداد الحقيقية R_1 هو فراغ كلٍ من المتغيرين X وY فـــإن الفراغ المزدوج لهما يمكن تمثيله بالمستوى R_2 الذى تكون فيه كل نقطة عبارة عن زوج مرتب من القيم (x, y) حيث x هى إحدى قيم المتغير العشوائى X وy هى إحدى قيم المتغير العشوائى Y والمتغيران هنا مستمران لأن فراغ كلٍ منهما هو الخط الحقيقى R_1، وقد يكون المتغيران متقطعان وفراغ كلٍ منهما مجموعة محدودة أو على الأكثر قابلة للعد مـــن النقط فيكون الفراغ المشترك للمتغيرين مكون من مجموعة محدودة أو قابلة للعد من

الـــنقط فـــى المستوى R_2. فمثلاً إذا كان المتغيران العشوائيان متقطعان وفراغ كلٍ منهما المجموعة $S = \{0,1,2\}$ فإن فراغهما المشترك يكون المجموعة

$$A = \left\{ \begin{matrix} (x, y): \ x = 0,1,2 \\ y = 0,1,2 \end{matrix} \right\}$$

أى يتكون من 9 نقاط هى:

y \ x	0	1	2
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)

وفـــى الفـــراغ المشـــترك R_2 (أو R_n فـــى حالة n من المتغيرات العشوائية) لأى متغيريـــن X وY يمكـــن حساب الاحتمال لأى مجموعة جزئية بوراليه E من هذا الفراغ ونرمـــز لدالة الاحتمال فى هذه الحالة بالرمز $P_{12}(.)$ والمتغيران العشوائيان X وY ذات الـــتوزيع الاحـــتمالى المشترك قد نطلق عليهما أحياناً لفظ المتغير العشوائى المشترك أو المتغـــير الثنائى (X, Y) ــ ويقال لتوزيعهما الاحتمالى أنه توزيع احتمالى لمتغير عشوائى ثنائى مشترك (X, Y).

وكمـــا سبق أن ذكرنا يمكن أن يكون معرفاً على فراغ العينة لأى تجربة عشوائية ثلاث متغيرات أو أربعة أو حتى n من المتغيرات بحيث تحدد لكل عنصر أو حدث أولى بسيط فى فراغ العينة تعبير مرتب من الأعداد الحقيقية مكون من ثلاثة أو أربعة أو حتى n من القيم الحقيقية على الترتيب.

وقـــد يكـــون معـــرف على فراغ العينة للتجربة العشوائية عدة متغيرات عشوائية بعضـــها مـــتقطع والآخـــر مســـتمر وقد تكون كل المتغيرات مستمرة أو كلها متقطعة. ولإيضـــاح مفهوم المتغيرات العشوائية المتعددة المشتركة نبدأ أولاً بحالة متغيرين ثم نعمم النتائج إلى حالة n من المتغيرات.

(2 ــ 13 ــ 1) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الثنائى المشترك:

The Probability Distribution Function of the Two – dimensional Random Variable:

نفـــــــرض أن (X, Y) متغـــير عشوائى ثنائى مشتـــرك له فـــراغ الاحتمـــــال $(R_2, \beta_2, P_{12}(.))$ حيث R_2 هو المستوى الذى يتكون من تقاطع فراغى المتغيرين X وY و

β_2 أصـــغر عائلة بوراليه مكونة من كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ R_2 و$P_{12}(.)$ هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغير الثنائى المشترك (X, Y) والتى يمكن تعريفها كما يلى:

لأى مجموعـــة بوراليه E فى المستوى R_2 عناصرها الأزواج المرتبة (x, y) حيث x إحـــدى قيم المتغير العشوائى X وy إحدى قيم المتغير العشوائى Y تكون دالة الاحتمال المشتركة $P_{12}(.)$ للمتغير العشوائى المشترك (X, Y) هى:

$$(2.\ 13.\ 1):\ P_{12}(E) = \Pr[\{(x, y):\ (x, y) \in E\}]$$

أو

$$= \Pr[\{(x, y) \in E\}]$$

ســبق أن ذكـــرنا أنه إذا كان فراغ كلٍ من المتغيرين العشوائيين Y وX هو الخط الحقـــيقى R_1 فـــإن فراغ المتغير العشوائى المشترك $(X,\ Y)$ هو المستوى R_2. وعادة فى المستوى R_2 نهتم بحساب احتمالات المجموعات التى من النوع التالى:

$$(2.\ 13.\ 2):\ E = \{(x, y): x \in E_1,\ y \in E_2\}$$

حيـــث أن كلٍ من E_1 وE_2 مجموعة جزئية بوراليه من الخط الحقيقى R_1. وبذلك يمكن كتابة دالة الاحتمال المشتركة $P_{12}(.)$ المعطاة بالعلاقة (2. 13. 1) فى الصورة التالية:

$$(2.\ 13.\ 3):\ P_{12}(E) = \Pr[(X, Y) \in E] = \Pr[\{(x, y): x \in E_1\ ,\ y \in E_2\}]$$

أو فى صورة مختصرة

$$= \Pr[X \in E_1\ ,\ Y \in E_2]$$

حيـــث E وE_1 وE_2 كما فى العلاقة (2. 13. 2). والآن يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الثنائى المشترك (X, Y) كما يلى:

(2 ـ 13 ـ 2) تعريف دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغير (X, Y):

الدالة $F(x, y)$ المعرفة بالعلاقة:

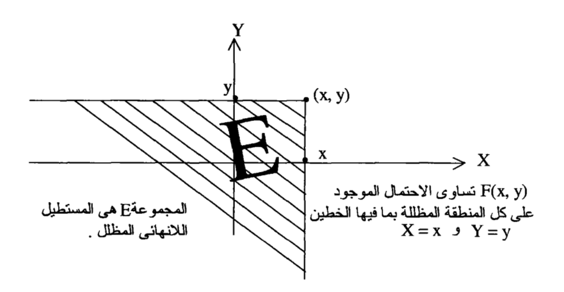
$$(2.\ 13.\ 4):\ F(x, y) = \Pr[X \le x\ ,\ Y \le y]$$

تسمى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى المشترك (X, Y).

والعلاقـــة الســـابقة مشـــتقة مـــن العلاقـــة (2. 13. 3) عندما تكون E_1 هى الفترة $(-\infty, x]$ وE_2 الفـــترة $(-\infty, y]$. وفى هذه الحالة تكون المجموعة E المعطاة بالعلاقة (2. 13. 2) هى المجموعة التالية:

$$(2.\ 13.\ 5):\ E = \{(X, Y):\ X \le x\ ,\ Y \le y\}$$

وهذه المجموعة يمكن تمثيلها بيانياً بالشكل التالى:



شكل (2 ـ 13 ـ 1)

وباستخدام العلاقة (2. 13. 5) يمكن كتابة العلاقة (2. 13. 4) لدالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ للمتغير (X, Y) فى الصورة التالية:

$$(2.\ 13.\ 6):\ F(x, y) = \Pr[(X, Y) \in E] = P_{12}(E)$$

حيث E هى المجموعة المعرفة بالعلاقة (2. 13. 5) و$P_{12}(E)$ هى دالة الاحتمال المشتركة المعطاة بالعلاقة (2. 13. 1) وعلى ذلك فإن دالة الاحتمال $P_{12}(.)$ [أو فراغ الاحتمال $(R_2, \beta_2, P_{12}(.))$] ودالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ كلٍ منهما يكفى لتحديد الاحتمالات المختلفة ـ أو لتوزيع الاحتمال الكلى الذى يعادل الوحدة ـ على المجموعات الجزئية البوراليه المختلفة فى المستوى R_2، أى أننا لدينا طريقتين أو أسلوبين لتحديد احتمالات الأحداث المختلفة للمتغير العشوائى المشترك (X, Y) هما: فراغ الاحتمال $(R_2, \beta_2, P_{12}(.))$ و دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$، ولكننا سوف نستخدم دالة التوزيع الاحتمالى فى غالب الأحيان. ويمكن باستخدام دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ تحديد احتمال أى مجموعة جزئية بوراليه تكون على شكل مستطيل كما فى شكل (2 ـ 13 ـ 1) السابق سواء كان المستطيل مساحته محدودة أو لانهائية، إذ عادة ما تكون المجموعات البوراليه التى نهتم بحساب احتمالاتها من نوع المجموعات المعطاة فى (2. 13. 2) عندما تكون E_1 فترة معينة على محور المتغير العشوائى X وE_2 فترة معينة أخرى على محور المتغير العشوائى Y ومثال ذلك أن تكون E_1 هى الفترة $(a_1, b_1]$ وE_2 هى الفترة $(a_2, b_2]$فتكون الاحتمالات التى عادة ما نهتم بحسابها من النوع التالى:

$$\Pr[a_1 < X \le b_1\ ,\ a_2 < Y \le b_2]$$

ومما هو جدير بالذكر أن أى فترة فى الفراغ R_1 أو أى مستطيل فى الفراغ R_2 كل منهما يعتبر مجموعة بوراليه يمكن حساب احتمالها.

ودالـــة الـــتوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ للمتغير الثنائى المشترك (X, Y) أحياناً نطلق عليها ألفاظ مختلفة فأحياناً نطلق عليها: دالة التوزيع الاحتمالى أو دالة التوزيع الاحتمالى الثنائـــية المشـــتركة أو مجرد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة أو دالة التوزيع الاحتمالى التراكمـــية أو الدالة التراكمية الثنائية ــ كما أنها قد تسمى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى المشترك (X, Y) أو دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغيران العشوائيان X، Y ــ لذلك قد نستخدم أى من هذه الألفاظ عند تناولنا لهذه الدالة.

(2 ــ 13 ــ 3) خواص دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$:

مـــن تعريف دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ بالعلاقة (2. 13. 4) يتضح أن $F(x, y)$ عبارة عن دالة احتمال لذلك فلها كل خصائص الاحتمال ــ أى أن:

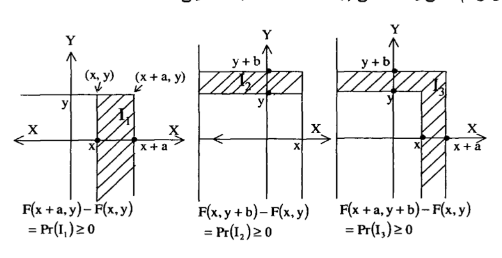
(1) $F(x, y)$ دالة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة لجميع قيم (x, y) فى المستوى R_2.

وبأسلوب مشابه لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد يمكن إثبات أن:

(2) $F(x, y)$ دالة غير تناقصية ــ أى أنه بالنسبة لأى عددين $a > 0$ ، $b > 0$ يمكن إثبات أن:

$$F(x+a, y) - F(x, y) \geq 0$$
$$F(x, y+b) - F(x, y) \geq 0$$
$$F(x+a, y+b) - F(x, y) \geq 0$$

والرسم التالى يساعد على إثبات العلاقات السابقة كما يلى:



شكل (2 ــ 13 ــ 2)

حيث I_1، I_2، I_3 هى المساحات المظللة فى الرسم

(3) $F(x, y)$ دالــة مســتمرة مــن ناحــية اليمين على الأقل وذلك بالنسبة لكل متغير من المتغيرين X, Y. أى أنه عند كل نقطة (x, y) فى المستوى R_2 ـ وبأسلوب مشابه لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد عند إثبات العلاقات (2. 5. 5) ـ يمكن إثبات أن:

$$F(x+0, y) = F(x, y)$$

$$F(x-0, y) \leq F(x, y)$$

وهذا يعنى أن الدالة $F(x, y)$ مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة للمتغير X ـ وكذلك بالنسبة للمتغير Y يمكن إثبات أن:

$$F(x, y+0) = F(x, y)$$

$$F(x, y-0) \leq F(x, y)$$

وهــذا يعنى أن الدالة $F(x, y)$ مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة للمتغير Y ـ ومن هذا يتضح أن الدالة $F(x, y)$ مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لكل متغير من متغيريها.

ومما سبق يتضح أن:

$$(2.\ 13.\ 7):\ F(x+0, y) = F(x, y+0) = F(x, y)$$

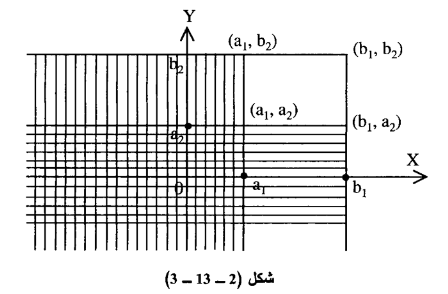
وكذلك

$$F(x+0, y+0) = F(x, y)$$

(4) وبالإضــافة إلــى مــا ســبق يمكن إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ تحقق العلاقات التالية:

$$(2.\ 13.\ 8):\ F(-\infty, y) = 0\ ;\ F(x, -\infty) = 0\ ;\ F(+\infty, +\infty) = 1$$

وبالاستعانة بشكل (2 ـ 13 ـ 3) التالى نلاحظ الآتى:



شكل (2 ـ 13 ـ 3)

إذا كانت I هى الفترة التالية:

$$(2.\ 13.\ 9a):\ I = \{(x,y): a_1 < X \le b_1 \ \ ,\ a_2 < Y \le b_2\}$$

حيث $a_1 < b_1 \ ,\ a_2 < b_2$ وكلها أعداد حقيقية إذن:

$$\begin{aligned}(2.\ 13.\ 9b):\ \Pr[(x,y)\in I] &= \Pr[a_1 < X \le b_1 \ ,\ a_2 < Y \le b_2] \\ &= \Pr[X \le b_1 \ ,\ Y \le b_2] - \Pr(X \le b_1 \ ,\ Y \le a_2) \\ &\quad - \Pr(X \le a_1 \ ,\ Y \le b_2) + \Pr(X \le a_1 \ ,\ Y \le a_2) \\ &= F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2)\end{aligned}$$

والعلاقة (2. 13. 9b) السابقة يترتب عليها أن:

$$(2.\ 13.\ 10):\ F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2) \ge 0$$

وذلك لجميع القيم a_1, b_1 $(a_1 < b_1)$ و a_2, b_2 $(a_2 < b_2)$.

ملاحظة (2 ـ 13 ـ 3أ):

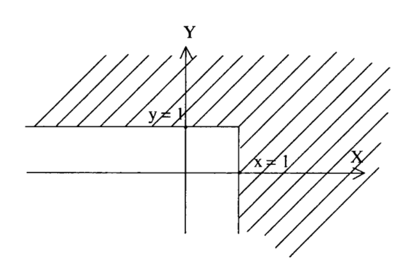
مما سبق يتضح أن الدالة F(x, y) لكى تكون دالة توزيع احتمالى لمتغير عشوائى ثــنائى (X, Y) فلا يكفى أن تكون مستمرة من ناحية اليمين وغير تناقصية بالنسبة لكل متغــير وتحقق الشروط (8 .13 .2) ـ فهذا وحده لا يكفي لكى تكون F(x,y) دالة توزيع احــتمالى ـ ولكن لكى تكون كذلك لابد من تحقق المتباينة (10 .13 .2) السابقة بالإضافة إلى هذه الخواص كما يبدو من العلاقة (9b .13 .2).

والمــثال التالى يوضح أن الشروط السابقة وحدهــا لا تكفى لتحقــق العلاقـــة (2. 13. 10).

مثال (2 ـ 13 ـ 1): إذا كانت:

$$F(x,y) = 1 \ \ ;\ \ x \ge 1\ ,\ y \ge 1$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

يتضـــح مـــن الرسم التالى أن الدالة F(x, y) تساوى الواحد الصحيح فى المنطقة المظللة وتساوى الصفر فى باقى المستوى R_2.



هــذه الدالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لجميع قيم X وجميع قيم Y وتحقق العلاقات (2. 13. 8) ــ وبالرغم من ذلك فإنها لا تحقق المتباينة (2. 13. 10) ــ لأنه إذا وضعنا فى العلاقة(2. 13. 10)

$$a_1 = 1 - \Delta \ , \ b_1 = 1 + \Delta$$
$$a_2 = 1 - \Delta \ , \ b_2 = 1 + \Delta$$

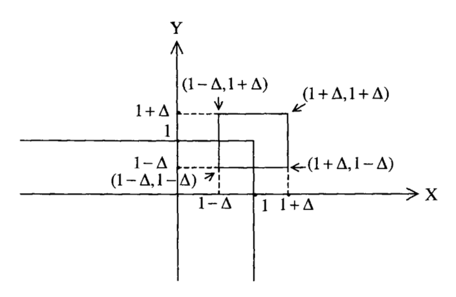
لأى قيمة صغيرة Δ حيث $\Delta > 0$ سنجد أن الطــرف الأيســر فى المتباينـــــة (2. 13. 10) يأخذ القيمة التالية

$$\begin{aligned} &F(1+\Delta,\, 1+\Delta) - F(1+\Delta,\, 1-\Delta) - F(1-\Delta,\, 1+\Delta) + F(1-\Delta, 1-\Delta) \\ &\quad = 1 - 1 - 1 + 0 \\ &\quad = -1 \end{aligned}$$

أى أن F(x, y) لا تحقــق المتبايــنة (2. 13. 10) لجمـــيع قيم (x, y) داخل المستقيم المحدد بالعلاقات التالية:

$$1 - \Delta < X \le 1 + \Delta$$
$$1 - \Delta < Y \le 1 + \Delta$$

ولزيادة الإيضاح يمكن رسم هذا المستطيل على الرسم السابق سنجده يأخذ الشكل التالى:



من الرسم السابق نجد أن 3 رؤوس للمستطيل تقع فى المنطقة التى فيها = F(x, y) 1 والــرأس الــرابع فــى المنطقة التى فيها F(x, y) = 0. وأى مستطيل أحد رؤوسه فى المــنطقة الــتى فيها F(x, y) = 0 وباقى الرؤوس فى المنطقة التى فيها1 = F(x, y) سوف يوصلنا إلى نفس النتيجة.

مما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (2 ــ 13 ــ 3 أ):

أى دالــة حقيقــية وحــيدة القيمة غير سالبة F(x, y) تكون دالة توزيع احتمالى لمتغــير عشــوائى ثنائى معين، إذا وفقط إذا، كانت F(x, y) غير تناقصية ومستمرة من ناحــية اليميــن على الأقل بالنسبة لكلا متغيريها وتحقق العلاقات (8 .13 .2) كما تحقق كذلك المتباينة (10 .13 .2).

وبعــد كــل مــا استعرضــناه عن دالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) للمتغير الثنائى المشترك (X, Y) يمكن تلخيص كل ما سبق فى التعريف التالى:

تعريف (2 ــ 13 ــ 1) دالة التوزيع الاحتمالى F(x, y):

باســتخدام دالــة الاحــتمال $P_{12}(\ )$ المعرفة بالعلاقة (1 .13 .2) للمتغير العشوائى الثــنائى المشــترك (X, Y) يمكــن تحديد دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة F(x, y) معرفة بالعلاقة:

$$(2.13.11):\ F(x, y) = Pr(X \le x,\ Y \le y)$$

عــند جميع نقط (x, y) فى المستوى R_2 تسمى دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغــير (X, Y) وهــذه الدالة تكون دالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين على الأقل بالنسبة لكلٍ من X و Y وتحقق الشروط التالية:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$$
$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

كما تحقق كذلك المتباينة (10 .13 .2).

(2 ــ 14) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير العشوائى الثنائى المشترك

Joint Probability Density Function of Joint Two - Dimensional r. v.:

إذا كــان كـــلٍ مـــن المتغيريـــن العشوائيين X, Y من النوع المتقطع فإن المتغير المشترك (X, Y) يسمى متغيراً متقطعاً ــ وإذا كان كلٍ منهما من النوع المستمر فإن (X, Y) يسمى متغيراً مستمراً. وهذين النوعين من المتغيرات هما أكثر الأنواع شيوعاً وأهمية إذ هى التى تصادفنا أكثر من غيرها فى دراستنا لنظريتى الاحتمالات والإحصاء ــ غير أن هناك نوع ثالث مهم ــ وإن كان أقل شيوعاً وأهمية من النوعين المشار إليهما ــ وهو عـــندما يكون أحد المتغيرين مستمراً والثانى متقطعاً وفى هذه الحالة يسمى المتغير الثنائى (X, Y) بالمتغير المختلط ــ لذلك سنتناول أولاً بالدراسة المتغير العشوائى الثنائى المتقطع ثـــم المستمر على أن نتناول المتغير المختلط فى البند (2 ــ 21) بعد تقديم الدوال الهامشية والشرطية والتى تلزم لتقديم هذا المتغير.

(2 ــ 14 ــ 1) المتغير العشوائى الثنائى المشترك المتقطع:

إذا كان المتغير العشوائى المتقطع X يأخذ القيم ... $x_1, x_2,$ والمتغير المتقطع Y يأخذ القيم ... $y_1, y_2,$ فإن المتغير المتقطع المشترك (X, Y) يأخذ أزواج القيم (x_i, y_j) حيث = i, j ... ,1, 2 ــ وأزواج القيم (x_i, y_j) تمثل (هندسياً) نقط تقاطع الخطوط المستقيمة $X = x_i$، $Y = y_j$ فى المستوى R_2. فإذا رمزنا لاحتمال أن يأخذ المتغير X القيمة x_i والمتغير Y القيمة y_j بالرمز

$$(2.\ 14.\ 1):\ P_{ij} = P(x_i, y_j) = P(x, y) = \Pr[X = x_i, Y = y_j]$$

حيـــث $P_{ij} > 0$ ــ فـــإن P_{ij} تسمى دالة احتمال (أو دالة كثافة احتمال) المتغير المشـــترك المتقطع (X, Y) عند النقطة (x_i, y_j) ونحن نفضل أن نطلق على هذه الدالة اسم دالـــة الاحـــتمال بدلاً من دالة كثافة الاحتمال وذلك تمييزاً لها عن حالة المتغير المشترك

المســتمر الذى سوف نستخدم لدالته هذه التسمية ـــ لأن الدالة P_{ij} ما هى إلا احتمال كما يتضـــح من العلاقة (1 .14 .2) ولذلك نستخدم الحرف P للإشارة إليها وهو أول حرف فى كلمـــة احـــتمال Probability ومجموعة القيم أو النقط (x_i, y_j) التى تكون عندها $P_{ij} > 0$ تكون مجموعة محدودة أو على الأكثر قابلة للعد، كما أن المتغير المتقطع (X, Y) لا يأخذ أى قـــيمة خـــارج هذه المجموعة، لذلك فإن الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) للمتغير المشـــترك (X, Y) يكـــون موزعـــاً على مجموعة النقط (x_i, y_j). أى أن المتغير المشترك المـــتقطع (X, Y) يأخذ ـــ باحتمال يساوى الواحد الصحيح ـــ أزواج القيم (x_i, y_j). وجميع القيم أو النقط (x_i, y_j) التى عندها $P_{ij} > 0$ تسمى نقط قفز Jump Points كما أن احتمالاتها P_{ij} تســـمى قفزات. وبما أن المتغير (X, Y) يأخذ باحتمال يساوى الواحد الصحيح أزواج القيم (x_i, y_j) ـــ فإنه لا يأخذ أى قيم أخرى غيرها ـــ فى المستوى R_2 إذن:

$$(2.\ 14.\ 2):\ \sum_{i,j} P_{ij} = 1$$

والمجمـــوع مأخوذ بالنسبة لجميع نقط الاحتمال (x_i, y_j). وأى مجموعة من النقط E خالـــية من نقط الاحتمال (x_i, y_j) يكون احتمالها مساوياً الصفر ـــ أى $P(E) = 0$. ودالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) للمتغير المشترك (X, Y) يمكن كتابتها على الصورة:

$$(2.\ 14.\ 3):\ F(x, y) = \Pr(X \le x, Y \le y) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j \le y}} P_{ij}$$

والمجموع مأخوذ على جميع النقط (x_i, y_j) التى عندها $P_{ij} > 0$ وتحقق المتباينات

$$x_i \le x\ \ ,\ \ y_j \le y$$

ومما سبق يمكن تقديم التعريف التالى لدالة الاحتمال P_{ij}.

(2 ـــ 14 ـــ 1 أ) تعريف دالة الاحتمال P_{ij} ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير (X, Y):

إذا كانـــت (x_i, y_j) تمـــثل نقـــط احتمال المتغير المشترك المتقطع (X, Y) ـــ فإن احـــتمال أن يـــأخذ المتغير (X, Y) زوج القيم (x_i, y_j) يسمى دالة احتمال المتغير (X, Y) عند النقطة (x_i, y_j) ويرمز له بالرمز P_{ij} أو $P(x_i, y_j)$ أو P(x, y) حيث:

$$P_{ij} = Pr[\ X = x_i,\ Y = y_j\ ]$$

وتحقـــق المعادلـــة (2 .14 .2) ـــ كمـــا أن دالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) للمتغير المشترك (X, Y) تكون معطاة بالعلاقة (3 .14 .2).

وإذا كانت E مجموعة عناصرها بعض نقط الاحتمال (x_i, y_j) فإن احتمال أن ينتمى المتغير المشترك (X, Y) إلى المجموعة E هو:

$$(2.14.4):\ P(E) = \sum_{E} P_{ij}$$

والمجموع مأخوذ على جميع النقط (x_i, y_j) التى تمثل عناصر المجموعة E والتى عندها $P_{ij} > 0$.

(2 ــ 14 ــ 2) المتغير العشوائى الثنائى المستمر:

المتغـــير الثنائى المشترك (X, Y) يسمى متغيراً مستمراً إذا كان كل من X، Y من الــنوع المستمر ودالة توزيعه الاحتمالى F(x, y) مستمرة (من كل اتجاه) وإذا كانت هناك دالـــة f(x, y) غير سالبة وتكاملية على كل المستوى R_2 تسمى دالة كثافة احتمال المتغير المشـــترك (X, Y) ــ P. d. f. of The Joint r. v. (X, Y). بحيـــث أن لكل زوج من الأعداد الحقيقية (x, y) فى المستوى R_2 تكون دالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) معطاة بالعلاقة:

$$(2.14.5):\ F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{y} f(X,Y)\,dY\right]dX$$

وفى هذه الحالة تكون المشتقة التفاضلية $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ موجودة ومستمرة (ماعدا مــن الممكــن عند مجموعة معينة من النقط التابعة لعدد محدود من المنحنيات) ــ وعند جمــيع نقط استمرار المشتقة التفاضلية $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ تكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة f(x, y) هى هذه المشتقة أى أن:

$$(2.14.6):\ f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

والعلاقـــة الســـابقة تكون صحيحة عند جميع نقط استمرار الدالة f(x, y). ولأى مجموعـــة E فى المستوى R_2 يكون احتمال أن ينتمى المتغير المشترك (X, Y) للمجموعة E هو:

$$(2.14.7):\ P(E) = \iint_{E} f(x,y)\,dx\,dy$$

فإذا كانت E هى الفترة I المعطاة بالعلاقة (2. 13. 9a) فإن

$$(2.\ 14.\ 8):\ P(a_1 < X \le b_1,\ a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dx\ dy$$

وإذا كانت $E = R_2$ فإن:

$$P(R_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\ dy = 1$$

ومن هذا يتضح أن دالة كثافة الاحتمال f(x, y) تحقق المتساوية التالية:

$$(2.\ 14.\ 9):\ F(+\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\ dy = 1$$

(2 ــ 15) الدوال الهامشية أو التوزيعات الهامشية:

Marginal Functions or Marginal Distributions:

إذا كانت F(x, y) هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الثنائى (X, Y) فإن:

$$(2.\ 15.\ 1):\ F(x, \infty) = Pr(X \le x,\ Y < \infty)$$

فإذا كان (X, Y) متغير عشوائى متقطع فإن المعادلة السابقة (باستخدام العلاقة (2. 14. 3) تأخذ الصورة التالية:

$$(2.\ 15.\ 2):\ F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \le x}\ \sum_{j} P_{ij}$$

حيث P_{ij} هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغير المتقطع (X, Y)

$$= \sum_{i: x_i \le x}\left[P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \cdots\right]$$

$$\begin{aligned} F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \le x}[&P(X = x_i, Y = y_1) \\ &+ P(X = x_i, Y = y_2) \\ &+ P(X = x_i, Y = y_3) \\ &+ \cdots\ ] \end{aligned}$$

والاحتمال داخل القوس المربع يمثل احتمال أن المتغير $X = x_i$ فى حــين أن المتغير Y يأخذ أى قيمة من قيمه الممكنة ــ وهذا هــو احتمــال أن $X = x_i$ أى هــو $P_{i.} = Pr(X = x_i)$ ــ وهو دالة احتمال X بصرف النظر عن Y إذن:

$$(2.\ 15.\ 3):\ F(x, \infty) = \sum_{i \cdot x_i \le x} P_{i.} = F_1(x)$$

وهى نفسها دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المفرد X كما يتضح من العلاقة (2. 6. 3) والدالة $F_1(x)$ فى هذه الحالة ــ حالة المتغير الثنائى (X, Y) ــ تسمى دالــة التوزيــع الاحتمــالى للمتغيــر X أو دالــة التوزيــع الاحتمــالى الهامشــية للمتغيــر X. Marginal Distribution Function of X.

ومما سبق يمكن القول أنه إذا كانت F(x, y) هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغيــر الثنائى (X, Y) فإن دالة التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغير X تأخذ الصورة:

$$(2.\ 15.\ 4):\ F(x, \infty) = F_1(x)$$

من المعادلة السابقة ومعادلة (2. 15. 2) يتضح أنه إذا كان المتغير (X, Y) مــن النوع المتقطع فإن دالة التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغير X تأخذ الصورة:

$$(2.\ 15.\ 5):\ F_1(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{J} P_{ij}$$

حيث P_{ij} هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) والمجموع مــأخوذ علــى جميع قيم j وعلى جميع قيم i التى عندها $x_i \le x$. وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنــه إذا كان المتغير (X, Y) من النوع المستمر فإن دالة التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغيــر X تأخذ الصورة:

$$(2.\ 15.\ 6):\ \boldsymbol{F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy \right] du}$$

وبمقارنة العلاقة (2. 15. 4) بالعلاقة (2. 6. 3) للمتغير المفرد المتقطع X نجد أن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير المفرد X يمكن الحصول عليها من دالة الاحتمال المشتركة P_{ij} للمتغير المشترك (X, Y) فى الصورة التالية:

$$(2.\ 15.\ 7):\ \boldsymbol{P_{i.} = Pr(X = x_i) = \sum_{J} P_{iJ}}$$

كما أن:

$$(2.15.8):\ \sum_i P_{i.} = \sum_i \sum_j P_{ij} = 1$$

وبالمثل بمقارنة العلاقة (2. 15. 6) بالعلاقة (2. 7. 1) نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير المفرد المستمر X يمكن الحصول عليها من دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ للمتغير المشترك المستمر (X, Y) فى الصورة التالية:

$$(2.15.9):\ f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

ويمكن إثبات أن الدالة $f_1(x)$ دالة مستمرة بالنسبة للمتغير X عند جميع قيم x التى تكون عندها $f(x, y)$ مستمرة بالنسبة لهذا المتغيرــ أى أن $f_1(x)$ دالة كثافة احتمال متغير مستمر ــ حيث

$$(2.15.10):\ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\ dx = 1$$

ويمكن اشتقاق صيغ مشابهة للتوزيع الهامشى للمتغير العشوائى Y حيث نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغير Y هى:

$$(2.15.11):\ F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_i P_{ij}$$

ذلك إذا كان المتغير (X, Y) من النوع المتقطع أما إذا كان من النوع المستمر فإن:

$$(2.15.12):\ F_2(y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\,dx\right]dv$$

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y إذا كان (X, Y) متغير متقطع هى:

$$(2.15.13):\ P_{.j} = \Pr(Y = y_j) = \sum_i P_{ij}$$

حيث

$$\sum_j P_{.j} = \sum_j \sum_i P_{ij} = 1$$

كما أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y إذا كان (X, Y) متغير مستمر تكون:

$$(2.\ 15.\ 14):\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

حيث $f_2(y)$ دالة مستمرة بالنسبة لجميع قيم y التى تكون عندها $f(x, y)$ مستمرة بالنسبة لنفس المتغير y، كما أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\ dy = 1$$

(2 ـ 16) ملاحظات:

:(2 ـ 16 ـ 1)

كما ذكرنا فى حالة المتغير المفرد ـ فى البند (2 ـ 7 ـ 6) ـــ يمكن تمثيل الاحتمال الكلى الذى يعادل الوحدة للمتغير المشترك (X, Y) بكتلة (من مادة ما) وزنها يساوى الوحدة (وحدة الوزن) وموزعة على المستوى R_2 بطريقة ما بحيث أن أى مجموعة جزئية E فى المستوى R_2 تحتوى على كمية من هذه المادة كتلتها تعادل الاحتمال P(E) الذى يمثل احتمال أن ينتمى المتغير (X, Y) إلى المجموعة E.

:(2 ـ 16 ـ 2)

وبإسقاط كتلة المادة الموزعة فى المستوى R_2 على محور واحد نحصل على توزيع هامشى لأحد المتغيرين ـ فإذا كان الإسقاط على محور X نحصل على التوزيع الهامشى للمتغير X وإذا كان الإسقاط على محور Y نحصل على التوزيع الهامشى للمتغير Y. فإذا كان المتغير (X, Y) من النوع المتقطع فإن كلٍ من المتغيرين X، Y يكون من النوع المتقطع. وفى التوزيع الهامشى لكل منهما تكون الكتلة الكلية (الاحتمال الكلى) متركزةً فى نقط احتمال معينة عددها إما محدود أو غير منتهى ولكن قابل للعد. فلو كانت ... $x_1, x_2,$ هى نقط الاحتمال فى التوزيع الهامشى للمتغير X و... $y_1, y_2,$ هى نقط الاحتمال فى التوزيع الهامشى للمتغير Y ـ فإن الكتلة الكلية (أو الاحتمال الكلى) فى التوزيع الثنائى المشترك للمتغير (X, Y) تكون متركزة عند نقط تقاطع الخطوط المستقيمة $X = x_i$ و $Y = y_j$ أى عند النقط (x_i, y_j) حيث كلٍ من i, j تأخذ القيم ... ,1, 2, 3، بحيث أن الكتلة (أو الاحتمال) المتركزة عند النقطة (x_i, y_j) يساوى P_{ij}. وحيث أن النقط ... $x_1, x_2,$ على محور X. تمثل نقط الاحتمال فى التوزيع الهامشى للمتغير X، فإن الاحتمال $P_{i.}$ ـ المعطى بالعلاقة (7 .15 .2) ـ يكون هو مقدار الكتلة المتركزة عند النقطة x_i.

(2 ــ 16 ــ 3) المتغير الثنائى المتلاشى (أو المدمج) :Degenerate r. v.

تعميماً لبند (2 ــ 6 ــ 4) من حالة المتغير المفرد المدمج إلى حالة المتغير الثنائى يمكن تقديم ما يلى:

المتغير العشوائى (X, Y) يسمى متغيراً متلاشياً (أو مدمجاً) إذا وُجِدَت نقطة وحيدة (x_0, y_0) فى المستوى R_2 يتركز عندها الاحتمال الكلى الذى يعادل الوحدة وفى هذه الحالة تكون دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة لهذا المتغير معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.16.1a): F(x, y) = \in (x - c_1, y - c_2) = \begin{cases} 1 & ; x \geq c_1 , y \geq c_2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وتكون دالة كثافة احتماله:

$$(2.16.1b): P(x, y) = \begin{cases} 1 & ; (x, y) = (c_1, c_2) \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وقد يكون أحد المتغيرين متلاشياً دون الآخر وتكون دالة توزيعه الاحتمالى كما سبق تعريفها فى (2 ــ 6 ــ 4).

(2 ــ 16 ــ 4):

ذكرنا قبل ذلك فى حالة المتغير المفرد المستمر أن احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة يساوى الصفر كما هو موضح بالعلاقة (2. 7. 5). والآن ننوه فى حالة المتغير المستمر الثنائى (X, Y) أن احتمال أن يساوى المتغير (X, Y) نقطة ما (x, y) فى المستوى R_2 أو ينتمى إلى خط ما فى R_2 يساوى الصفر. فمن العلاقة (2. 14. 8) نجد أن:

$$(2.16.2): Pr(X = x, Y = y) = \int_x^x \int_y^y f(u, v) du\, dv = 0$$

أى أن الاحتمال عند نقطة فى المستوى R_2 يساوى الصفر. وبالمثل يكون الاحتمال على أى خط فى المستوى R_2 ــ ليكن الخط المستقيم $X = x$ ــ هو:

$$(2.16.3): \Pr(X = x, -\infty \leq Y \leq \infty) = \int_x^x \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du\, dy = \int_x^x f_1(u) du = 0$$

ويمكن إثبات أن احتمال أن ينتمى المتغير المستمر (X, Y) إلى أى مجموعة قابلة للعد من النقط أو المنحنيات فى المستوى R_2 يساوى الصفر.

مثال (2 ـ 16 ـ 1):

تجربة عشوائية تتكون من سحب كرتان (بدون إرجاع) من كيس بـه 3 كـرات بيضاء وكرتان سوداء. فإذا كان المتغير العشوائى الثنائى (X, Y) معرف على فراغ العينة لهذه التجربة بحيث أن المتغير X يمثل نتيجة السحبة الأولى وY نتيجة السحبة الثانية ـــ و $X = 0$ إذا كانت نتيجة السحبة الأولى كرة بيضاء و $X = 1$ إذا كانت النتيجة كرة سوداء ـــ كما أن $Y = 0$ إذا كانت نتيجة السحبة الثانية كرة بيضاء و $Y = 1$ إذا كانـت كـرة سوداء.

(أ) أوجد دالة الاحتمال المشتركة $P_{i\,j}$ للمتغير (X, Y) ودالتى الاحتمال الهامشيتين $P_{i.}$، $P_{.j}$ لكل من المتغيرين X وY على الترتيب. وارسم هذه الدوال.

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ وارسمها وكـذلك دالتـى التوزيـع الهامشيتين $F_1(x)$، $F_2(y)$ مع رسم كلٍ منهما. ـــ هل شكل دالتى التوزيع الهامشـيتين يوضح أن كلٍ منهما مستمرة من ناحية اليمين؟

(جـ) أوجد الاحتمالات التالية:

$$P_1 = \Pr(0 \le X < 1\ ,\ 0 \le Y < 1)$$
$$P_2 = \Pr(0 \le X < 1\ ,\ 0 \le Y \le 1)$$
$$P_3 = \Pr(X = 1\ ,\ Y = 1)$$

(الحل)

(أ) لو رمزنا للكرة البيضاء بالحرف W والكرة السوداء بالحرف B فإن فـراغ العينـة لهذه التجربة يتكون من مجموعة من العناصر كل عنصر يمثله زوج مرتـب مـن الحرفين (W, B) أو (B, W) أو (W, W) أو (B, B) الأيسر يمثل نتيجـة السـحبة الأولى والأيمن نتيجة السحبة الثانية. ويكون فراغ العينة هو:

$$S = \{(W, W), (W, B), (B, W), (B, B)\}$$

وبتعريف المتغير (X, Y) على فراغ العينة S نجد أن (X, Y) يأخذ القيم التالية:

$$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1).$$

وهى نقط الاحتمال للمتغير المشترك (X, Y).

X \ Y	0	1
0	(0, 0)	(0, 1)
1	(1, 0)	(1, 1)

وعند نقط الاحتمال هذه يمكن الحصول على دالة الاحتمال المشتركة P_{ij} باستخدام العلاقة (2. 14. 1):

$$P_{00} = \Pr(X = 0, Y = 0) = \tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{4} = \tfrac{3}{10}$$

وبالمثل

$$P_{10} = \tfrac{3}{10} \quad , P_{01} = \tfrac{3}{10} \ , \ P_{11} = \tfrac{1}{10}$$

كما يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشية $P_{i.}$ للمتغير X باستخدام العلاقة (2. 15. 7) وبالمثل دالة الاحتمال الهامشية $P_{.j}$ للمتغير Y ــ كما يلى:

أولاً: $P_{i.}$ عندما $i = 0, 1$.

$$P_{0.} = \sum_{J=0}^{1} P_{0J} = P_{00} + P_{01} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{6}{10}$$

وبالمثل:

$$P_{1.} = P_{10} + P_{11} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{4}{10}$$

ثانياً: $P_{.J}$ عندما $J = 0, 1$:

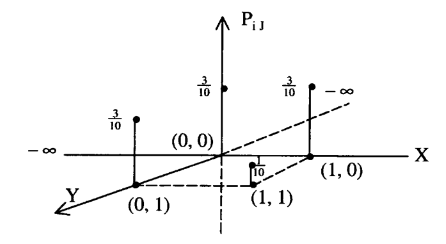
$$P_{.0} = \sum_{i=0}^{1} P_{i.} = P_{00} + P_{10} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{6}{10}$$

$$P_{.1} = P_{01} + P_{11} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{4}{10}$$

ويمكن كتابة الاحتمالات المشتركة P_{ij} والاحتمالات الهامشية $P_{i.}$، $P_{.j}$ فى الجدول التالى:

	P_{ij}		
X \ Y	0	1	$P_{i.}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
$P_{.j}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

فى الجدول السابق العمودان الأول والأخير يمثلان قيم X والاحتمالات المناظرة ـ أى يمثل توزيع المتغير X ـ وبالمثل الصف الأول والأخير يمثل توزيع Y ـ أما صلب الجدول فيمثل قيمة دالة الاحتمال المشتركة $P_{i\ j}$ عند جميع نقط الاحتمال وفيما يلى رسم الدالة P_{ij}.



أما الدالتين الهامشيتين $P_{i.}$ ، $P_{.j}$ فيمكن رسمهما بالشكل التالى:

وشكل الدالة $P_{.j}$ مثل الشكل السابق تماماً مع كتابة Y بدلاً من X و $P_{.j}$ بدلاً من $P_{i.}$.

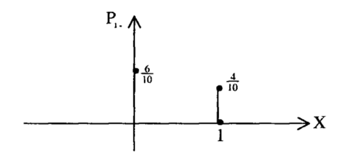
(ب) أما بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) فنجد أنها تساوى الصفر لجميع قيم $x < 0$, $y < 0$ ولكن

(1) عندما $0 \le x < 1$ تكون

$$F(x,y) = \tfrac{3}{10} \quad ; 0 \le y < 1$$
$$= \tfrac{6}{10} \quad ; y \ge 1$$

(2) وعندما $x \ge 1$ تكون

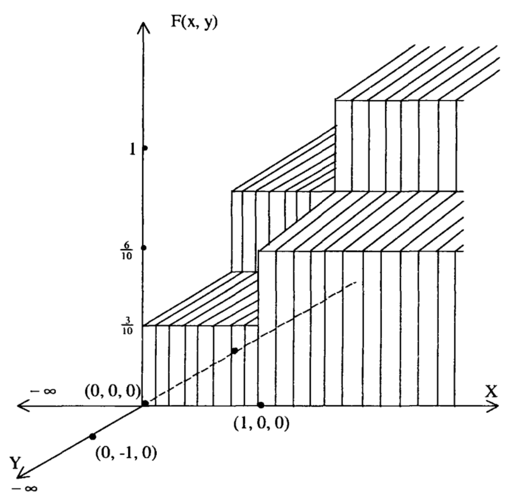
$$F(x,y) = \tfrac{6}{10} \quad ; 0 \le y < 1$$
$$= 1 \qquad y \ge 1$$



ويمكن كتابتها فى شكل جدول كما يلى:

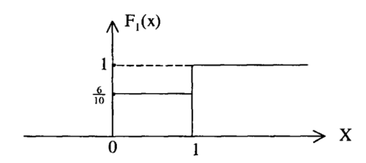
X \ Y	F(x, y)			
	$y < 0$	$0 \le y < 1$	$y \ge 1$	$F_1(x) = F(x, \infty)$
$x < 0$	0	0	0	0
$0 \le x < 1$	0	3/10	6/10	6/10
$x \ge 1$	0	6/10	1	1
$F_2(y) = F(\infty, y)$	0	6/10	1	

والشكل التالى يوضح شكل الدالة F(x, y)

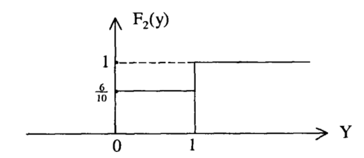


"جعلنا الجزء الخارجى من محور Y هو السالب لتوضيح الرسم"

وبعمل إسقاط لمحور Y على محور X نحصل على شكل دالة التوزيع الهامشية للمتغير X فى المستوى (X 0 F) ـ أو من العمودين الأول والأخير من الجدول السابق ـ نحصل على:



وبالمثل نجد أن دالة التوزيع الهامشية للمتغير Y هى:



من الشكلين السابقين نرى أن دالة التوزيع الهامشية لكل من X، Y دالـــة درجيـــه قفازة ومستمرة من ناحية اليمين كما أن شكل الدالة $F(x, y)$ السابق يوضح أنها دالة قفازة ومستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لكل من المتغيرين كلٍ على حده.

(جـ) باستخدام العلاقة (2. 14. 3) وجدول P_{ij} السابق نجد أن:

$$P_1 = \Pr(0 \le X < 1 \ , \ 0 \le Y < 1) = \Pr[(0,0)] = P_{00} = \tfrac{3}{10}$$

$$P_2 = \Pr(0 \le X < 1 \ , \ 0 \le Y \le 1) = \Pr[(0,0),(0,1)]$$
$$= P_{00} + P_{01} = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{6}{10}$$

$$P_3 = \Pr(X = 1 \ , \ Y = 1) = P_{11} = \tfrac{1}{10}.$$

مثال (2 ــ 16 ــ 2):

إذا كان المتغيران العشوائيان X، Y من النوع المستمر ودالــة كثافــة الاحتمــال المشتركة للمتغير الثنائى (X, Y) هى:

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \quad , \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد ما يلى

(أ) دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ ودالتى التوزيع الهامشــيتين $F_1(x)$، $F_2(y)$ ــ وكذلك دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين $f_1(x)$، $f_2(y)$.

(ب) $Pr(X > 2\,Y) \; , \; P(X < 2\,y)$

(جـ) $Pr(X > 1)$

(د) $Pr(X = Y)$

(هـ) $Pr(X + Y \leq 1)$

(الحل)

(أ) من العلاقة (5 .14 .2) نجد أن دالة التوزيع المشتركة $F(x, y)$ هى:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-(u+v)}\, du\; dv = \left[-e^{-u}\right]_0^x \; \left[-e^{-v}\right]_0^y$$
$$= \left[1 - e^{-x}\right] \left[1 - e^{-y}\right] \; ; \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \; \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \; \partial y}\left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-y}\right) = e^{-x}\, e^{-y} = e^{-(x+y)}$$

وهى دالة كثافة الاحتمال $f(x, y)$.

ومن العلاقة (6 .15 .2) نجد أن:

$$F_1(x) = F(x, \infty) = 1 - e^{-x} \quad ; \; x \geq 0$$
$$F_2(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y} \quad ; \; y \geq 0$$

كما أن:

$$f_1(x)=\frac{d F_1(x)}{dx}=e^{-x} \quad ; x \geq 0$$

أو

$$f_1(x)=\int_0^{\infty} f(x,y)dy=e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy=e^{-x} \quad ,x \geq 0$$

وبالمثل

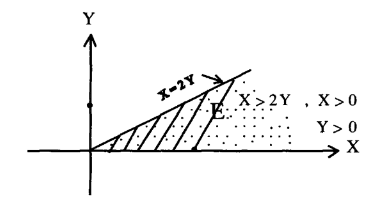
$$f_2(y)=e^{-y} \qquad , y \geq 0$$

(ب)

$$\Pr(X>2Y)=P(E)$$

حيث E هى مجموعة النقط فى المستوى R_2 التـــى تحقـــق العلاقـــة $X>2Y$ و $X \geq 0$, $Y \geq 0$ ـــ أى أن:

$$E=\{(x,y): x>2y \ , \ x,y \geq 0\}$$



المنطقة المظللة تمثل المجموعة E ـــ إذن باستخدام العلاقة (2. 14. 7) نجد أن:

$$\Pr(X > 2Y) = \Pr(E) = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x/2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-x}\left[\int_{0}^{x/2} e^{-y}\,dy\right]dx$$

$$= \left[-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} - \left(-\tfrac{2}{3}\right)e^{-\frac{3}{2}x}\Big|_{0}^{\infty}\right] = \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore \Pr(X < 2Y) = 1 - P(X > 2Y)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

(جـ)

$$\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X \le 1) = 1 - F_1(1) = 1 - \left[1 - e^{-1}\right] = e^{-1}$$

(د)

$$\Pr(X = Y) = P(E)$$

حيث E هى مجموعة النقط الموجودة على الخط $X = Y$ فى المستوى R_2 إذن

$$\Pr(X = Y) = 0$$

كما أوضحنا فى البند (2 ــ 16 ــ 4) أن الاحتمال على أى خط فى المســتوى R_2 يساوى الصفر.

كما أن:

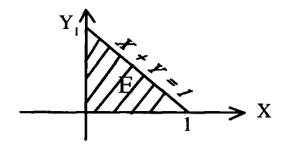
$$\Pr(X = Y) = \int_{x=0}^{\infty}\left(\int_{y=x}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{\infty}(0)\,dx = 0.$$

(هـ)

$$\Pr(X + Y \le 1) = P(E)$$

حيث

$$E = \{(x,y):\ x + y \le 1\ ,\ x > 0\ ,\ y > 0\}$$



E هى المنطقة المظللة فى الرسم السابق.

$$\Pr(X + Y \le 1) = \Pr(E) = \iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x,y>0}} e^{-x}\, e^{-y}\, dx\ dy$$

$$= \int_0^1 e^{-x}\left[1 - e^{-(1-x)}\right]dx = 1 - 2e^{-1}.$$

:(5 ـ 16 ـ 2)

نلاحظ أن معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة (أو دالة الاحتمال المشتركة) لمتغير ثنائى (X, Y) يترتب عليه معرفة دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين ولكن العكس غير صحيح بصفة عامة ــ أى أن معرفة الدوال الهامشية لا يترتب عليه معرفة الدالة المشتركة. وقد قدم "جمبل" "E. J. Gumbel" عام 1958 عدد لانهائى من دوال كثافات الاحتمال المشتركة لها جميعاً نفس الدالتين الهامشيتين.

وهذا يوضح أن معرفتنا للدالتين الهامشيتين لا يوصلنا إلى دالة كثافة احتمال مشتركة وحيدة وإنما قد يوصلنا إلى عدد لانهائى من دوال كثافات الاحتمال المشتركة ــ كما فى حالة الدوال التى قدمها "جمبل". لذلك نقدم فيما يلى الدوال المشتركة التى قدمها "جمبل" ونثبت أنها كثافات احتمال وأنها تحقق الخاصية المشار إليها. لقد قدم "جمبل" دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$(2.16.4):\ f(x,y,\alpha) = f_1(x)\, f_2(y)\{1 + \alpha\,[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1]\}$$

لجميع قيم $-1 \leq \alpha \leq 1$ ، حيث أن $f_i(.)$ دالة كثافة احتمال، $F_i(.)$ دالـــة التوزيـــع الاحتمالى المناظرة $(i = 1, 2)$.

الدالة المشتركة السابقة تمثل عدد لانهائى من دوال كثافات الاحتمال لجميـــع قـــيم $-1 \leq \alpha \leq 1$ ، إذ يمكن إثبات أنه لكل قيمة من قيم α تكون الدالة $f(x, y, \alpha)$ دالة كثافة احتمال. ولما كانت قيم α عددها لانهائى $(-1 \leq \alpha \leq 1)$ فيكون لدينا عدد لانهائى مـــن دوال كثافات الاحتمال المشتركة $f(x, y, \alpha)$. فإذا أثبتنا بعد ذلك أن كل هذه الدوال لهـــا نفس دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين نكون قد حققنا الهدف الذى نسعى إليـــه، وهـــو أن معرفة الدوال الهامشية لا يترتب عليـــه تحديـــد دالـــة مشـــتركة وحيـــدة. ولإثبـــات أن $f(x, y, \alpha)$ دالة كثافة احتمال مشتركة نثبت أولا أنها غير سالبة وثانياً أن تكاملها بالنسبة لـــ x و y يساوى الواحد الصحيح وذلك كما يلى:

أولاً: بما أن $-1 \leq \alpha \leq 1$ وكلٍ من $F_1(x)$ و $F_2(y)$ دالة توزيع احتمالى إذن كـــلٍ من $[2F_1(x) - 1]$ و $[2F_2(y) - 1]$ تقع بين +1 و -1 وعلى ذلك فإن حاصل ضرب α فى العاملين السابقين يحقق العلاقة التالية:

$$-1 \leq \alpha[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1] \leq 1$$

إذن:

$$1 + \alpha[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1] \geq 0$$

وبالتعويض عن ذلك فى معادلة (2. 16. 4) نجد أن $f(x, y, \alpha) \geq 0$ أى دالة غيـــر سالبة.

ثانياً: لإثبات أن تكامل الدالة $f(x, y, \alpha)$ بالنسبة للمتغيرين y و x يساوى الواحـــد الصحيح يكفى إثبات أن دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين لهذه الدالة همـــا دالتـــى كثافـــة الاحتمال $f_1(x)$ و $f_2(y)$ إذ أنه فى هذه الحالة يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha) dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha) dy \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x)] dx = 1$$

ويمكن إثبات أن $f_1(x)$ هى دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X كما يلى:

نفرض أن:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y) \{1 + \alpha[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1]\}\, dy$$

$$= f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\, dy + \alpha[2F_1(x) - 1] \int_{-\infty}^{\infty} [2F_2(y) - 1] f_2(y)\, dy \right\}$$

فى التكامل الأخير ضع:

$$F_2(y) = Z$$

$$\therefore I = f_1(x) \left\{ 1 + \alpha[2F_1(x) - 1] \int_0^1 (2Z - 1) dz \right\} = f_1(x)$$

أى أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X هى $f_1(x)$ ــ وبالمثل يمكن إثبات أن الدالة الهامشية للمتغير Y هى $f_2(y)$. وهذا يؤكد أن الدالة $f(x, y, \alpha)$ دالة كثافة احتمال وأن تكاملها يساوى الواحد الصحيح.

ويمكن إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغير (X, Y) هى:

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y) \{1 + \alpha[1 - F_1(x)][1 - F_2(y)]\}.$$

(2 ــ 17) التوزيعات الشرطية للمتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة:

Conditional Distributions of Two – Dimensional r. v. 's.:

مفهوم التوزيعات الشرطية مثل مفهوم الاحتمال الشرطى تماما ــ وفى الاحتمال الشرطى ــ فى الباب الأول بند (I ــ 19) قدمنا صيغة هامة لاحتمال وقوع حدث ما A إذا علمنا أن حدث آخر B قد وقع فعلاً ــ فإذا كان الحدثان A، B معرفان على فراغ احتمالى واحد فإن الاحتمال الشرطى $P(A \mid B)$ لوقوع الحدث A إذا علمنا أن الحدث B قد وقع فعلا هو:

$$(2.\ 17.\ 1):\quad P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

إذا كانت $P(B) > 0$ ويترك بدون تعريف إذا كانت $P(B) = 0$. وحيث أننا نهتم أساساً بالأحداث المعرفة بدلالة المتغيرات العشوائية، لذلك يكون من المفيد إعادة صياغة حالات (أو معادلات) الاحتمال الشرطى المعطاة فى الباب الأول بند (1 ـــ 19) معبرين عن الأحداث بالمتغيرات العشوائية، وهذا ما نسميه بالتوزيعات الشرطية. وسوف نبدأ بمناقشة هذا الموضوع بالنسبة للنوعين الأكثر أهمية من المتغيرات العشوائية وهما النوع المتقطع والنوع المستمر ـــ على أن نبدأ بحالة المتغير الثنائى فى البندين (2 ـــ 17 ـــ1، 2) ثم نعمم فيما بعد إلى حالة المتغير المتعدد الذى يحتوى على n من المركبات فى البندين (2 ـــ 18، 19) ثم نقدم المتغيرات العشوائية المستقلة والاستقلال الإحصائى فى البند (2 ـــ 20) ثم التوزيعات المشتركة المختلطة فى بند (2 ـــ 21).

(2 ـــ 17 ـــ 1) التوزيعات الشرطية للمتغير المتقطع (X, Y):

Conditional Distributions of the Discrete r. v. (X, Y):

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان X و Y من النوع المتقطع ومعرفان على فراغ احتمالى واحد حيث أن X ممكن أن يأخذ أحد القيم التالية x_i $(i = 1, 2, ...)$ و Y ممكن أن يأخذ أحد القيم y_J $(J = 1, 2, ...)$ وكانت دالة الاحتمال المشتركة P_{iJ} للمتغير الثنائى المتقطع (X, Y) هى:

$$P_{iJ} = \Pr(X = x_i \ , \ Y = y_J)$$

فإن التوزيع الهامشى لكل من X و Y هو على الترتيب كما يلى:

$$P_{i.} = \Pr(X = x_i) \ ; \ i = 1, 2, ...$$
$$P_{.J} = \Pr(Y = y_J) \ ; \ J = 1, 2, ...$$

فإذا كان الحدث A هو أن القيمة المشاهدة للمتغير العشوائى X تساوى x_i ـــ حيث $P_{i.} > 0$ ـــ وكان الحدث B هو أن القيمة المشاهدة للمتغير Y تساوى y_J ـــ حيث $P_{.J} > 0$ ـــ فإن العلاقة (1 .17 .2) تصبح كما يلى:

$$(2.\ 17.\ 2):\ \Pr(X = x_i \mid Y = y_J) = \Pr(x_i \mid y_J) = \frac{\Pr(X = x_i, Y = y_J)}{\Pr(Y = y_J)} = \frac{P_{iJ}}{P_{.J}}$$

إذا كانت $P_{.J} > 0$ وتترك بدون تعريف إذا كانت $P_{.J} = 0$ ـــ والعلاقة السابقة صحيحة لجميع قيم $J = 1, 2, ...$ ـــ وعندما تكون $Y = y_J$ أى عندما يأخذ المتغير Y قيمة ثابتة y_J و X تتغير آخذة جميع نقط الاحتمال $x_1, x_2, ...$ للمتغير X فإن العلاقة (2. 17. 2) تسمى دالة احتمال المتغير المتقطع X عندما (أو بشرط أن) $Y = y_J$ أو دالة الاحتمال

الشرطية للمتغير X عندما $Y = y_J$ ـ وهنا المتغير Y يسمى بالمتغير المستقل (أو المتبوع) والمتغير X يسمى بالمتغير التابع وأحياناً نرمز له بالرمز $X|_y$ بدلاً من X. ويمكن أن نرمز لدالة الاحتمال الشرطية للمتغير التابع X عندما يكون المتغير المستقل Y مساويا للقيمة y بالرمز التالى:

$$(2.\ 17.\ 3):\ P(x \mid y) = \frac{P(x, y)}{P_2(y)}$$

حيث $P(x,\ y)$ هى دالة احتمال المتغير $(X,\ Y)$ و$P_2(y)$ دالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y. والعلاقة (2. 17. 2) [وكذلك العلاقة (2. 17. 3)] تحقق شروط كثافة الاحتمال إذ نجد أن: $P(x_i \mid y_J) \geq 0$ كما أن:

$$(2.\ 17.\ 4):\ \sum_i P(x_i \mid y_J) = \frac{1}{P_{.J}} \sum_i P(x_i, y_J) = \frac{1}{P_{.J}} P_{.J} = 1.$$

كما أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير الشرطى $X \mid y_J$

$$(2.\ 17.\ 5):\ F(x \mid y_J) = \frac{1}{P_{.J}} \sum_{i:x_i \leq x} P(x_i, y_J) = \sum_{i:x_i \leq x} \left[P_{iJ} \Big/ \sum_s P_{sJ} \right].$$

وبالمثل يمكن الحصول على صيغ مماثلة للمتغير الشرطى $Y|_{x_i}$ حيث نجد أن:

$$(2.\ 17.\ 6):\ P(y_J \mid x_i) = P_{iJ} / P_{i.}$$

$$P(y \mid x) = P(x, y)/P_1(x)\ ,,\ F(y \mid x_i) = \sum_{J.y_J \leq y} \left[P_{iJ} \Big/ \sum_s P_{is} \right].$$

والعلاقة (2. 17. 3) يمكن أن توضع فى الصورة التالية:

$$(2.\ 17.\ 7):\ P(x, y) = P(x \mid y) P_2(y) = P(y \mid x) P_1(x)$$

والصيغة السابقة تمكننا من تحديد دالة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) على خطوتين فى الخطوة الأولى نحدد دالة احتمال المتغير الشرطى $X \mid y$ ـ الدالة $P(x \mid y)$ ـ وفى الخطوة الثانية نحدد دالة احتمال المتغير Y ـ الدالة $P_2(y)$ ـ وبضرب الدالتين فى بعضهما نحصل على دالة الاحتمال المشتركة $P(x,\ y)$. وبهذا نتمكن من الحصول على دالة الاحتمال الهامشية $P_1(x)$ للمتغير X التى كثيراً ما تكون هى هدفنا الأساسى ويكون من الصعب الحصول عليها مباشرة، لذلك نحصل أولاً على $P(x,\ y)$ بالطريقة التى أشرنا

إليها وبجمع $P(x, y)$ بالنسبة لجميع قيم y نحصل على الدالة الهامشية المســتهدفة $P_1(x)$.
ونقدم فيما يلى مثالين فى الأول منهما يمكن الحصول مباشرة على الدالة $P(x, y)$ ومنهــا نحصل على $P_1(x)$ ثم باستخدام العلاقة (3 .17 .2) نحصل على $P(y \mid x)$ ــ وفــى المثــال الثانى يكون من الأسهل الحصول على $P(y \mid x)$ و$P_1(x)$ ومنهما نحصل على $P(x, y)$ ومن الأخيرة نحصل على $P_2(y)$ حيث أنه من الصعب الحصول على $P(x, y)$ أو $P_2(y)$ مباشرة.

مثال (2 ــ 17 ــ 1): إذا كان (X_1, X_2) متغير عشوائى ثنائى مشترك دالـــة كثافــة احتماله معطاة بالجدول التالى:

(X_1, X_2)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P(X_1, X_2)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

و$P(x_1, x_2)$ تساوى الصفر خلاف ذلك.

أوجد الدالتيــن الهامشيتيــن $P_1(x_1)$ و $P_2(x_2)$ والدالتيــن الشــرطيتين $P_{12}(x_1 \mid x_2)$ و$P_{21}(x_2 \mid x_1)$.

(الحل)

يمكن الحصول علــى الــدالتين الهامشــيتين $P_1(x_1)$ و$P_2(x_2)$ بتطبيــق العلاقــة (7 .15 .2) ويتم ذلك بتكوين الجدول

X_1 \ X_2	0	1	$P_2 = \sum_i P_{ij}$
	P_{ij}		
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$
1	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
2	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$
$P_1 = \sum_j P_{ij}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$	1

[القيم الموجودة فى الخلايا الداخلية للجدول هى الاحتمالات P_{ij}]

الصف الأخير يمثل الدالة $P_2(x_2)$ والعمود الأخير يمثل الدالة $P_1(x_1)$.

بالنسبة للدالة الشرطية $P_{12}(x_1 \mid x_2)$ يمكن الحصول عليها كما يلى:

نوجد قيمة الدالة عند قيم x_2 المختلفة $(0, 1)$. عندما $x_2 = 0$: نوجد قيمة $P_{12}(x_1 \mid 0)$ لقيم $x_1 = 0, 1, 2$.

$$P_{12}(0 \mid 0) = \frac{\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0)}{\Pr(X_2 = 0)} = \frac{1}{18} \div \frac{11}{18} = \frac{1}{11}$$

وبالمثل:

$$P_{12}(1 \mid 0) = \frac{4}{11} \ , \ P_{12}(2 \mid 0) = \frac{6}{11}$$

وكذلك:

$$P_{12}(0 \mid 1) = \frac{3}{7} \ , \ P_{12}(1 \mid 1) = \frac{3}{7} \ , \ P_{12}(2 \mid 1) = \frac{1}{7}$$

وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على $P_{21}(X_1 \mid X_2)$ والجدولين التاليين يعطيان قيم الدالتين $P_{12}(X_1 \mid X_2)$ و $P_{21}(X_2 \mid X_1)$

$P_{12}(X_1 \mid X_2)$

$P_{12}(X_1 \mid X_2)$ / X_1	$P_{12}(X_1 \mid X_2 = 0)$	$P_{12}(X_1 \mid X_2 = 1)$
0	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{7}$
Σ	1	1

وبالمثل

$$P_{21}(X_2 \mid X_1)$$

$P_{21}(X_2 \mid X_1)$ / X_2	$P_{21}(X_2 \mid X_1=0)$	$P_{21}(X_2 \mid X_1=1)$	$P_{21}(X_2 \mid X_1=2)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$
Σ	1	1	1

مثال (2 ــ 17 ــ 2): عند سحب مجموعة مكونة من 13 ورقة مــن مجموعــة أوراق اللعب (الكوتشينة) ــ ما هو احتمال أن يوجد بين المجموعة المسحوبة x ولــد إذا علمنا أن بها y بنت ــ أى ما هو الاحتمال $Pr(x \mid y)$ ؟

(الحل)

بتطبيق مبادئ الاحتمالات يمكن إثبات أن احتمال أن يوجد بالمجموعة المســحوبة x ولد و y بنت هو:

$$P(x,y)=\frac{\binom{4}{x}\binom{4}{y}\binom{44}{13-x-y}}{\binom{52}{13}}$$

إذن $P_2(y)$ ــ احتمال أن يوجد بالمجموعة المسحوبة y بنت ــ هى:

$$P_2(y)=\sum_{x=0}^{4}P(x,y)=\binom{4}{y}\binom{48}{13-y}\Big/\binom{52}{13}$$

وبتطبيق العلاقة (2 . 17. 3) نجد أن:

$$P(x \mid y)=\binom{4}{x}\binom{44}{13-x-y}\Big/\binom{48}{13-y}.$$

مثال (2 ـ 17 ـ 3): X متغير عشوائى يمثل عدد النقط على السطح العلوى عند إلقاء زهرة نرد متزنة. ولدينا تجربة عشوائية تتكون من إلقاء زهرة نرد، فإذا كانت نتيجة الرمية هى $X = x$ فإننا نقوم بإلقاء x من قطع العملة المتزنة. والمتغير العشوائى Y يمثل عدد الصور التى نحصل عليها عند إجراء مثل هذه التجربة، فما هو احتمال الحصول على صور عددها y؟

(الحل)

المطلوب هو الحصول على $\Pr(Y = y) = P_2(y)$. هنا ليس من السهل الحصول على $P(x, y)$ كما فى المثال السابق، لكن يمكن بسهولة الحصول على $P(y \mid x)$ باستخدام القانون ذو الحدين حيث نجد أن:

$$P(y \mid x) = \binom{x}{y} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{y} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x}$$

كما أن:

$$P_1(x) = P(X = x) = \tfrac{1}{6}$$

إذن يمكن الآن الحصول على $P(x, y)$ باستخدام العلاقة (2. 17. 7) كما يلى:

$$P(x, y) = \tfrac{1}{6}\binom{x}{y} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x} \ , \ x = 1, 2, \ldots, 6 \, , \, y = 0, 1, 2, \ldots, x \ \ ; \ (y \le x).$$

لإيجاد $P_2(y)$ نجمع $P(x, y)$ بالنسبة لـــ x ابتداءاً من $x \ge y$ حتى $x = 6$

عندما $y = 0$

$$P_2(0) = \sum_{x=1}^{6} P(x, 0) = \sum_{x=1}^{6} \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{63}{384}$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة $P_2(y)$ لجميع قيم $y = 0, 1, 2, \ldots, 6$ ووضعها فى الجدول التالى:

y	0	1	2	3	4	5	6	Σ
$P_2(y)$	$\frac{63}{384}$	$\frac{120}{384}$	$\frac{99}{384}$	$\frac{64}{384}$	$\frac{29}{384}$	$\frac{8}{384}$	$\frac{1}{384}$	1

(2 ـــ 17 ـــ 2) التوزيعات الشرطية للمتغير الثنائى المستمر (X, Y):

Conditional Distributions of the Conditional r. v. (X, Y):

بفرض أن $f(x, y)$ دالة كثافة احتمال متغير ثنائى مستمر (X, Y). عند محاولة إيجاد الاحتمال $\Pr(Y \le y \mid X = x)$ تواجهنا بعض الصعوبات لاستخدام الاحتمال الشرطى المعطى بالعلاقة (2. 17. 1) وذلك لأن $\Pr(X = x) = 0$ حيث X متغير مستمر. لذلك نستبدل الحدث $X = x$ بالحدث $x - h < X \le x$ (حيث x إحدى قيم المتغير X، h عدد حقيقى غير سالب) ونفرض أن $\Pr(x - h < X \le x) > 0$ ونعرف الاحتمال الشرطى التالى:

$$(2.\ 17.\ 7):\ \Pr\left(Y \le y \mid x - h < X \le x\right) = F\left(y \mid x - h < X \le x\right)$$

$$= \frac{\Pr\left(Y \le y, x - h < X \le x\right)}{\Pr\left(x - h < X \le x\right)}$$

$$= \frac{\int_{x-h}^{x}\left[\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dv\right]du}{\int_{x-h}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\,dy\right]du}$$

هذه دالة توزيع احتمالى شرطية للمتغير العشوائى Y بشرط أن المتغير X يحقق المتباينة $x - h < X \le x$ عندما تكون $\Pr\left(x - h < X \le x\right) > 0$. وهى دالة توزيع احتمالى لأنها ـــ عندما تكون x، h قيم ثابتة ـــ تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير الشرطى المفرد $Y|_x$ ـــ حيث نجد أن الطرف الأيمن من العلاقة (2. 17. 7) يمثل دالة غير سالبة وغير تناقصية فى y ومستمرة من ناحية اليمين فى y كذلك وتساوى الصفر عندما $y = -\infty$ وتساوى الواحد الصحيح عندما $y = +\infty$ وإثبات هذا متروك للطالب. انظر تمرين (2 ـــ 52).

فى تعريفنا للعلاقة (2. 17. 7) سنقتصر على الحالة التى يكون فيها نهاية الطرف الأيمن لهذه العلاقة موجودة عندما $h \to 0$. ونفرض أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f\ (x,\ y)$ دالة مستمرة وأن دالة كثافة الاحتمال الشرطية $f_1(x)$ دالة مستمرة فى x (كما فى العلاقة (2. 15. 9)) حيث:

$$(2.\ 17.\ 8):\ f_1\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)dy$$

كما نفترض كذلك أن الدالة $f_1(x) > 0$ عند النقطة x. بعد كل هذه الفروض إذا قسمنا كلٍ من البسط والمقام فى الطرف الأيمن للعلاقة (2. 17. 7) على h وأخذنا النهايـة عندما $h \to 0$ يمكن الوصول إلى الصورة التالية:

$$(2.\ 17.\ 9):\ F(y \mid x) = \lim_{h \to 0} \Pr(Y \le y \mid x - h < X \le x) = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv.$$

والدالة $F(y \mid x)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير Y عندما X = x (أو للمتغير الشرطى $Y|_x$) وهى دالة مستمرة لمتغير عشوائى مفرد كمـا يتضـح مـن الفروض السابقة. وإثبات العلاقة (2. 17. 9) متروك للطالب. انظر تمرين (2 ــ 53).

وبمفاضلة طرفى العلاقة (2. 17. 9) بالنسبة لــ y نجد أن دالــة كثافــة الاحتمــال الشرطية المقابلة للدالة $F(y \mid x)$ هى الدالة:

$$(2.\ 17.\ 10a):\ f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

عندما تكون $f_1(x)$ دالة مستمرة فى X وأكبر من الصفر عند النقطة X = x كما أن

$$(2.\ 17.\ 10b):\ f(x, y) = f(y \mid x) f_1(x)$$

والعلاقة السابقة تمكننا من إيجاد $f(x, y)$ على خطوتين ــ الخطوة الأولى بإيجـاد $f(y \mid x)$ والثانية بإيجاد $f_1(x)$ وضرب الدالتين فى بعضهما. وهى مفيدة فى الحالات التـى يكون فيها من الصعب الحصول على $f(x, y)$ مباشرة من خلال التجربة العشوائية ومفيدة أيضاً لإيجاد $f_2(y)$ فى الحالات التى يكون فيها من السهل معرفة $f(y \mid x)$ و $f_1(x)$ وبالتـالى $f(x, y)$ فى حين من الصعب معرفة $f_2(y)$ مباشرة. وبنفس المعالجة السابقة يمكن الحصول على صيغ مشابهة لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للتوزيع الشرطى للمتغير X عندما Y = y فى الصورة التالية:

دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير X عندما Y = y هى:

$$(2.\ 17.\ 11):\ F(x \mid y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y)\, dt$$

ودالة كثافة الاحتمال الشرطية

$$(2.\ 17.\ 12a):\ f(x \mid y) = f(x, y) / f_2(y)$$

وكذلك

$$(2.\ 17.\ 12b):\ f(x, y) = f(x \mid y)\ f_2(y)$$

كما أن:

$$(2.17.13):\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y \mid x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y)\,dx = 1$$

حيث نجد من العلاقة (2. 17. 10a) أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y \mid x)\,dy = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{f_1(x)} f_1(x) = 1.$$

مثال (2 ــ 17 ــ 4): عند اختيار نقطة عشوائياً من الفترة $[0,1]$ إذا كان المتغير العشوائى X يمثل الرقم المقابل لهذه النقطة ــ والمتغير العشوائى Y يمثل الرقم المختار عشوائيا من الفترة $[0,x]$ حيث x هى القيمة المشاهدة للمتغير X فى الاختيار الأول. عند أجراء هذه التجربة المركبة أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى Y ــ الدالة $f_2(y)$.

(الحل)

من السهل إيجاد الدالة الهامشية $f_1(x)$ وذلك بافتراض أن جميع النقط فى الفترة $[0,1]$ لها نفس الفرصة من حيث الاختيار ــ وطبقاً لمفهوم الاحتمال الهندسى فى الباب الأول ــ تكون دالة كثافة احتمال المتغير X هى:

$$f_1(x) = 1 \qquad ; 0 \le x \le 1$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

وبالمثل دالة كثافة الاحتمال الشرطية $f(y \mid x)$ للمتغير Y عندما $X = x$ هى:

$$f(y \mid x) = \frac{1}{x} \qquad , 0 \le y \le x$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

ولكن لا يمكن استنباط دالة كثافة الاحتمال الهامشية $f_2(y)$ للمتغير Y مباشرة ــ لذلك نستخدم العلاقة(2. 17. 10a) حيث نجد أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) هى:

$$f(x,y) = f(y \mid x) f_1(x) = \frac{1}{x} \qquad ; 0 \le y \le x \le 1$$

والآن يمكن الحصول على الدالة الهامشية $f_2(y)$ بمكاملة الدالة السابقة بالنسبة للمتغير x حيث نجد أن:

$$f_2(y) = \int_{0 \le y \le x \le 1} \tfrac{1}{x}\,dx = \int_{y}^{1} \frac{dx}{x} = \ln\left(\tfrac{1}{y}\right) \;;\; 0 \le y \le 1.$$

مثال (2 ــ 17 ــ 5): فى مثال (2 ــ 16 ــ 2) أوجد

(1) $\Pr(Y>1 \mid X \le 1)$

(2) $\Pr(X>y \mid Y>1)$

(الحل)

(1)

(a) $$\Pr(Y>1 \mid X\le 1)=\frac{\Pr(Y>1, X\le 1)}{\Pr(X\le 1)}$$

(b) $$\Pr(Y>1, X\le 1)=\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx\ dy = e^{-1}\left[1-e^{-1}\right]$$

ومن مثال (2 ــ 16 ــ 2) نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X هــى
$f_1(x)=e^{-x}\ , x\ge 0$

إذن:

(c) $$\Pr(X\le 1)=\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx\ =1-e^{-1}$$

من (a) و(b) و(c) نجد أن:

$$\Pr(Y>1 \mid X\le 1)=e^{-1}$$

(2)
$$\Pr(X>Y \mid Y>1)=\frac{\Pr(X>Y,\ Y>1)}{\Pr(Y>1)}$$

ومن مثال (2 ــ 16 ــ 2) نجد أن:

$$\Pr(Y>1)=1-\Pr(Y\le 1)=1-F_2(1)=e^{-1}$$

$$\Pr(X>Y, Y>1)=\int_{x=1}^{\infty}\int_{y=1}^{x} e^{-x}e^{-y}\,dx\ dy=\int_{x=1}^{\infty} e^{-x}\left[\int_{y=1}^{x} e^{-y}\,dy\right]dx=\tfrac{1}{2}e^{-2}$$

$$\therefore \Pr(X>Y \mid Y>1)=\tfrac{1}{2}e^{-2}/e^{-1}=\tfrac{1}{2}e^{-1}.$$

(2 ــ 18) المتغير العشوائى المشترك المتعدد $(X_1, ..., X_n)$:

يمكننا الآن تعميم كل المفاهيم التى قدمناها فى حالة متغيرين إلــى حالــة n مــن المتغيرات العشوائية ــ حيث $n \geq 1$. لذا نقدم فيما يلى دوال التوزيع الاحتمالى وكثافــة الاحتمال والدوال الهامشية والشرطية الخاصة بالتوزيع الاحتمــالى المشــترك للمتغيــر المشترك المتعدد $(X_1, \ldots, X_n)$ كتعميم لحالة المتغير الثنائى.

(2 ــ 18 ــ 1) دالة التوزيع الاحتمالى ودالــة كثافــة الاحتمــال للمتغيــر المشترك المتعدد $(X_1, \ldots, X_n)$:

إذا كان لدينا n من المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ ــ حيــث $n \geq 1$ ــ المعرفــة على فراغ احتمالى واحد هو $[R_1, \beta_1, P]$ حيث R_1 هو الخط الحقيقى، β_1 هى أصــغر عائلة بوراليه مكونة من كل المجموعات الجزئية البوراليه على الخط الحقيقى وP هى دالة احتمال معرفة على كل المجموعات المكونة لعناصر العائلــة β_1 ــ فــيمكن إثبــات أن المتغير المشترك $(X_1, \ldots, X_n)$ يكون معرفاً على فراغ احتمالى جديد ــ يسمى بالفراغ الاحتمالى المتعدد (أو المشترك) ونرمز له بالرمز $[R_n, \beta_n, P_n]$ حيث R_n هو الفراغ ذو النون بعداً ــ الذى يتكون من تقاطع فراغات المتغيرات $X_1, \ldots, X_n$ ــ و β_n أصــغر عائلة بوراليه مكونة من كل المجموعات الجزئية البوراليه E فى الفــراغ R_n وP_n دالــة الاحتمال المشتركة المعرفة على كل المجموعات المكونة لعناصر العائلة β_n والمعطــاة بالعلاقة التالية:

$$(2.\ 18.\ 1):\ P_n(E) = \Pr[(X_1, \ldots, X_n) \in E]$$

والدالة P_n دالة احتمال وهى دالة مجموعة ــ كما سبق إيضاح ذلك فــى حالــة المتغير المفرد ــ كما أنها تحقق كل خصائص دالة الاحتمال. فهى دالة حقيقيــة وحيــدة القيمة غير سالبة. كما أن $P_n(R_n) = 1$ و $P_n(\phi) = 0$ حيث ϕ هى المجموعة الخاليــة (الفارغة) فى الفراغ R_n أو $P_n(E) = 0$ عندما يكون E حدث مســتحيل. فــإذا كانــت المجموعة E تمثل فترة فى الفراغ R_n ذو النون بعداً على الشكل التالى:

$$(2.\ 18.\ 2):\ E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : -\infty \leq X_i \leq x_i\ ,\ i = 1, 2, ..., n\}$$

حيث x_i أعداد حقيقية تمثل قيم معينة للمتغيرات X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ فــإن دالــة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغير المشترك $(X_1, \ldots, X_n)$ تكــون معطــاة بالعلاقــة التالية:

$$(2.\ 18.\ 3):\ F(x_1, \ldots, x_n) = P_n(E_n) = \Pr[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n]$$

وهى كما يبدو من المعادلة السابقة ـ مثل دالة الاحتمال P_n ـ دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة ولكنها دالة نقطة وليست دالة مجموعة مثل P_n ـ حيث أنها تعتمد فقط على القيم $x_1, ..., x_n$ وهذه القيم تمثل نقطة فى الفراغ R_n هى النقطة $(x_1, ..., x_n)$. ودالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1, ..., x_n)$ لها عدة خصائص يمكن الوصول إليها بأسلوب مماثل تماماً لحالة متغيرين عشوائيين ـ أى لدالة التوزيع الاحتمال $F(x, y)$ كما فى بند (2 ـ 13 ـ 3) ـ وهذه الخواص يمكن تلخيصها فى العلاقات من (2. 18. 4) إلى (2. 18. 8) التالية:

$$(2.18.4):\ F(-\infty, x_2, \ldots, x_n) = \cdots = F(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\infty) = 0$$

$$(2.18.5):\ F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1$$

$$(2.18.6):\ \lim_{h \to 0} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

لجميع قيم $i = 1, 2, ..., n$

وهذا معناه أن الدالة $F(x_1, ..., x_n)$ مستمرة من ناحية اليمين فى كل متغير من المتغيرات $X_1, ..., X_n$ وإذا كانت E_{ab} مجموعة جزئية فى الفراغ R_n معطاة بالعلاقة:

$$(2.18.7):\ E_{ab} = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_i < X_i \le b_i \quad, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

فإن احتمال أن ينتمى المتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ إلى المجموعة E_{ab} يكون معطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}(2.18.8):\ \Pr(E_{ab}) &= \Pr[(X_1, \ldots, X_n) \in E_{ab}] \\ &= F(b_1, \ldots, b_n) - F(a_1, b_2, \ldots, b_n) \\ &- \cdots - F(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \\ &+ F(a_1, a_2, b_3, \ldots, b_n) + \cdots \\ &+ F(b_1, \ldots, b_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - \cdots \\ &\cdots + (-1)^n F(a_1, \ldots, a_n) \ge 0\end{aligned}$$

والعلاقة السابقة مناظرة للعلاقة (2. 13. 10) فى حالة $n = 2$ ـ لذلك فهى شرط أساسى لكى تكون $F(x_1, ..., x_n)$ دالة توزيع احتمالى.

سنفرض فيما يلى أن المتغير $(x_1, ..., x_n)$ من النوع المستمر وسنوضح فيما بعد كيفية الحصول على كل الصيغ المماثلة عندما يكون المتغير من النوع المتقطع. ويمكن تعميم العلاقة (2. 13. 9b) من حالة متغيرين إلى حالة المتغير المتعدد $(X_1, ..., X_n)$ كما يلى:

إذا كانت I_n فترة موسعة فى الفراغ R_n معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.18.9):\ I_n = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i - h_i < X_i \le x_i + h_i \quad , i = 1,2,\ldots,n\}$$

فإن:

$$\begin{aligned}(2.18.10):\ \Pr(I_n) &= \Pr[(X_1,\ldots,X_n) \in I_n] = \Delta_n F(x_1,\ldots,x_n)\\ &= F(x_1 + h_1,\ldots,x_n + h_n)\\ &\quad - F(x_1 - h_1, x_2 + h_2,\ldots,x_n + h_n)\\ &\quad - \cdots - F(x_1 + h_1,\ldots,x_{n-1} + h_{n-1}, x_n - h_n)\\ &\quad + \cdots + (-1)^n F(x_1 - h_1,\ldots,x_n - h_n)\end{aligned}$$

ولو رمزنا لحجم الفترة I_n بالرمز $L(I_n)$ فإن:

$$(2.18.11):\ L(I_n) = \prod_{i=1}^{n}[x_i + h_i - (x_i - h_i)] = \prod_{i=1}^{n}[2h_i] = 2^n h_1 h_2 \ldots h_n .$$

وإذا اعتبرنا أن $\Delta_n F(x_1,\ldots,x_n) = \Pr(I_n)$ هى كمية الاحتمال المنتشـــــرة (أو كتلة من مادة ما منتشرة) فى الفترة I_n و $L(I_n)$ هو حجم هذه الفترة وكـــان المتغيـــــر $(X_1, \ldots, X_n)$ من النوع المستمر كما ذكرنا سابقاً فإن النسبة $\Delta_n F/L(I_n)$ تمثـــل كثافـــة الاحتمال $P(I_n)$ (أو كثافة المادة) المنتشرة فى الفترة I_n. كما أن المشتقة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = f(x_1,\ldots,x_n)$، إذا كانت هذه المشتقة الجزئية موجودة وتكـــون هى نهاية متوسط الكثافة $\Delta_n F/L(I_n)$ عندما $h_i \to 0$ لجميع قيم i وتسمى دالة كثافـــة احتمال المتغير المستمر المشترك $(X_1, \ldots, X_n)$. وعلى هذا تكون دالة كثافة احتمال المتغير المشترك المستمر $(X_1, \ldots, X_n)$ هى:

$$(2.18.12):\ f(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta_n F(x_1,\ldots,x_n)}{2^n h_1 h_2 \ldots h_n} \qquad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$= \frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

لجميع النقط $(x_1, \ldots, x_n)$ فى الفراغ R_n التى تكون عنـــدها المشـــتقة التفاضــــلية السابقة موجودة.

أمـــا إذا كان المتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ من النوع المتقطع فإن دالة احتماله المشتركة تكون معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.18.13):\ P(x_1, \ldots, x_n) = \Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

ولأى مجموعـــة E_n فى الفراغ R_n يكون احتمال أن المتغير $(X_1, ..., X_n)$ ينتمى للمجموعة هو E_n:

$$(2.18.14): \begin{cases} P_n[E_n] = \int_{E_n}\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n & \text{إذا كان المتغير } (X_1, ..., X_n) \text{ من النوع المستمر} \\ = \sum_{E_n} P(x_1, \ldots, x_n) & \text{إذا كان المتغير } (X_1, ..., X_n) \text{ من النوع المتقطع.} \end{cases}$$

حيــث أن التكامل مأخوذ على كل قيم $(x_1, ..., x_n)$ التى تنتمى إلى المجموعة E_n والمجمــوع مـــأخوذ علـــى جميع قيم $(x_1, ..., x_n)$ التى تتبع المجموعة E_n والتى عندها $P(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

ملاحظة (2 ــ 18 ــ 1 أ):

إذا كان المتغير العشوائى المشترك $(X_1, ..., X_n)$ له نقطة احتمال واحدة فى الفراغ R_n لتكن النقطة $(x_1, ..., x_n)$ فإن الاحتمال الكلى لهذا المتغير يكون متركزاً عند هذه النقطة وتكون دالة احتمال هذا المتغير عند هذه النقطة هى:

$$(2.18.15):\ P(x_1, \ldots, x_n) = \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = 1$$

وتكـــون $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ فـــى باقى الفراغ R_n ــ والمتغير العشوائى فى هـــــذه الحالـــة يسمى متغيراً مدمجاً أو متلاشياً Degenerate r. v. ــ وقد سبق بيان حالة المتغـــيـــر المدمج فى حالة المتغير المفرد بالعلاقة (2. 6. 6a, b) وفى حالة المتغير الثنائى بالعلاقـــــة (2. 16. 1a, b) ــ والـــنقطـــة $(x_1, ..., x_n)$ تســـمى مركز الثقل للمتغير المدمج $(X_1, ..., X_n)$ كمـــا تكون هذه النقطة هى نقطة احتماله الوحيدة، كما يمكن أن يكون متغيراً واحـــداً أو أكثر من المتغيرات $X_1, ..., X_n$ مدمجاً دون الباقى وهذا تعميم مباشر لما سبق إيضاحه فى حالة متغيرين.

ودالـــة كثافة الاحتمال $f(x_1, ..., x_n)$ للمتغير المستمر $(X_1, ..., X_n)$ تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$(2.18.16):\ f(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$$

$$(2.18.17):\ \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n=1$$

وإذا كـــان المتغـــير $(X_1, ..., X_n)$ مـــن الـــنوع المتقطع فإن دالة احتماله تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$(2.18.18):\ P(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$$

$$(2.18.19):\ \sum P(x_1,\ldots,x_n)=1$$

حيـــث $\sum$ هو المجموع مأخوذاً على كل قيم $(x_1, ..., x_n)$ الممكنة فى الفراغ R_n والتى عندها $P(x_1,\ldots,x_n)>0$.

(2 ــ 18 ــ 2) الدوال الهامشية للمتغير $(X_1, ..., X_n)$:

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ الذى عدد مركباته n حيث $n>2$ هى $F(x_1,\ldots,x_n)$ فيمكن الحصول على دوال توزيع احتمالى هامشية عددهـــا $\binom{n}{k}$ وكـــل مـــنها تعتـــبر دالـــة فى متغير مشترك عدد مركباته k لجميع قيم $k=1,2,\ldots,n-1$ وذلـــك بأسلوب مشابه تماماً لحالة المتغير الثنائى n = 2 والتى سبق تقديمها.

فمثلاً دوال التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغيرات المفردة X_i لجميع قيم $i = 1, 2, ..., n$ هى:

$$(2.18.20):\ F(\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty)$$
$$=\Pr(X_1\leq\infty,\ldots,X_{i-1}\leq\infty,X_i\leq x,X_{i+1}\leq\infty,\ldots,X_n\leq\infty)$$

كمـــا أن دوال التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغيرات الثنائية المشتركة (X_i, X_J) لجميع قيم $i, J = 1, 2, ..., n$ $(i<J)$ هى:

$$(2.18.21):\ F(\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty,x_J,\infty,\ldots,\infty)$$
$$=\Pr(X_1\leq\infty,\ldots,X_{i-1}\leq\infty,X_i\leq x,X_{i+1}\leq\infty$$
$$,\ldots,X_{J-1}\leq\infty,X_J\leq x,X_{J+1}\leq\infty,\ldots,X_n\leq\infty)$$

وبـــنفس الأســـلوب يمكـــن الحصـــول علـــى دوال التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغـــيرات المشـــتركة الثلاثـــية والرباعية وهكذا. كما يمكن الحصول على دوال كثافة

الاحتمال الهامشية المفردة والثنائية المتغيرات والثلاثية المتغيرات وغيرها من دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1, ..., x_n)$ للمتغيرات المستمرة $X_1, ..., X_n$ كما يلى:

$$(2.\ 18.\ 22):\ f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_n\,.$$

لجميع المتغيرات المفردة x_i، $i = 1, 2, ..., n$. وكذلك دوال كثافة الاحتمال الهامشية الثنائية المشتركة للمتغيرات (X_i, X_J) لجميع قيم $i, J = 1, 2, ..., n$ $(i < J)$ يمكن الحصول عليها كما يلى:

$$(2.\ 18.\ 23):\ f(x_i, x_J)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_{J-1}\,dx_{J+1}\ldots dx_n\,.$$

وهكذا يمكن استخدام نفس الأسلوب للحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأى مجموعة جزئية من المتغيرات $X_1, ..., X_n$ ولتكن المجموعة $(X_{J_1}, X_{J_2}, \ldots, X_{J_m})$ حيث $m < n$ كما يلى:

$$(2.\ 18.\ 24):\ f(x_{J_1}, x_{J_2}, \ldots, x_{J_m}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_{J_1-1}\,dx_{J_1+1}\ldots$$

$$\ldots dx_{J_m-1}\,dx_{J_m+1}\ldots dx_n\,.$$

ويمكن الحصول على الدوال الهامشية السابقة إذا كانت المتغيرات $X_1, ..., X_n$ متغيرات متقطعة باستبدال علامات التكامل فى الصيغ السابقة بعلامات المجموع فى كل العلاقات من (2. 18. 22) حتى (2. 18. 24) واستخدام دالة الاحتمال المشتركة $P(x_1, ..., x_n)$ بدلاً من دالة كثافة الاحتمال $f(x_1, ..., x_n)$.

مـــثال (2 ـ 18 ـ 1): إذا كانت المتغيرات X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 من النوع المستمر ولها دالة كثافة الاحتمال المشتركة

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = x_1\,x_2\ldots x_5\,e^{-\frac{1}{2}\left[x_1^2+\cdots+x_5^2\right]} \quad ,x_i > 0$$

لجميع قيم $i = 1, 2, ..., 5$

أوجـــد دالـــة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 ودالة كثافة الاحتمال الهامشية المشتركة للمتغير الثنائى (X_1, X_2).

(الحــل)

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هى:

$$f(x_1)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\exp\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right]dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5$$

$$=x_1 e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\quad ,\ x_1>0$$

وبالمثل نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية المشتركة للمتغير (X_1, X_2) هى:

$$f(x_1,x_2)=x_1\,x_2\ \exp\left[-\tfrac{1}{2}x_1^2-\tfrac{1}{2}x_2^2\right]\ ;x_1\,,x_2>0$$

(2 ــ 19) الدوال الشرطية للمتغير $(X_1, ..., X_n)$:

يمكن تعميم المفاهيم السابقة للتوزيعات الشرطية لمتغيرين عشوائيين إلى حالة n مــن المتغــيرات العشــوائية. وسنبدأ أولاً بافتراض أن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ من النوع المســتمر ثم نوضح كيفية الحصول على كل التوزيعات الشرطية عندما تكون المتغيرات من النوع المتقطع.

إذا كانــت المتغــيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ من النوع المستمر ولها دالة كثافة الاحــتمال المشــتركة $f(x_1, ..., x_n)$ فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغيرات العشوائية $X_{J_1}, X_{J_2}, \dots, X_{J_m}$ عــندما تــأخذ المتغــيرات $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$ قيم ثابتة معينة ــ حيث $m + r = n$ ــ هى:

$$(2.\ 19.\ 1):\ f\left(x_{J_1},\dots,x_{J_m}\mid x_{i_1},\dots,x_{i_r}\right)=\frac{f(x_1,\dots,x_n)}{f\left(x_{i_1},\dots,x_{i_r}\right)}$$

فمــثلاً فــى حالة $m = 2$، $r = 1$، $i_1=1, J_1=1, J_2=2$، تأخذ العلاقة السابقة الصورة التالية

$$f(x_1,x_2\mid x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_3)}$$

كمــا أن دالــة التوزيع الاحتمالى الشرطية المقابلة لدالة كثافة الاحتمال الشرطية المعطاة بالعلاقة (2. 19. 1) هى:

$$(2.19.2):\ F\left(x_{J_1},\ldots,x_{J_m} \mid x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\right) = \frac{1}{f\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\right)}\int_{-\infty}^{x_{J_1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_{J_m}} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)dx_{J_1}\ldots dx_{J_m}$$

فإذا كانت $m = 2$، $r = 1$، $i_1 = 1, J_1 = 1, J_2 = 2$، نجد أن:

$$F(x_1, x_2 \mid x_3) = \frac{1}{f(x_3)}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2, x_3)dx_1\, dx_2$$

أما إذا كانت المتغيرات $X_1, \ldots, X_n$ من النوع المتقطع فيمكننا الحصول على صيغ مقابلة للصيغ (2. 19. 1) و(2. 19. 2) باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع المناسبة واســتبدال دوال كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات المستمرة بدوال الاحتمال المشتركة للمتغيرات المتقطعة.

(2 ــ 20) المتغيرات العشوائية المستقلة والاستقلال الإحصائى:

Independent r. v. 's & Stochastic Independence:

(2 ــ 20 ــ 1) حالة متغيرين عشوائيين:

قدمنا فى الباب الأول بند (1 ــ 23) مفهوم استقلال الأحداث العشوائية والآن نقدم استقلال المتغيرات العشوائية، حيث أن استقلال المتغيرات العشوائية فى نظرية التوزيعات يقــابل الأحداث المستقلة فى نظرية الاحتمالات. لقد ذكرنا فىّ البند (1 ــ 23) أن الحدثان E_1 وE_2 يكونــا مســتقلان، إذا وفقط إذا، كان احتمال حدوثهما معاً يساوى حاصل ضرب احتمال حدوث كلٍ منهما على حده ــ أى أن:

$$(2.20.1):\ \Pr(E_1, E_2) = \Pr(E_1)\cdot\Pr(E_2)$$

وعلــى ذلك إذا كان لدينا متغيران عشوائيان X, Y لهما دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ ودالتى التوزيع الاحتمالى الهامشيتين $F_1(x)$ و$F_2(y)$ وكان الحدث E_1 هو أن ينتمى المتغير X إلى المجموعة A والحدث E_2 هو أن ينتمى المتغير Y إلى المجموعة B وA وB مجموعتان بوراليتان من الأعداد الحقيقية ــ إذن طبقاً للعلاقة (2. 20. 1):

يكون المتغيران العشوائيان X وY مستقلان، إذا وفقط إذا، كان لأى مجموعتان بوراليتان A وB من الأعداد الحقيقية:

$$(2.20.2):\ \Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A)\cdot\Pr(Y \in B)$$

فإذا كانت المجموعتان A وB هما الفترتان:

$$A =]-\infty, x] \equiv -\infty < X \leq x$$
$$B =]-\infty, y] \equiv -\infty < Y \leq y$$

إذن بالـــتعويض عـــن A وB فى العلاقة (2. 20. 2) يمكن الوصول إلى الشرط اللازم والكافى التالى لاستقلال المتغيرين X وY كما يلى:

المتغيران العشوائيان X, Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = \Pr(X \leq x)\Pr(Y \leq y)$$

أى:

$$(2.\ 20.\ 3):\ F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

أى أن المتغـــيران العشـــوائيان Y وX يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت دالة الـــتوزيع الاحـــتمالى المشـــتركة لهما تتكون من حاصل ضرب دالتى التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغيرين. فإذا كان المتغيران العشوائيان Y وX متصلان فيمكن مفاضلة طرفى المعادلة (3 .20 .2) مرتين مرة بالنسبة للمتغير X ومرة بالنسبة للمتغير Y ــ فنحصل على المشتقات التفاضلية الجزئية التالية عندما تكون هذه المشتقات موجودة ــ حيث نجد أن:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(y)}{\partial y}$$

أى أن:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

وهـــذا يوصـــلنا إلى صيغة أخرى لاستقلال المتغيران العشوائيان Y وX بدلالة دوال كثافات الاحتمال بدلاً من دوال التوزيع الاحتمالى كما يلى:

المتغيران العشوائيان Y وX يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2.\ 20.\ 4):\ f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

حيـــث $f(x, y)$ هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) و$f_1(x)$ و$f_2(y)$ هما دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين للمتغيرين X وY على الترتيب.

أمـــا إذا كـــان المتغيران Y وX من النوع المتقطع فيمكن فى معادلة (2. 20. 2) اعتـــبار أن المجموعـــة A مكونـــة من عدد حقيقى واحد أو من نقطة واحدة هى $X = x_i$ والمجموعة B مكونة من نقطة واحدة هى $Y = y_J$ ــ وبهذا يمكن كتابة معادلة (2. 20. 2) فى الصورة التالية:

$$Pr(X = x_i ; Y = y_J) = Pr(X = x_i) Pr(Y = y_J)$$

لجمـــيع قيم $(i, J = 1, 2, ...)$ وبذلك نصل إلى الصيغة التالية لاستقلال المتغيرين العشوائيين المتقطعين X, Y كما يلى:

المتغيران العشوائيان المتقطعان X, Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2.20.5):\ Pr(X = x_i , Y = y_J) = Pr(X = x_i) \cdot Pr(Y = y_J)$$

أى:

$$P_{iJ} = P_{i.}\ P_{.J}\ .$$

حيث P_{iJ} هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغير الثنائى المتقطع (X, Y) و $P_{i.}$ هى دالة الاحتمال الهامشية للمتغير X و $P_{.J}$ هى دالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y.

واســتقلال المتغيرات العشوائية شديد الصلة بمفهوم التوزيعات الشرطية المقدمة فـــى البنديـــن (2 ــ 17) و(2 ــ 19) ــ حيث نجد من العلاقة (2. 17. 2) فى حالة المتغير الثنائى المتقطع (X, Y) أن دالة الاحتمال الشرطية للمتغير المتقطع X (عندما $X = x_i$) إذا علمنا أن $Y = y_J$ هى:

$$(2.20.6):\ Pr(X = x_i \mid Y = y_J) = \frac{P_{iJ}}{P_{.J}}$$

حيــث P_{iJ} هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغير المتقطع (X, Y) و $P_{.J}$ هى دالة الاحــتمال الهامشــية للمتغــير Y ــ فإذا كان المتغيران العشوائيان Y وX مستقلان فإن: $P_{iJ} = P_{i.}\ P_{.J}$ وعلـــى ذلـــك إذا كان المتغيران العشوائيان X وY مستقلان فإن العلاقة (2. 20. 6) ــ عندما $P_{.J} > 0$ تأخذ الصورة التالية:

$$P(x_i \mid y_J) = P_{i.} = Pr(X = x_i)$$

وبذلك يمكن إثبات أن:

المتغيران العشوائيان المتقطعان Y وX يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت

$$(2.20.7):\ P(x_i \mid y_J) = P(x_i)$$

وكذلك

$$P(y_J \mid x_i) = P(y_J)$$

لجميع نقط الاحتمال $(y_1, y_2, ...)$ و$(x_1, x_2, ...)$.

وبالمثل يمكن فى حالة المتغيران المستمران X و Y إثبات أن:

المتغيران العشوائيان المستمران Y و X يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2.\,20.\,8):\ f_{12}(x\mid y)=f_1(x)$$

$$f_{21}(y\mid x)=f_2(y)$$

كمـــا يمكـــن إثبات أن المتغيران العشوائيان Y و X (سواء من النوع المتقطع أو المتصل) يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2.\,20.\,9):\ F_{12}(x\mid y)=F_1(x)$$

$$F_{21}(y\mid x)=F_2(y)$$

حيـــث $F_1(.)$، $F_2(.)$ هى دوال التوزيع الاحتمالى الهامشية للمتغيرين X و Y على الترتيـــب و $F_{12}(x\mid y)$ هـــى دالـــة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير X عندما Y = y وبالمثل نعرف $F_{21}(y\mid x)$.

ممـــا سبق يمكن تجميع كل الشروط اللازمة والكافية السابقة لاستقلال المتغيرين العشوائيين X و Y فى التعريف التالى:

تعريف (2 ــ 20 ــ 1 أ): إذا كان المتغيران العشوائيـــان Y و X معرفـــان على فراغ احتمالى واحد ــ فإنهما يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، تحقق أحد الشروط المعطاة بالمعادلات من (2. 20. 2) حتى (2. 20. 9).

ملاحظـــة (2 ــ 20 ــ 1 أ): فـــى التوزيعات الشرطية بند (2 ــ 17) سمينا أحد المتغيريـــن مستقل والآخر تابع ــ وأعتقد الآن بعد تعريف الاستقلال يتضح رداءة هذه التســـمية حيـــث أن المتغير المسمى مستقلاً لا يكون مستقلاً فعلاً عن الآخر لذلك نفضل تســـميته بالمتغـــير "المتـــبوع" ولكنـــنا سوف نستخدم التعبيرين وذلك لأن أولهما شائع الاستخدام رغم عدم دقته وثانيهما أقل شيوعاً ولكنه أكثر دقة فى التعبير.

(2 ــ 20 ــ 2) حالة n من المتغيرات العشوائية $(n > 2)$:

يمكـــن الآن تعمـــيم النتائج السابقة لاستقلال متغيرين إلى حالة n من المتغيرات العشـــوائية $(n > 2)$ ســـواء كانت المتغيرات من النوع المستمر أو المتقطع وذلك بتقديم التعريف التالى:

تعريف (2 ــ 20 ــ 2 أ):

المتغـــيـــرات العشـــوائيـــة $(X_1, ..., X_n)$ تكون مســـتقلة، إذا وفقط إذا، تحقـــق أحـــد الشروط التالية:

(2. 20. 10): $F(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$

(2. 20. 11): $f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

إذا كانت المتغيرات مستمرة ودالة كثافة احتمالها المشتركة $f(x_1, ..., x_n)$ ودوال كثافة الاحتمال الهامشية $f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n)$.

(2. 20. 12): $P(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$

إذا كانــت المتغــيرات متقطعة ودالة الاحتمال المشتركة لها $P(x_1,\ldots,x_n)$ ودوال الاحتمال الهامشية $P_i(x_i)$ لجميع قيم $i = 1, 2, ..., n$

(2. 20. 13): $F(x_{J_1},\ldots,x_{J_m} \mid x_{i_1},\ldots,x_{i_r})=F(x_{J_1},\ldots,x_{J_m})$

(2. 20. 14): $f(x_{J_1},\ldots,x_{J_m} \mid x_{i_1},\ldots,x_{i_r})=f(x_{J_1},\ldots,x_{J_m})$

(2. 20. 15): $P(x_{J_1},\ldots,x_{J_m} \mid x_{i_1},\ldots,x_{i_r})=P(x_{J_1},\ldots,x_{J_m})$

كما أن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كانت:

(2. 20. 16): $Pr(X_1\in A_1,\ldots,X_n\in A_n)=\prod_{i=1}^{n} Pr(X_i\in A_i)$

حيث $A_1, ..., A_n$ مجموعات بوراليه من الأعداد الحقيقية. والعلاقة (2. 20. 10) تعتبر حالة خاصة من العلاقة السابقة عندما: $A_i =]-\infty, x_i]$.

نقدم فيما يلى نظرية هامة توضح أن استقلال أى متغيرات عشوائية يترتب عليه استقلال أى دوال فى هذه المتغيرات.

نظرية (2 ــ 20 ــ 2 أ):

إذا كان $X_1, ..., X_n$ متغيرات عشوائية، وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1, ..., Y_n$ يمكن الحصول عليها من $X_1, ..., X_n$ بالعلاقة الدالية التالية:

$$Y_i = g_i(X_i) \quad ; i = 1, 2, \ldots, n.$$

حيــث $g_i(.)$ دالـــة بوراليه فى الأعداد الحقيقية. فإذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ مستقلة فإن المتغيرات $Y_1, ..., Y_n$ تكون مستقلة كذلك.

(الإثبات)

لأى مجموعــة بوراليه A_i من الأعداد الحقيقية يمكن تعريف المجموعة التالية من الأعداد الحقيقية x (حيث x إحدى قيم المتغير X_i):

$$B_i = \{x : g_i(x) \in A_i\}$$
$$= \{x : Y_i \in A_i\}$$

نلاحظ أن $Y_i \in A_i$ ، إذا وفقط إذا، كانت $X_i \in B_i$ ــ أى أن:

$$\Pr(Y_i \in A_i) = \Pr(X_i \in B_i)$$

وعلى ذلك يكون

$$\Pr(Y_1 \in A_1, \ldots, Y_n \in A_n) = \Pr[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n]$$

ومن استقلال $X_1, \ldots, X_n$. إذن طبقاً لـــ (2. 20. 16)

$$= \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i \in B_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \Pr(Y_i \in A_i)$$

وهذا معناه أن $Y_1, \ldots, Y_n$ متغيرات مستقلة.

هـــ. ط. ث

والنظريات السابقة عندما $n = 2$ توضح أنه إذا كان المتغيران العشوائيان Y وX مســتقلان فــإن أى دالة بوراليه فى X تكون مستقلة عن أى دالة بوراليه فى Y ــ ولكن يمكــن إثــبات أن العكس غير صحيح ــ أى أنه إذا كان المتغيران Y وX غير مستقلان فليس من الضرورى أن تكون أى دالة بوراليه فى أحد المتغيرين غير مستقلة عن أى دالة بوراليــيه فــى المتغير الآخر. والمثال التالى يوضح حالة متغيران عشوائيان Y وX غير مستقلان فى حين أن المتغيران Y^2 وX^2 مستقلان.

مثال (2 ــ 20 ــ 1):

إذا كـــان المتغير العشوائى X يمثل عدد الصور فى تجربة عشوائية تتكون من إلقاء قطعتى عملة متزنة مرة واحدة، فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$S = \{(T\,T), (H\,T), (T\,H), (H\,H)\}$$

X يأخذ القيم 0, 1, 2 ويكون له دالة الاحتمال التالية:

X	0	1	2	Σ
$P_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

وإذا كان المتغير العشوائى Y يأخذ قيمتين فقط هما (+1) إذا كان وجهى قطعتى العملة متشابهان ويساوى (-1) إذا كان الوجهان مختلفان، فإن دالة احتمال Y يمكن كتابتها فى الجدول التالى:

Y	-1	+1	Σ
$P_2(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

واضـــح أن المتغـــيران X و Y غـــير مستقلان لأنه عندما X =1 فإن Y لابد أن تساوى (-1) وعندما X = 0, 2 فإن Y لابد أن تساوى (+1). ولكن (y^2) يأخذ قيمة واحدة هـــى $Y^2 = 1$ (باحـــتمال يساوى الواحد الصحيح) مهما كانت قيمة X^2 (أى لجميع قيم $X^2 = 0,1,4$). وهـــذا يوضـــح أن Y^2 مســـتقل عن X^2 بالرغم من أن X و Y غير مستقلان.

ملاحظة (2 ــ 20 ــ 2 أ):

فـــى حالـــة وجود أكثر من متغيرين عشوائيين قد تكون المتغيرات مستقلة مثنى مثـــنى (أى مـــأخوذة كل اثنين معاً) ولكنها لا تكون مستقلة عند أخذها كل ثلاثة أو أكثر معاً ــ والمثال التالى الذى قدمه "برنستين" "S. Bernstein" يوضح هذه الحالة:

مـــثال (2 ــ 20 ــ 2): إذا كانت المتغيرات العشوائية X_1, X_2, X_3 لها دالة الاحتمال المشتركة:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; \ (x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فيمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأى متغيرين X_i, X_J $(i \neq J)$ هى:

$$P_{iJ}(x_i, x_J) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , (x_i, x_J) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بينما دالة كثافة الاحتمال الهامشية X_i هى:

$$P_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x_i = 0,1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ومن الواضح أن:

$$P_{iJ}(x_i, x_J) = P_i(x_i) P_J(x_J)$$

حيث كلٍ من الطرفين يساوى $\frac{1}{4}$

بينما:

$$P(x_1, x_2, x_3) \neq P_1(x_1) P_2(x_2) P_3(x_3).$$

حيث أن الطرف الأيمن يساوى $\frac{1}{8}$ بينما الطرف الأيسر يساوى $\frac{1}{4}$. أى أن المتغيرات X_1, X_2, X_3 تعتبر مستقلة مثنى مثنى ولكنها غير مستقلة إذا أخذت الثلاثة معاً.

العلاقة (2. 20. 11) وكذلك (2. 20. 12) توضح أن المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ تكون مستقلة إذا أمكن تحليل دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1, ..., x_n)$ إلى حاصل ضرب n من العوامل كل عامل منها عبارة عن دالة كثافة احتمال أحد المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ ــ وهذا يتطلب منا معرفة دالة كثافة كلٍ من المتغيرات العشوائية X_i. وحيث أن ذلك قد يكون متعذراً لذلك نقدم فيما يلى نظرية أعم من العلاقتين (2. 20. 11)، (2. 20. 12) لاستقلال المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ ــ هذه النظرية مفادها أن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ تكون مستقلة إذا أمكن تحليل دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1, ..., x_n)$ إلى حاصل ضرب n من العوامل كل عامل منها عبارة عن دالة فى أحد المتغيرات العشوائية وليس من الضرورى أن تكون دالة كثافة احتمال وبالتالى يمكن معرفة استقلال المتغيرات العشوائية من عدمه بمجرد معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة حتى إذا لم نكن نعرف دوال كثافات احتمال المتغيرات العشوائية كلٍ على حده. وسنقدم النظرية التالية بالنسبة للمتغيرات المستمرة ويمكن إثباتها فى حالة المتغيرات المتقطعة باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع.

نظرية (2 ــ 20 ــ 2 ب):

المتغيرات العشوائية المستمرة $X_1, ..., X_n$ تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كانت دالة كثافة احتمالها المشتركة $f(x_1, ..., x_n)$ يمكن كتابتها فى الصورة التالية:

$$(2.\,20.\,17):\; f(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1) \ldots h_n(x_n)$$

لكــل الأعداد الحقيقية $x_1, ..., x_n$ ــ حيث $h_1(.), ..., h_n(.)$ دوال بوراليه ليس من الضرورى أن تكون دوال كثافات احتمال.

(الإثبات)

العلاقة (17 .20 .2) تعتبر شرط كافى ولازم لاستقلال المتغيرات $X_1, ..., X_n$.

أولاً: شرط اللزوم:

إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ مستقلة فإن:

$$\text{(a)}:\; f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$$

حيث $f_i(x_i)$ هى دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_i وهذا يؤكد صحة العلاقة (17 .20 .2).

ثانياً: شرط الكفاية:

إذا كانــت دالــة كــثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ يمكن كتابــتها فــى الصــورة (17 .20 .2) فــإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_i يمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة(22 .18 .2) كما يلى:

$$f_i(x_i) = h_i(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1)\,dx_1 \ldots$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{i-1}(x_{i-1})\,dx_{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_{i+1}(x_{i+1})\,dx_{i+1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x_n)\,dx_n$$
$$= c_1 \ldots c_{i-1}\, c_{i+1} \ldots c_n\, h_i(x_i)$$

أى أن:

$$\text{(b)}:\quad \begin{cases} f_1(x_1) = c_2\, c_3 \ldots c_n\, h_1(x_1) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_n) = c_1 \ldots c_{n-1}\, h_n(x_n) \end{cases}$$

ولكن:

$$(c): 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1)dx_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x_n)dx_n = c_1 c_2\ldots c_n$$

باستخدام العلاقة (c) يمكن كتابة العلاقة (17 .20 .2) فى الصورة التالية:

$$f(x_1,..,x_n) = (c_1\ldots c_n)h_1(x_1)\ldots(c_1\ldots c_n)h_n(x_n)$$

وباستخدام العلاقة (b) يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_1 f_1(x_1)\ldots c_n f_n(x_n)$$
$$= (c_1\ldots c_n)f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$$

ومن (c) نجد أن:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\ldots f_n(x_n).$$

وهذا يثبت أن المتغيرات $X_1, \ldots, X_n$ مستقلة.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (2 ــ 20 ــ 2 ب):

إذا كان المتغيران العشوائيان X وY لهما (مثلاً) دالة كثافة الاحتمال المشتركة

$$f(x,y) = 21\ x^2\ y^3 \quad ,0 < x < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

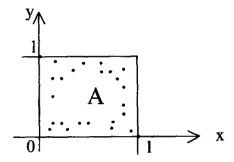
قـد يتبادر للذهن أن المتغيران Y وX مستقلان طبقاً للعلاقة (17 .20 .2) حيث يمكن كتابة f(x, y) فى الصورة التالية:

$$f(x,y) = c_1 x^2 c_2 y^3 = h_1(x)\,h_2(y)$$

حيث $c_1 c_2 = 21$

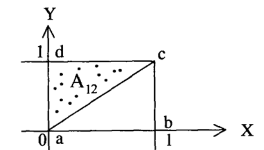
ولكن إذا نظرنا إلى المتغير X سنجد أن مداه المجموعة $A_1 = \{x : 0 < x < 1\}$ وكذلك المتغير العشوائى Y مداه المجموعة $A_2 = \{y : 0 < y < 1\}$ كما أن $h_1(x) > 0$ لجميع قيم $x \in A_1$ وكذلك $h_2(y) > 0$

لجمــيع قيم $y \in A_2$ ولكن حاصل الضرب $h_1(x)h_2(y)$ لا يكون موجبا لجميع قيم $(x, y) \in A$ حيث:



$$A = \{(x, y): 0 < x < 1 , 0 < y < 1\}$$

وذلــك لأن المــدى الــذى تكــون فــيه الدالــة المشتركة $f(x, y) > 0$ هو المجموعة:



$$A_{12} = \{(x, y): 0 < x < y < 1\}$$

الدالــة $f(x, y) > 0$ فى المنطقة A_{12} المظللة فى الشكل السابق وهى فراغ محدد بالخط الأفقى $\overline{dc}$ والخط الرأسى $\overline{ad}$ والخط المائل $\overline{ac}$، حيث $\overline{ac}$ يعتمد على المتغــيران Y و X معــاً فمعادلته هى X = Y ــ وهذا يوضح أن المتغيران Y و X غير مســتقلان. وحيث أن الفراغ A_{12} (فى الشكل الثانى) هو جزء من الفراغ A (فى الشكل الأول)، إذن f(x, y) وكذلــك $h_1(x)h_2(y)$ لا تكــون موجبة على كل الفراغ A وإنما تكون موجبة على جزء منه هو A_{12} وتساوى الصفر خلاف ذلك.

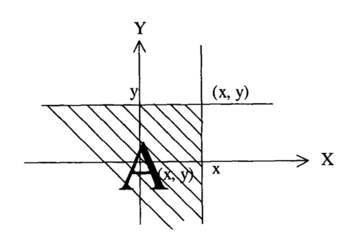
فــى تعــريف الاســتقلال ســواء الــتعريف (2 ــ 20 ــ 1 أ) لحالة متغيرين أو (2 ــ 20 ــ 2 أ) لحالــة n مــن المتغــيرات روعــى أن يكــون فراغ المتغير العشوائى $(X_1,\dots,X_n)$ عــبارة عــن تقــاطع متعامد لفراغات المتغيرات $X_1,\dots,X_n$. فمثلاً العلاقــة (3 .20 .2) مستنبطة من العلاقة (2 .20 .2) بوضع المجموعتان البوراليتان A و B فى الصورة التالية:

$$A = \{X : X \le x\} =]-\infty, x]$$
$$B =]-\infty, y]$$

وبذلك يكون مدى المتغير المشترك (X, Y) هو المجموعة

$$A(x, y) = \{(x, y) : X \le x , Y \le y\}$$

وهذه الفراغات يمثلها الشكل التالى:



شكل (2 ــ 20 ــ 2)

ومن الشكل نرى أن الفراغ A(x, y) هو تقاطع متعامد للفراغين A و B.

ملاحظة (2 ــ 20 ــ 3):

للإشارة إلى وجود n من المتغيرات العشوائية المستقلة التى لها نفس التوزيع الاحــتمالى ــ أى لها نفس دالة كثافة الاحتمال ــ كثيراً ما نستخدم تعبير إحصائى شائع هــو "سحب عينة عشوائية من مجتمع واحد". فقد يكون لدينا متغير عشوائى X له دالة التوزيع الاحتمالى F(x) ثم نحصل على n من القياسات أو القيم لهذا المتغير ونرمز لهذه القياســات (أو القــيم) بالرموز $X_1, \dots, X_n$ ــ ومثال ذلك أن تكون $X_1, \dots, X_n$ هى أوزان

عينة عشوائية حجمها n من الأشخاص مسحوبة من مجتمع واحد إذا كان المتغير X هو الوزن. فى هذه الحالة تكون القياسات $X_1, ..., X_n$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة لهـا نفـس دالة التوزيع الاحتمالى F(x). والمتغيرات تكون مستقلة طالما كانت العينة عشـوائية ــ لذلـك فـإن القـول أن المتغـيرات العشـوائية $X_1, ..., X_n$ مسـتقلة مرادف لقول أن العينة عشوائية. كذلك تعبير "سحب عينة عشوائية حجمهـا n من مجتمع له دالة التوزيع الاحتمالى F(.)" هو نفسه التعبير القائل "وجود n مـن المتغـيرات العشـوائية المستقلة التى لها نفس التوزيع الاحتمالى ودالة التوزيع الاحتمالى لكل منها F(.)"

لقـد قدمـنا دوال كـثافة الاحـتمال والتوزيع الاحتمالى وكذلك الدوال الهامشية والشـرطية للمتغيرات المشتركة الثنائية والمتعددة ونحاول الآن تقديم مثل هذه الدوال فى حالـة الدوال المشتركة المختلطة وسنكتفى بحالة المتغير الثنائى الذى يكون أحد متغيريه متقطع والآخر مستمر دون التعميم لحالة n من المتغيرات وذلك لقلة وندرة هذا النوع من المتغيرات من الناحية العملية.

(2 ــ 21) التوزيعات الثنائية المشتركة المختلطة:

سـبق أن قدمـنا مفهـوم الـتوزيع المخـتلط فى حالة المتغير المفرد بالتعريف (2 ــ 10 ــ 1). والآن نقـدم هذا المفهوم فى حالة التوزيعات المشتركة ــ أى حالة وجود أكـثر مـن متغير ــ وسنكتفى بحالة المتغير الثنائى المختلط (X, Y) حيث (X, Y) متغير مشـترك مكـون مـن مركبتيـن هما X وY وهما متغيران عشوائيان أحدهما من النوع المستمر والآخر من النوع المتقطع. والمتغير الثنائى المشترك (X, Y) الذى من هذا النوع نسـميه متغير مشترك مختلط Joint Mixed r. v. نفرض أن لدينا متغير مشترك مختلـط (X, Y) حيث Y متغير عشوائى من النوع المستمر وX متغير آخر من النوع المتقطع يأخذ القيم $X = x_i$ لجميع قيم $i = 1, 2, ...$. فإذا كانت دالة كثافة الاحتمـال الهامشيـة للمتغيـر X عـنـد الـنقطـة $X = x_i$ هـى $P_1(x_i)$ ــ فإنه يوجد دوال احتمـال شرطيـة هى: $f_{21}(y \mid x_i)\ ; i = 1, 2, ...$ وهى دوال احتمال شرطية فى المتغير Y عندما $X = x_i$ لجميع قـيم $i = 1, 2, ...$. ودالـة الاحـتمال الشـرطية $f_{21}(y \mid x_i)$ تعتبر دالة فى متغير واحد uni – variate Y عـندما $X = x_i$. والمتغـير X هنا يسمى بالمتغير المستقل فى حين أن المتغـير Y يسـمى بالمتغير التابع وأحياناً نرمز له بالرمز $Y|_x$ لإظهار أن Y يعتمد على القـيمة التى يأخذها المتغير X. وعلى هذا يوجد نوعان من المتغيرات الثنائية المختلطة، النوع الأول عندما يكون المتغير المستقل متقطع والتابع مستمر وهو النوع السابق والنوع الـثانى عـندما يكون المتغير المستقل مستمر والمتغير التابع متقطع. لذلك سنقدم كل نوع منهما على حده.

(2 ــ 21 ــ 1) المتغير الثنائى المختلط من النوع الأول (المستقل متقطع والتابع مستمر):

إذا كان المتغير المشترك المختلط (X, Y) فيه X متغير متقطع (منفصل) يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ باحتمالات $Pr(X = x_i) = P_1(x_i)$ فإنه يوجد دوال كثافة احتمال شرطية فى متغير واحد Y هى: $f_{21}(y \mid x_i)$ ؛ $i = 1, 2, \ldots$. وغالبا تكون الدوال $P_1(x_i)$ و $f_{21}(y \mid x_i)$ معلومة أو من السهل معرفتها فى حين أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة المختلطة $f(x, y)$ للمتغير (X, Y) غير معلومة أو من الصعب معرفتها ولكن يمكن الحصول عليها من الدالتين المعلومتين $P_1(x_i)$ و $f_{21}(y \mid x_i)$ كما فى العلاقة (2. 17. 10b) فى الصورة التالية:

$$(2.21.1):\ f(x_i, y) = f_{21}(y \mid x_i) P_1(x_i)$$

ودالة التوزيع الاحتمالى المشتركة المختلطة $F(x, y)$ تأخذ الصورة التالية:

$$(2.21.2):\ F(x, y) = \sum_{i: x_i \le x} P_1(x_i) \int_{-\infty}^{y} f_{21}(y \mid x_i) dy$$

ويمكن الحصول على دوال التوزيع الاحتمالى الهامشية لكلٍ من X وY من العلاقة (2. 21. 2) فى الصورة التالية:

$$(2.21.3):\ F_1(x) = F(x, \infty) = \sum_{i. x_i \le x} P_1(x_i)$$

حيث $P_1(x_i)$ هى دالة الاحتمال الهامشية للمتغير X عندما $X = x_i$. كذلك:

$$(2.21.4a):\ F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(x_i) \int_{-\infty}^{y} f_{21}(y \mid x_i) dy$$

وتكون دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y هى:

$$(2.21.4b):\ f_2(y) = \frac{d F_2(y)}{dy} = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(x_i) f_{21}(y \mid x_i)$$

أما إذا كانت دالة التوزيع المشتركة المختلطة $F(x, y)$ معلومة فيمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X = x_i$ من الدالة $F(x, y)$ كما يلى:

دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير Y عندما $X = x_i$ هى: $F_{21}(y \mid x_i) = Pr(Y \le y \mid X = x_i)$ ومن قانون الاحتمال الشرطى:

$$(2.21.5):\ F_{21}(y \mid x_i) = Pr(Y \le y\ ;\ X = x_i) / Pr(X = x_i)$$

حيث $\Pr(X = x_i) = P_1(x_i)$ والاحتمال $\Pr(Y \le y \,;\, X = x_i)$ يمكن الحصول عليه من دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ إذا نظرنا إليها على أنها دالة فى المتغير المفرد X مع اعتبار Y كمية ثابتة (بارامتر) باستخدام العلاقة (2. 6. 4) التى توضح كيفية إيجاد دالة احتمال المتغير المفرد المتقطع من دالة توزيعه الاحتمالى، حيث نجد أن: $\Pr(Y \le y \,;\, X = x_i) = F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)$ وبذلك يمكن وضع الصيغة (2. 21. 5) فى الصورة التالية:

$$(2.\,21.\,6):\ F_{21}(y \mid x_i) = \frac{1}{P_1(x_i)}\left[F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)\right]$$

وبمفاضلة طرفى العلاقة السابقة بالنسبة للمتغير المستمر Y نحصل على دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير المستمر Y عندما $X = x_i$ فى الصورة التالية:

$$(2.\,21.\,7):\ f_{21}(y \mid x_i) = \frac{1}{P_1(x_i)}\,\frac{d}{dy}\left[F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)\right]$$

والعلاقة السابقة تستخدم لمعرفة $f_{21}(y \mid x_i)$ عندما تكون $F(x_i, y)$ معلومة. ولكن غالباً تكون $f_{21}(y \mid x_i)$ هى الدالة المعلومة، وبالتالى، وكما يتضح من العلاقة (2. 21. 2) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ للمتغير العشوائى المشترك المختلط (X, Y) حيث X متغير متقطع (هو المتغير المستقل) و Y متغير مستمر (هو المتغير التابع) تتحدد تحديداً تاماً بالدوال $P_1(x_i)$ و $f_{21}(y \mid x_i)$، $i = 1, 2, \ldots$، حيث أن الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) للمتغير المشترك (X, Y) يتم تجزئته إلى كميات صغيرة هى: $P_1(x_1), P_1(x_2), \ldots$ ـ $\left(\sum_i P_1(x_i) = 1\right)$ ـ وكمية الاحتمال $P_1(x_i)$ هى الكمية المخصصة للنقطة $X = x_i$ على محور X، وهذه الكمية من الاحتمال تنتشر انتشاراً مستمراً على طول الخط العمودى $X = x_i$ الموازى لمحور Y ويقطع محور X عند النقطة $X = x_i$، وكثافة الانتشار $f(x_i, y)$ عند أى نقطة (x_i, y) على الخط $X = x_i$ تساوى $P_1(x_i) f_{21}(y \mid x_i)$. فإذا كانت الدوال الشرطية $f_{21}(y \mid x_i)$ متطابقة (متساوية) لجميع قيم i يكون معنى ذلك أن:

$$(2.\,21.\,8):\ f_{21}(y \mid x_i) = f_2(y)$$

حيث $f_2(y)$ هى دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير المستمر Y. كما نجد فى هذه الحالة من العلاقة (2. 21. 2) أن: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ أى أن المتغيران Y و X

مســتقلان. مــن ذلك يمكن وضع التعريف التالى لاستقلال المتغيران X وY فى التوزيع الثنائى المشترك المختلط.

تعــريف (2 ــ 21 ــ 1 أ): إذا كــان المتغــير العشــوائى المشــترك المختلط (X,Y) فيه X متغير متقطع وY متغير مستمر فإن X وY يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كان: $f_{21}(y|x_i)=f_2(y)$ لجميع قيم i، حيث $f_2(y)$ هى دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y و $f_{21}(y|x_i)$ هى دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X=x_i$.

مــثال (2 ــ 21 ــ 1): متغــير عشــوائى ثــنائى مختلط (X,Y) فيه X متغير عشــوائى متقطع له دالة الاحتمال: $\Pr(X=i)=P_1(i)=q\ P^{i-1}\ ;;\ i=1,2,\ldots$ و Y متغــير عشــوائى مستمر ودالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X=x_i=i$ هى: $f_{21}(y|x=i)=i\ y^{i-1}$ و $0<y<1$ ؛ أوجد الدوال التالية:

(1) دالة كثافة الاحتمال الهامشية $f_2(y)$ للمتغير Y.

(2) دالة التوزيع الاحتمالى الهامشية $F_1(x)$ للمتغير X.

(3) دالة التوزيع الاحتمالى $F(x,y)$ للمتغير (X,Y).

(الحــل)

(1) من علاقة (2.21.4b) نجد أن دالة كثافة الاحتمال المطلوبة هى:

$$f_2(y)=\sum_{i=1}^{\infty}P_1(X=i)\ f_{21}(y|X=i)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}q\ P^{i-1}\ i\ y^{i-1}=\frac{q}{(1-py)^2}$$
$$,0<y<1\ ,\ 0<P<1\ ,\ 0<py<1$$

(2) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F_1(x)=\Pr(X\le x)=\sum_{i:x_i\le x}P_1(x_i)$$
$$=\sum_{i\le x}P_1(i)=\sum_{i\le x}q\ P^{i-1}\ ;;\ i=1,2,\ldots$$

بفرض أن $[x]$ هو أول عدد صحيح integer أصغر من أو يساوى x إذن:

$$F_1(x)=\sum_{i=1}^{[x]} q\ P^{i-1}=1-P^{[x]}$$

(3)

$$F(x,y)=\sum_{i:x_i\le x}\int_{-\infty}^{y} f(x_i,y)dy=\sum_{i:x_i\le x}P_1(x_i)\int_{-\infty}^{y} f_{21}(y\,|\,x_i)dy$$

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{[x]} q\,P^{i-1}\int_0^y i\ y^{i-1}\,dy=\sum_{i=1}^{[x]} q\ P^{i-1}\ y^{i}$$

$$=q\,y\left[\frac{1-(p\,y)^{[x]}}{1-p\,y}\right],\ 0<y<1\ ,\ P+q=1\ ,\ x=0,1,2,\ldots$$

ومنها نجد أن:

$$F_1(x)=F(x,1)=\left[1-P^{[x]}\right]$$

$$F_2(y)=F(\infty,y)=q\,y\left[\frac{1}{1-p\,y}\right]$$

حيث أن $(p\,y)^{[x]}\to 0$ عندما $x\to\infty$ لأن $0<p\,y<1$.

ومـــن العلاقـــة السابقة نجد أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة ــ غير الشرطية ــ للمتغير المستمر Y هى:

$$f_2(y)=\frac{d}{dy}F_2(y)=\frac{(1-p\,y)q-q\,y(-P)}{(1-p\,y)^2}$$

$$=\frac{q}{(1-p\,y)^2}\ ;\ 0<y<1$$

وهى كما سبق إيجادها فى (1).

(2 ــ 21 ــ 2) المتغـــير الثـــنائى المخـــتلط مـــن النوع الثانى (المستقل مستمر والتابع متقطع):

استعرضـــنا فـــى البند السابق المتغير المشترك المختلط (X,Y) عندما يكون المتغـــير المســـتقل من النوع المتقطع والمتغير التابع من النوع المستمر ــ ونتناول الآن الحالة المقابلة التى يكون فيها المتغير المستقل Y من النوع المستمر والمتغير التابع X من النوع المتقطع.

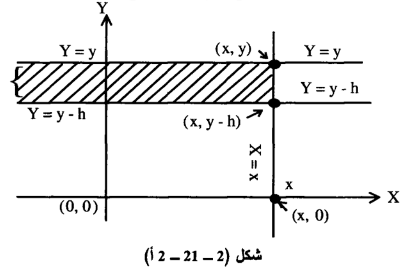
نعلـــم من البند السابق معادلة (2 .21 .2) أن دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة ــ عـــندما نرمـــز للمتغير المستمر بالرمز Y والمتغير المتقطع بالرمز X ــ تأخذ الصورة التالية:

$$(2.\ 21.\ 9):\ F(x, y) = \sum_{i: x_i \le x} P_1(x_i) \int_{-\infty}^{y} f_{21}(Y \mid x_i)\, dY$$

ونحاول الآن الحصول على دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية $F(x \mid y)$ للمتغير المـــتقطع X عـــندما $Y = y$، ثم نحصل منها على دالة الاحتمال الشرطية $P_{12}(x \mid y)$ للمتغـــير المـــتقطع X عـــندما $Y = y$. دالـــة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير التابع (المـــتقطع) X عـــندما يـــأخذ المتغـــير المســـتقل (المســـتمر) القـــيمة $Y = y$ هـــى: $F_{12}(x \mid y) = \Pr[X \le x \mid Y = y]$ وهنا لا يمكن استخدام قانون الاحتمال الشرطى كما فعلنا فى العلاقة (2. 21. 5) وذلك لأن $\Pr(Y = y) = 0$ حيث أن Y متغير مستمر، وإنما يمكـــن إيجـــاد دالـــة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير المتقطع X عندما يكون المتغير المســـتمر Y واقعاً داخل فترة ــ لتكن الفترة $y - h < Y \le y$ حيث $h > 0$ و y إحدى قيم المتغير المستمر Y، وتكتب فى الصورة التالية:

$$\begin{aligned} F(x \mid y - h < Y \le y) &= \Pr(X \le x \mid y - h < Y \le y) \\ &= \frac{\Pr(X \le x\ ;\ y - h < Y \le y)}{\Pr(y - h < Y \le y)} \end{aligned}$$

ويمكن تمثيل الاحتمالات الموجودة على الطرف الأيمن فى المعادلة السابقة بالشكل التالى:



شكل (2 ــ 21 ــ 2 أ)

من الشكل السابق يتضح أن دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية $F(x \mid y-h < Y \le y)$ تساوى كمية الاحتمال (أو الكتلة) المنتشرة فى الشريط $y-h < Y \le y$ على يسار الخط $X = x$ (وهى المنطقة المظللة) مقسوما على كمية الاحتمال (أو الكتلة) المنتشرة فى الشريط كله ــ أى أن:

$$(2.\,21.\,10):\ F(x \mid y-h < Y \le y) = \frac{F(x,y) - F(x,y-h)}{F_2(y) - F_2(y-h)}$$

فــإذا كانت الدالة $f_2(y)$ $\left(= \frac{\partial F_2(y)}{\partial y}\right)$ مستمرة وموجبة عند النقطة $Y = y$

وكانــت المشــتقة التفاضــلية $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ موجــودة عند نفس النقطة فإن دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية $F(x \mid y)$ يمكن الحصول عليها كما يلى:

$$(2.\,21.\,11):\ F(x \mid y) = \lim_{h \to 0} F(x \mid y-h < Y \le y)$$

حيــث $F(x \mid y-h < Y \le y)$ كمــا فى العلاقة (2. 21. 10). وبقسمة كل من البســط والمقام فى العلاقة (2. 21. 10) على h وأخذ النهاية عندما $h \to 0$ يمكن وضع العلاقة (2. 21. 11) فى الصورة التالية:

$$F(x \mid y) = \frac{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[F(x,y) - F(x,y-h)\right]}{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[F_2(y) - F_2(y-h)\right]}.$$

إذن دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية:

$$(2.\,21.\,12):\ F(x \mid y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$$

حيــث $f_2(y)$ هــى دالــة كــثافة الاحــتمال الهامشية للمتغير المستمر Y و $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$ هى المشتقة التفاضلية الجزئية لدالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x,y)$ بالنسبة للمتغير Y. وحيث أن X متغير متقطع يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots$ والمتغير Y مستمر ــ إذن يمكن كتابة $F(x,y)$ عندما $Y = y$ فى الصورة التالية:

$$(2.\,21.\,13):\ F(x,y) = \sum_{i : x_i \le x} F^*(x_i, y)$$

لــو نظرنا فى العلاقة السابقة إلى المتغير Y كما لو كان ثابت (بارامتر) فيمكن اعتبار $F(x,y)$ كما لو كانت دالة توزيع احتمالى فى المتغير المفرد المتقطع X وتكون $F^*(x_i,y)$ هى دالة احتمال هذا المتغير المفرد عند نقطة الاحتمال (x_i,y) وبالتالى يمكن الحصــول علــى الدالــة $F^*(x_i,y)$ مــن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x,y)$ بنفس طريقة الحصول على دالة احتمال المتغير المفرد المتقطع من دالة توزيعه الاحتمالى طبقاً للعلاقة (2. 6. 4) حيث نجد أن:

$$(2.21.14):\ F^*(x_i,y)=F(x_i,y)-F(x_i-0,y)$$

مــن (2. 21. 12) و(2. 21. 13) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى الشرطية للمتغير المتقطع X عندما $Y=y$ هى:

$$(2.21.15):\ F(x\mid y)=\frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i:x_i\le x}F^*(x_i,y)\right]$$

وباستخدام العلاقة (2. 21. 14) يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$(2.21.16):\ F(x\mid y)=\frac{1}{f_2(y)}\sum_{i:x_i\le x}\frac{\partial}{\partial y}\left[F(x_i,y)-F(x_i-0,y)\right]$$

ومــن (2. 21. 16) نجــد أن دالة الاحتمال الشرطية $P_{12}(x_i\mid y)$ للمتغير التابع (المتقطع) X عندما يأخذ المتغير المستقل (المستمر) Y القيمة $Y=y$ ـ هى:

$$(2.21.17):\ P_{12}(x_i\mid y)=\frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[F(x_i,y)-F(x_i-0,y)\right]$$

والعلاقــة الســابقة تكــون مفيدة فى الحالات التى تكون فيها كلٍ من $f_2(y)$ و $F(x_i,y)$ معلومة فى حين أن $P_{12}(x_i\mid y)$ مجهولة.

ويمكــن الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_i,y)$ ودالة الاحتمال الشــرطية $P_{12}(x_i\mid y)$ طبقاً للعلاقات (2. 17. 3) و(2. 17. 10) بطريقة أبسط فى الصورة التالية:

$$(2.21.18a):\ f(x_i,y)=f_2(y)\,P_{12}(x_i\mid y)=P_1(x_i)\,f_{21}(y\mid x_i)$$

كما أن:

$$(2.21.18b):\ \int_y f(x_i,y)dy=P_1(x_i)\int_y f_{21}(y\mid x_i)dy=P_1(x_i)$$

فإذا كانت $f_2(y) > 0$ فإن:

$$(2.21.19a):\ P_{12}(x_i \mid y) = \frac{1}{f_2(y)} P_1(x_i)\, f_{21}(y \mid x_i)$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن:

$$(2.21.19b):\ \int_y P_{12}(x_i \mid y) f_2(y) dy = P_1(x_i) \int_y f_{21}(y \mid x_i) dy = P_1(x_i)$$

وباستخدام العلاقة السابقة للتعويض عن $f_{21}(y \mid x_i)$ فى العلاقة (2.21.9) نجد أن:

$$(2.21.20):\ F(x,y) = \sum_{i: x_i \le x} \int_{-\infty}^{y} f_2(Y)\, P_{12}(x_i \mid Y)\, dY\,.$$

وإذا كانــت الدالـــة $P_{12}(x_i \mid y)$ ثابتة لجميع قيم y ــ عندما $i = 1, 2, \ldots$ كان معنى ذلك أن: $P_{12}(x_i \mid y) = P_1(x_i)$ حيث $P_1(x)$ هى دالة الاحتمال الهامشية للمتغير المــتقطع X وبالــتعويض عــن العلاقـــة الســـابقة فـــى العلاقـــة (2. 21. 20) نجد أن: $F(x,y) = F_1(x)\, F_2(y)$ أى أن المتغـــيران X و Y مســـتقلان. وهذا يعتبر شرط كافى ولازم لاستقلال المتغيرين X و Y ــ لذلك يمكن وضع التعريف التالى:

تعريف (2 ــ 21 ــ 2 أ):

إذا كـــان المتغير العشوائى المختلط (X, Y) فيه X متغير متقطع و Y متغير مستمر فإن X و Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كان،:

$$(2.21.21):\ P_{12}(x_i \mid y) = P_1(x_i)$$

وذلك لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots$. حيث $P_1(x)$ هى دالة احتمال المتغير X و $P_{12}(x \mid y)$ هى دالة الاحتمال الشرطية للمتغير X عندما $Y = y$.

مـــثال (2 ــ 21 ــ 2): فـــى مـــثال (2 ــ 21 ــ 1) أوجد دالة الاحتمال الشرطية $P_{12}(x_i \mid y)$.

(الحـــل)

فى مثال (2 ــ 21 ــ 1) نجد أن دالة احتمال X هى:

$$Pr(x = i) = P_1(i) = q\ P^{i-1}\ ,\ i = 1, 2, \ldots \quad , \quad P + q = 1$$

ودالة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X = i$ هى:

$$f_{21}(y \mid i) = i\ y^{i-1}\ ;\ 0 < y < 1$$

وأثبتنا أن: دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y هى:

$$f_2(y) = q\,(1 - p\,y)^{-2}\ ;\ 0 < y < 1.$$

إذن من علاقة (2. 21. 19a) نجد أن:

$$\Pr(X = i \mid Y = y) = P_{12}(i \mid y) = \frac{1}{f_2(y)}\ P_1(i)\ f_{21}(y \mid i)$$

$$= \frac{q\ P^{i-1}}{q\,(1 - p\,y)^{-2}}\ \left(i\ y^{i-1}\right)$$

$$P_{12}(x_i \mid y) = (1 - p\,y)^2\ i\ (p\,y)^{i-1}, i = 1, 2, \ldots\ ;;\ 0 < P < 1; 0 < y < 1.$$

(حل آخر)

ويمكن الحصول على $P_{12}(x_i \mid y)$ باستخدام العلاقة (2. 21. 17)، حيث نجد من علاقة (2. 21. 9) أن:

$$F(x, y) = \sum_{i: x_i \le x} P_1(x_i) \int_{-\infty}^{y} f_{21}(y \mid x_i)\, dy = \sum_{i: x_i \le x} q\ P^{i-1} \int_{-\infty}^{y} i\ Y^{i-1}\ dy$$

$$= q\,y \sum_{i: x_i \le x} (p\,y)^{i-1}\quad, i = 1, 2, \ldots\ ;\ 0 < p\,y < 1\ ;\ P + q = 1$$

وبفــرض أن $[x]$ أول عــدد صــحيح موجــب أصغر من أو يساوى x حيث $x = i = 1, 2, \ldots$ ــ إذن $F(x, y)$ تأخذ الصورة التالية:

$$F(x, y) = q\,y \sum_{i=1}^{[x]} (p\,y)^{i-1} = q\,y \left[\frac{1 - (p\,y)^{[x]}}{1 - p\,y}\right]$$

من علاقة (2. 21. 17) نجد أن:

$$P_{12}(x_i \mid y) = \frac{1}{f_2(y)}\ \frac{\partial}{\partial y}\left[F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)\right]$$

حيث x_i أعداد صحيحة لأن $(x_i = i)$ إذن $[x_i] = x_i = i = 1, 2, \ldots$

$$P_{12}(x_1 \mid y) = \frac{(1-py)^2}{q} \frac{\partial}{\partial y}\left[q\,y\left(\frac{1-(py)^i}{1-py}\right) - q\,y\left(\frac{1-(py)^{i-1}}{1-py}\right)\right]$$

$$= \frac{(1-py)^2}{q}\, q\, P^{i-1} \frac{\partial}{\partial y}\left[y^i\right]$$

$$= (1-py)^2 \cdot i\,(py)^{i-1} \;,\; i = 1, 2, \ldots \;,\; 0 < P < 1 \;,\; 0 < y < 1$$

وهى نفس النتيجة السابقة فى الحل الأول الذى استخدمنا فيه العلاقة (2. 21. 19).

(2 ــ 21 ــ 3) بعض الاحتمالات الهامة باستخدام دوال التوزيع الشرطية:

Some Important Probabilities by Conditional Distribution Functions:

لقــد عرفنا دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ للمتغير الثنائى المشترك (X, Y) ســواء كــان مــن النوع المتقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه وذلك كما فى العلاقات (2. 14. 3) و (2. 14. 5) و (2. 21. 2) و (2. 21. 20) علــى الترتيب. ومن هذه الدالة يمكن إيجــاد بعض صيغ الاحتمال الهامة. ولتقديم ذلك نفرض أن A مجموعة جزئية من فراغ متغــير عشــوائى Y ونرغب فى إيجاد احتمال أن ينتمى المتغير Y إلى المجموعة A إذا علمنا أن متغير آخر X يساوى قيمة معينة x ــ ولنرمز لهذا بالرمز:

(2. 21. 22): $\Pr[Y \in A \mid X = x] = \Pr[Y \in A \mid x]$

وذلك لأى قيمة معينة x من قيم المتغير X سواء كان المتغير المشترك (X, Y) من النوع المتقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه.

فى الاحتمال السابق نعتبر أن X متغير مستقل و Y متغير تابع. ويمكن الحصول علــى هــذا الاحتمال بوضع الحدث $Y \in A$ بدلاً من الحدث $Y \le y$ فى دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ وذلك لأى قيمة معينة x من قيم المتغير X. وأحياناً يكون من السهل إيجــاد الاحتمال الشرطى $P(A \mid x)$ فى حين من الصعب الحصول على الاحتمال غير الشرطى $\Pr(Y \in A) = P(A)$. لذلك نقدم فيما يلى صيغة للحصول على $P(A)$ بدلالة $P(A \mid x)$ وذلــك فى حالتين رئيسيتين. الحالة الأولى: عندما يكون المتغير المستقل من الــنوع المتقطع. والحالة الثانية: عندما يكون المتغير المستقل من النوع المستمر. ونتناول كل حالة على حده.

الحالة الأولى: إذا كان المتغير المستقل X من النوع المتقطع:

نتناول هذه الحالة فى وضعين.

أولاً: عندما يكون المتغير التابع Y من النوع المتقطع كذلك.

هـنا يكون المتغير المشترك (X, Y) من النوع المتقطع حيث أن كل من X و Y متغير متقطع. ومن العلاقة (11 .15 .2) نجد أن:

$$\Pr(Y \le y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{J:y_J \le y} \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_J)$$

فإذا وضعنا الحدث $Y \in A$ بدلاً من $Y \le y$ فى العلاقة السابقة فإن:

$$\Pr(Y \in A) = \sum_{J:y_J \in A} \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_J).$$

ومن (6 .17 .2) حيث $P(x_i, y_J) = P_{21}(y_J \mid x_i)\, P_1(x_i)$ نجد أن:

$$(2.21.23):\ \Pr[Y \in A] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{J:y_J \in A} P_{21}(y_J \mid x_i) \right] P_1(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[Y \in A \mid X = x_i] P_1(x_i)$$

ثانياً: إذا كان المتغير التابع Y من النوع المستمر (وكما نعلم أن X متغير متقطع).

هـنا يكـون المتغـير المشـترك (X, Y) مـن النوع المختلط الموضح فى بند (2 ـ 21 ـ 1)، إذن نجد من العلاقة (2.21.4a) أن:

$$\Pr(Y \le y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(x_i) \int_{-\infty}^{y} f_{21}(Y \mid x_i)\, dy$$

وبوضع الحدث $Y \in A$ بدلاً من الحدث $Y \le y$ نجد أن:

$$(2.21.24):\ \Pr[Y \in A] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{y \in A} f_{21}(Y \mid x_i)\, dY \right] P_1(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[Y \in A \mid x_i] P_1(x_i)$$

الحالة الثانية: إذا كان المتغير المستقل X من النوع المستمر:

أولاً: إذا كان المتغير التابع Y من النوع المتقطع:

وكمـــا نعلم أن المتغير المستقل من النوع المستمر إذن المتغير المشترك (X, Y) متغير مختلط من النوع الموضح فى البند (2 ـ 21 ـ 2). ومن العلاقة (2. 21. 20) ـ مع استخدام الرمز x للمتغير المستمر والرمز y للمتغير المتقطع ـ نجد أن:

$$F(x, y) = \sum_{i: y_i \leq y} \int_{-\infty}^{x} P_{21}(y_i \mid x) f_1(x)\, dx$$

إذن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i: y_i \leq y} \int_{-\infty}^{\infty} P_{21}(y_i \mid x)\, f_1(x)\, dx$$

وبوضع الحدث $Y \in A$ بدلاً من $Y \leq y$ نجد أن:

$$\Pr(Y \in A) = \sum_{i: y_i \in A} \int_{-\infty}^{\infty} P_{21}(y_i \mid x) f_1(x)\, dx$$

فإذا كان تبادل علاقتى التكامل والمجموع ممكناً فإن:

$$(2.\ 21.\ 25):\ \Pr(Y \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i: y_i \in A} P_{21}(y_i \mid x) \right] f_1(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A \mid X = x] f_1(x)\, dx$$

ثانياً: إذا كان المتغير التابع Y من النوع المستمر:

وحيـــث أن المتغـــير المستقل X من النوع المستمر أيضاً، إذن المتغير المشترك (X, Y) من النوع المستمر ـ ومن العلاقة (2. 15. 12) نجد أن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \right] dy$$

وبوضع الحدث $Y \in A$ بدلاً من $Y \leq y$ نجد أن:

$$\Pr(Y \in A) = \int_{y \in A} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \right] dy$$

فإذا كانت عملية إبدال علامتى التكامل ممكنة فإن:

$$\Pr(Y \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y \in A} f(x, y)\, dy\, dx$$

ومن العلاقة (2. 17. 10b) حيث $f(x, y) = f_{21}(y \mid x) F_1(x)$ نجد أن:

$$(2.\,21.\,26):\ \Pr(Y \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{Y \in A} f(y \mid x)\, dy \right] f_1(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A \mid X = x]\, f_1(x)\, dx$$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن إثبات أن:

$$(2.\,21.\,27):\ \Pr[Y \in A, X \in B] = \sum_{i: x_i \in B} \left[\sum_{J\ y_J \in A} P(y_J \mid x_i) \right] P_1(x_i)$$

إذا كان X و Y متغيران من النوع المتقطع.

$$= \sum_{i\ x_i \in B} \left[\int_{Y \in A} f_{21}(y \mid x_i)\, dy \right] P_1(x_i)$$

إذا كان X متغير متقطع و Y متغير مستمر ــ أو

$$= \sum_{i\ x_i \in B} \Pr[Y \in A \mid X = x_i]\, P_1(x_i)$$

إذا كان X متغير متقطع و Y أى متغير عشوائى (متقطع أو مستمر).

كما أن:

$$(2.\,21.\,28):\ \Pr[Y \in A, X \in B] = \int_{x \in B} \left[\sum_{i: y_i \in A} P_{21}(y_i \mid X = x) \right] f_1(x)\, dx$$

إذا كان X متغير مستمر و Y متغير متقطع

$$= \int_{x \in B} \left[\int_{Y \in A} f_{21}(y \mid x)\, dy \right] f_1(x)\, dx$$

إذا كان X مستمر و Y مستمر ــ أو

$$= \int_{x\in B} \left[\Pr\left[Y \in A \mid X = x \right] f_1(x)\, dx \right]$$

إذا كان X متغير مستمر و Y أى متغير (متقطع أو مستمر).

ملاحظة (2 ــ 21 ــ 3 أ):

بالنظر إلى العلاقات (2. 21. 23) و(2. 21. 24) نرى أنه يمكن التعبير عن $Pr(Y \in A)$ بصيغة واحدة هى: $Pr(Y \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[Y \in A \mid X = x_i]\, P_1(x_i)$ عندما يكون X متغير متقطع و Y أى متغير (متقطع أو مستمر) كذلك من العلاقات (2. 21. 25) و(2. 21. 26) نرى أن الاحتمال $Pr\,(Y \in A)$ يمكن التعبير عنه بصيغة واحدة أيضاً هى: $\Pr[Y \in A] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A \mid X = x]\, f_1(x)\, dx$ عندما يكون X متغير مستمر و Y أى متغير (متقطع أو مستمر).

ذكرنا فى تعريف (2 ــ 21 ــ I أ) أن المتغيران X, Y ــ فى المتغير العشوائى المشترك المختلط (X, Y) ــ يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كانت، دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير المستمر ــ عندما يكون المتغير المتقطع مساوياً قيمة معينة ــ مساوية لدالة كثافة الاحتمال غير الشرطية لهذا المتغير المستمر، وبتطبيق ذلك على العلاقة (2. 21. 19a) ــ عندما نفترض أن X هو المتغير المستمر و Y هو المتغير المتقطع ــ نجد أن المتغير المستمر X يكون مستقلاً عن المتغير المتقطع Y، إذا وفقط إذا كانت، $f_{12}(x \mid y_1) = f_1(x)$ وفى هذه الحالة تأخذ العلاقة (2. 21. 19a) الصورة التالية: $P_{21}(y_i \mid x) = P_2(y_i)$ وعلى ذلك يمكن وضع التعريف التالى لاستقلال مركبتى المتغير المختلط (X, Y) عندما يكون المتغير المستقل من النوع المستمر والمتغير التابع من النوع المتقطع.

تعريف (2 ــ 21 ــ 3 أ):

إذا كان المتغير العشوائى المشترك المختلط (X, Y) فيه X متغير مستمر و Y متغير متقطع فإن X و Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كان: $P_{21}(y_i \mid x) = P_2(y_i)$ وذلك لجميع قيم i ــ حيث $P_2(y_i)$ هى دالة الاحتمال الهامشية (غير الشرطية) للمتغير Y عند النقطة $Y = y_i$ و $P_{21}(y_i \mid x)$ هى دالة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X = x$.

من التعريف السابق نرى أن X و Y يكونا مستقلان كذلك إذا كانت: $F(x,y)=F_1(x)\,F_2(y)$ حيث $F(x,y)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغير (X,Y) و $F_1(x)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المستمر X و $F_2(y)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المتقطع Y.

ملاحظة (2 ـ 21 ـ 3ب):

دالة كثافة الاحتمال أو دالة التوزيع الاحتمالى لأى متغير عشوائى ـ سواء كان مفرد أو متعدد ـ تسمى بالتوزيع الاحتمالى لهذا المتغير العشوائى، أى أن المقصود بالتوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى هو معرفة دالة كثافة احتماله أو دالة توزيعه الاحتمالى والقيم التى يأخذها هذا المتغير. والمتغير العشوائى ـ كما نعلم ـ ما هو إلا تعبيراً كمياً (رقمياً) عن ظاهرة معينة ـ وكثيراً ما تكون المعلومات التى نعرفها عن الظاهرة فى شكل جدول تكرارى ـ لذلك كان لزاماً علينا مادمنا قدمنا التوزيعات الاحتمالية أن نقدم فكرة سريعة عن الجداول التكرارية (أو التوزيعات التكرارية) وعلاقتها بالتوزيعات الاحتمالية ـ وهو ما سنقدمه فى البند التالى.

(2 ـ 22) التوزيعات التكرارية وعلاقتها بالتوزيعات الاحتمالية:

نفرض أن X متغير عشوائى يمثل ظاهرة معينة أو مجتمع معين له دالة توزيع احتمالى $F(x)$. وسحبنا عينة عشوائية حجمها n من المجتمع الذى يمثل هذا المتغير. فإذا كانت القيم المشاهدة للعينة هى $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، فإننا نعتبر أن هذه المجموعة من القيم كما لو كانت صورة مصغرة للمجتمع الذى سحبت منه (الذى يمثله المتغير X) طالما أن العينة عشوائية. وكلما كبر حجم العينة n كلما اقتربت هذه الصورة المصغرة من المجتمع الأصلى. وكما نعرف من دراستنا لمبادئ الإحصاء أن بيانات العينة قد تكون غير مبوبة أى فى الصورة $x_1, \dots, x_n$ وقد تكون موضوعة أو مبوبة فى شكل جدول تكرارى مكون من فئات وتكرارات وهو ما نسميه بالتوزيع التكرارى للعينة. لذلك سنقدم فيما يلى مفهوم جديد شديد الصلة بالتوزيع التكرارى للعينة يسمى بالتوزيع التجريبى للعينة. وهذا المفهوم الجديد قريب الصلة إلى حد ما بالتوزيع الاحتمالى للمجتمع الذى سحبت منه العينة. أى أن هناك علاقة معينة بين التوزيع التجريبى للعينة والتوزيع الاحتمالى للمتغير X الذى يمثل المجتمع المسحوب منه هذه العينة.

(2 ـ 22 ـ 1) التوزيع التجريبى للعينة المسحوبة من مجتمع مفرد:

Empirical Distribution of the Sample (One – dimensional r. v.):

عند سحب عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يمثله المتغير العشوائى X الذى له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ إذا كانت القيم المشاهدة لهذه العينة هى $x_1, x_2, \dots, x_n$

فيمكــن تعــريف "الــتوزيع التجريــبى للعينة" بأنه التوزيع الاحتمالى الذى نحصل عليه بتخصــيص احتمال يعادل $\frac{1}{n}$ لكل قيمة من القيم المشاهدة للعينة (أى لكل نقطة من النقط $x_1, \ldots, x_n$ علــى محــور المتغــير X). وهو توزيع متقطع له n نقطة احتمال. أى أن التوزيع التجريبى للعينة يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(2.22.1):\ P_n(x_i) = \frac{1}{n} \quad ; i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

وقــد يحــدث أن تكون بعض قيم العينة متساوية. فلو كانت مثلاً ثلاث قيم من قيم العينة متساوية يكون الاحتمال المخصص لهذه القيم المكررة (المتساوية) هو $\frac{3}{n}$. لذلك فى حالــة تبويــب مشــاهدات العيــنة فــى جــدول تكرارى، إذا كانت مراكز الفئات هى $x_1, x_2, \ldots, x_k$ والــتكرارات المــناظرة لهــا هى $r_1, r_2, \ldots, r_k$ على الترتيب، حيث $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ يكــون الــتوزيع التجريــبى للعينة هو الذى نحصل عليه بتخصيص احتمال يســاوى $\frac{r_i}{n}$ لمركــز الفئة رقم i، أى لمركز الفئة x_i، وذلك لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots, k$.

وبذلك يمكن تمثيل التوزيع التجريبى للعينة بدالة الاحتمال التالية:

$$(2.22.2):\ P_n^*(x_i) = \frac{r_i}{n}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

ودالة الاحتمال المعطاة بالعلاقة السابقة [وكذلك المعطاة بالعلاقة (2.22.1)] تعتبر دالــة مــن النوع المتقطع. لذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالى المقابلة لهذه الدالة تكون دالة قفــازه step - function ــ بقفــزات (steps) تساوى $\frac{1}{n}$ عندما تكون مشاهدات العينة غير مــبوبة وتســاوى $\frac{r_i}{n}$ عــندما تكون المشاهدات مبوبة فى جدول تكرارى فيه r_i هو عدد الــتكرارات المقابلــة لمركز الفئة رقم i. فإذا كان $r_n(x)$ هو عدد مشاهدات العينة التى تكون أقل من أو تساوى x فإن دالة التوزيع التجريبية للعينة تكون:

$$(2.22.3):\ F_n^*(x) = \frac{r_n(x)}{n}$$

أى أن $F_n^*(x)$ تمــثل الــتكرار النسبى للحدث $X \leq x$ فى مشاهدات العينة التى حجمها n. فهى إذن دالة فى مشاهدات العينة تحتوى على القيمة المتغيرة x، حيث $r_n(x)$ هــى عدد مشاهدات العينة التى تقل عن القيمة x. ومن الواضح أن أى عينتين لهما نفس القــيم المشــاهدة يكون لهما نفس التوزيع التجريبى. كما أن تغيير ترتيب المشاهدات فى العيــنة لا يــؤدى إلــى تغيير التوزيع التجريبى طالما أن قيم المشاهدات لم تتغير. ودالة

الــتوزيع السابقة $F_n^*(x)$ تمثل التوزيع التجريبى لعينة مسحوبة من مجتمع مفرد. ويمكن بصــفة عامــة تكوين دالة توزيع تجريبية لعينة مسحوبة من مجتمع مزدوج من الجدول التكرارى المزدوج لمشاهدات العينة ونرمز لها بالرمز $F_n^*(x, y)$ وهكذا يمكن التعميم إلى حالة العينة المسحوبة من مجتمع متعدد المتغيرات.

(2 ـ 22 ـ 2) دالة التوزيع التجريبية للعينة كتقريب لدالة التوزيع الاحتمالى للمجتمع:

دالــة الــتوزيع التجريبــية $F_n^*(x)$ (للعيــنة المسحوبة من مجتمع دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$) تعتبر دالة فى مشاهدات العينة تحتوى على القيمة المتغيرة x حيث أن $F_n^*(x)$ تســاوى الــتكرار النسبى لتحقق الحدث $X \le x$ فى مشاهدات العينة وX يمثل المجــتمع المســحوب منه العينة. وحيث أن العينة المختارة عينة عشوائية فهى إذن تعتبر صــورة مصغرة للمجتمع وتمثله تمثيلاً صادقاً، ويزداد صدق هذا التمثيل كلما كبر حجم العيــنة n. إذ أنــه كلمــا كبرت العينة كلما اقتربت من المجتمع وفى النهاية عندما يؤول حجــــم العيــنة n إلــى مالانهاية ($n \to \infty$) تصبح العينة تقريباً هى المجتمع كله من الناحــيــة الــنظرية. وبالتالى تصبح دالة التوزيع التجريبية $F_n^*(x)$ هى دالة التــوزيع الاحــتمالــى للمجــتمع $F(x)$. وبــنظرة ســريعة إلى التعريف التجريبى للاحتمال ـ تعريــف (1 ـ 13 ـ 1) ـ نجد أن دالة التوزيع التجريبى المعطاة بالعلاقة (3 .22 .2) هى نســبة عدد المرات التى يتحقق فيها الحدث $X \le x$ إلى عدد مشاهدات العينة. وكما نعلم أن نهايــة هــذا التكرار النسبى، طبقاً للتعريف التجريبى للاحتمال، هو احتمال أن يتحقق الحدث $X \le x$ فى المجتمع وبالتالى فإن:

$$(2.\ 22.\ 4):\ \lim_{n\to\infty} F_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(x)}{n} = \Pr(X \le x) = F(x)$$

مــثال (2 ـ 22 ـ 1): إذا كان الجدول التكرارى التالى يمثل التوزيع التكرارى لأطــوال عيــنة مكونــة مــن 10000 مجند فأوجد دالة الاحتمال التجريبية ودالة التوزيع التجريبية لهذه العينة، إذا كانت X تمثل أطوال المجندين وكان الجدول التكرارى كما يلى:

جدول (2 ـ 22 ـ 1)

Class interval of X فئات X	Frequencies r_i التكرارات
150 -	24
158 -	341
166 -	2391
174 -	4405
182 -	2447
190 -	364
198 -	28
Σ	10000

(الحل)

يمكـــن تمثيل دالة الاحتمال التجريبية للعينة المعطاة بالعلاقة (2 .22 .2) كما فى الجدول التالى:

جدول (2 ـ 22 ـ 2)

med $X = x_i$ مراكز الفئات	$P_n^*(x_i)$ التكرار النسبى
154	,0024
162	,0341
170	,2391
178	,4405
186	,2447
194	,0364
202	,0028
Σ	1.0000

كمـــا أن دالـــة التوزيع التجريبية للعينة المعطاة بالعلاقة (3 .22 .2) يمكن تمثيلها بالجدول التالى:

جدول (2 ـ 22 ـ 3)

X	$F_n^*(x) = \frac{r(x)}{n}$ التكرار النسبى التراكمى
x < 154	0.0000
154 -	0.0024
162 -	0.0365
170 -	0.2756
178 -	0.7161
186 -	0.9608
194 -	0.9972
x ≥ 202	1.0000

(2 ــ 22 ــ 3) التوزيع التجريبى للعينة المسحوبة من مجتمع ثنائى:

The Empirical Dist. Of the Sample (Two – dimensional r. v. 's):

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع له توزيع احتمالى ثنائى مشترك، لنفرض أن هذا المجتمع يمثله المتغير الثنائى (X, Y) الذى له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ ، وأن القيم المشاهدة للعينة هى: $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ يمكن ــ قياساً على حالة المتغير المفــرد ــ تعــريف "التوزيع التجريبى للعينة" فى حالة البيانات غير المبوبة بأن له دالة الاحتمال

$$(2.\ 22.\ 5a):\ P_n(x_i, y_J) = \tfrac{1}{n}\ ,\ \ i = J$$

$$= 0\ ;\ i \neq j \qquad i, J = 1, 2, \ldots, n$$

أو فى صورة أخرى

$$(2.\ 22.\ 5b):\ P_n(x_i, y_i) = \tfrac{1}{n}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

وذلك لأن المتغير (X, Y) فى العينة إذا كانت بيانات العينة غير مبوبة لا يأخذ إلا القيم $(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$ ولا يأخذ قيم من النوع (x_i, y_J) عندما $i \neq J$ [مثل (x_2, y_3)] من(2. 22. 5a) و(2. 22. 1) نجد أن:

$$(2.\ 22.\ 5c):\ P_n(x_i) = P_n(y_i) = \tfrac{1}{n}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

وفى حالة تساوى بعض قيم المشاهدات الثنائية (x, y) ، إذا كانت مثلا ثلاث قيم من العينة متساوية، يكون الاحتمال المخصص لهذه القيم المكررة يساوى $\frac{3}{n}$. والمشاهدتان الثنائيتان تكونا متساويتان إذا كانت قيمة x فى المشاهدة الثنائية الأولى تساوى قيمة x فى المشــاهدة الثنائية الثانية وقيمة y فى المشاهدة الثنائية الأولى تساوى قيمة y فى المشاهدة الثنائية الثانية. أما فى حالة تبويب المشاهدات الثنائية للعينة فى جدول تكرارى مزدوج إذا كانــت مراكــز فــئات المتغير X هى: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ والتكرارات المناظرة لها هى: $r_{1.}, r_{2.}, \ldots, r_{k.}$ على الترتيب حيث أن $\sum_{i=1}^{k} r_{i.} = n$ وكانت مراكز فئات المتغير Y هى: $y_1, y_2, \ldots, y_s$ والــتكرارات المــناظرة لها هى: $r_{.1}, r_{.2}, \ldots, r_{.s}$ على الترتيب بحيث $\sum_{J=1}^{s} r_{.J} = n$ وبذلــك تكــون قــيم (x, y) داخــل الجــدول المــزدوج هــى

فـــإذا كانـــت القيمة $(x_i, y_J)\ ;\ i = 1, 2, \dots, k\ ,\ J = 1, 2, \dots, s$ مكررة (x_i, y_J) مرات عددها r_{iJ} فإن:

$$r_{i.} = \sum_{J=1}^{s} r_{iJ}\ ,\ r_{.J} = \sum_{i=1}^{k} r_{iJ}\ ,\ \sum_{iJ} r_{iJ} = \sum_{i} r_{i.} = \sum_{J} r_{.J} = n$$

وبذلـــك يمكـــن تمثـــيل "الـــتوزيع التجريبى للعينة" بتخصيص احتمال يساوى $\frac{r_{iJ}}{n}$ للقيمة (x_i, y_J) ويمكن تمثيل ذلك بدالة الاحتمال المشتركة التالية:

$$(2.22.6):\ P_n(x_i, y_J) = \frac{r_{iJ}}{n}\ ;\ i = 1, 2, \dots, k\ ;\ J = 1, 2, \dots, s$$

وبالمثل يمكن تمثيل "التوزيع التجريبى الهامشى" للمتغير X بتخصيص احتمال يساوى $r_{i.}$ عندما $X = x_i$ أى أن:

$$(2.22.7):\ P_n(x_i) = \frac{r_{i.}}{n}\ ,\ i = 1, 2, \dots, k$$

كما يمكن تمثيل "التوزيع التجريبى الهامشى" للمتغير Y بدالة الاحتمال:

$$(2.22.8):\ P_n(y_J) = \frac{r_{.J}}{n}\ ,\ J = 1, 2, \dots, s$$

فـــإذا كان $r_n(x, y)$ هو عدد المشاهدات (x_i, y_J) فى العينة التى حجمها (n) التى تحقق العلاقة: $x_i \le x\ ,\ y_J \le y$ لجميع قيم $i = 1, \dots, k$ ، $J = 1, \dots, s$ فإن دالة التوزيع التجريبية للعينة يمكن تمثيلها بدالة الاحتمال:

$$(2.22.9):\ F_n^*(x, y) = \frac{r_n(x, y)}{n}$$

أى أن $F_n^*(x, y)$ تمـــثل الـــتكرار النســـبى للحـــدث: $X \le x$ و $Y \le y$ فى مشـــاهدات العيـــنة التى حجمها n. ومن الواضح أن أى عينتين لهما نفس القيم المشاهدة يكـــون لهما نفس التوزيع التجريبى ــ كما أن تغيير ترتيب المشاهدات فى العينة لا يؤدى إلـــى تغيير التوزيع التجريبى (طالما أن قيم المشاهدات لم تتغير) مثل حالة المتغير المفرد تماماً.

ويمكن إثبات أن دالة التوزيع التجريبية $F_n^*(x, y)$ للعينة المعطاة بالعلاقة (2.22. 9) تــؤول إلــى دالــة التوزيع الاحتمالى $F(x, y)$ للمجتمع المسحوب منه العينة عندما $n \to \infty$ أى أن:

$$(2.22.10):\ \lim_{n\to\infty} F_n^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(x, y)}{n} = \Pr(X \le x, Y \le y) = F(x, y).$$

(حيث $r_n(x, y)$ هى عدد المشاهدات (x_i, y_j) فى العينة التى تحقق العلاقــة: $(X \le x\ ,\ Y \le y)$

(2 ــ 23) بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة:

فــى هذا الباب الذى يتناول المتغيرات العشوائية ودوال توزيعاتها الاحتمالية نرى أنه من الأفضل في نهايته تقديم بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة التى لها أهمية كبيرة فــى دراســتنا للأبــواب التالــية. لذلك سوف نعرض فى هذا البند الصيغ الرياضية فقط للــتوزيعات الــتى ســنقدمها حــتى يمكن استخدام هذه الصيغ والاستفادة منها فى دراسة خصــائص الــتوزيعات الاحتمالــية مثل المتوسطات ومقاييس التشتت والعزوم ومقاييس الالــتواء والتفرطح وكذلك الدوال المميزة والمولدة للعزوم وغير ذلك من الخواص التى نقدمها فى الأبواب التالية على أن نعود فيما بعد بإذن الله إلى دراسة بعض هذه التوزيعات (وتوزيعات أخرى) ــ كلٍ على حده ــ دراسة تفصيلية تتناول شكل وخصائص كل توزيع والدور الذى يلعبه فى النظرية الإحصائية وذلك فى الأبواب السابع والثامن والتاسع.

(2 ــ 23 ــ 1) بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة فى متغير واحد:

Some Special Uni – variate Distribution:

(2 ــ 23 ــ 1 أ) التوزيع المدمج (المتلاشى) أو التوزيع ذو النقطة الواحدة:

هــو أبســط توزيع متقطع وفيه يتركز الاحتمال الكلى عند نقطة واحدة هى القيمة الوحــيدة التى يأخذها هذا المتغير وهى فى نفس الوقت توقعه وقد سبق تقديم هذا التوزيع فى البند (2 ــ 6 ــ 4).

(2 ــ 23 ــ 1 ب) التوزيع ذو النقطتين (0, 1) أو توزيع "برنوللى":

قدمــنا فى البند (1 ــ 26 ــ 1 أ) التجارب المتكررة المستقلة التى لكل منها نتيجتين ممكنتين فقط نجاح s وفشل f والتى تسمى تجارب "برنوللى" أو محاولات "برنوللى"، حيث نرمــز لاحتمال النجاح بالرمز p واحتمال الفشل بالرمز q و $p + q = 1$ و $p \ge 0$. إذا رمزنا لنتــيجة أى تجــربة فى تجارب برنوللى المستقلة بالرمز X فإن X يمكن اعتباره متغير عشوائى دالة احتماله:

$$(2.\ 23.\ 1):\quad P(x)=\begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & ;\ x=0,1\ ,0\leq p\leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث p تسمى معلمة التوزيع.

ملاحظة (2 ــ 23 ــ 1):

الــتوزيع السابق يسمى عائلة من التوزيعات وليس مجرد توزيع واحد، إذ يوجد توزيـــع لكــل قــيمة مــن قــيم p. فمــثلاً عــندما $p=\frac{1}{4}$ يكــون الــتوزيع هــو: $P(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-x}$. لذلــك نســمى الــتوزيع المعطى فى (1 .23 .2) بعائلة توزيعات برنوللى بمعلمة p كما يسمى الفراغ $0\leq p\leq 1$ بفراغ المعلمة p. وسنقدم فيما يلى كل توزيع فى شكل عائلة من التوزيعات موضحين فراغ المعلمه أو المعالم فى كل عائلة من التوزيعات.

(2 ــ 23 ــ 1 جــ) التوزيع المنتظم المتقطع The Discrete Uniform Distribution:

إذا كان المتغير العشوائى X له دالة الاحتمال:

$$(2.\ 23.\ 2):\quad P(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{N} & ;\ x=1,2,\dots,N \\ 0 & ;\quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيــث N عدد صحيح موجب تسمى معلمة التوزيع. يكون X متغير عشوائى له توزيع منتظم متقطع.

(2 ــ 23 ــ 1 د) التوزيع ذو الحدين:

ســبق تقديم التوزيع ذو الحدين فى الباب الأول فى تعريف (1 ــ 26 ــ 1) بالعلاقة (1. 26. 3).

(2 ــ 23 ــ 1 هــ) التوزيع البواسونى:

سبق تقديمه فى الباب الأول فى تعريف (1 ــ 29 ــ 1) بالعلاقة (1 .29 .1).

(2 ــ 23 ــ 1 و) التوزيع ذو الحدين السالب:

سبق تقديمه فى البند (1 ــ 31 ــ 1 أ) من الباب الأول بالعلاقة (2 .31 .1).

(2 ــ 23 ــ 1 ز) التوزيع الهندسى:

سبق تقديمه فى البند (1 ــ 31 ــ 1 ب) من الباب الأول بالعلاقة (1.31.7).

(2 ــ 23 ــ 1 ح) التوزيع الهندسى الزائد (الهايبرجيومترى):

سبق تقديمه فى الباب الأول بالتعريف (1 ــ 27 ــ 1) والعلاقة (1.27.2).

(2 ــ 23 ــ 1 ط) التوزيع اللوغاريتمى المتقطع:

المتغــير العشــوائى X يكون له توزيع لوغاريتمى متقطع بمعلمة q إذا كانت دالة احتماله على الصورة:

$$(2.23.3):\quad P(x)=\begin{cases}\dfrac{-q^{x}}{x\ln(1-q)} & ;\ x=1,2,3,\dots\ ;\ 0<q<1\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

وهــذا الــتوزيع يعتبر حالة خاصة من توزيع ذو الحدين السالب المبتور عند الصفر. إذ يمكــن فى العلاقة (1.31.2) للتوزيع ذى الحدين السالب عند إهمال القيمة $x=0$، إثبات أن: $\lim\limits_{r\to 0}P(x;r,p)=P(x)$ حيث P(x) هى الدالة (2.23.3). أنظر بند (7 ــ 9 ب).

(2 ــ 23 ــ 1 ى) توزيع "بيتا ــ ذات الحدين" "Beta – binomial" Distribution:

المتغير العشوائى X يكون له توزيع "بيتا ــ ذات الحدين" إذا كانت دالة احتماله:

$$(2.23.4):\quad P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(a,b)}\,\dfrac{\Gamma(a+x)\Gamma(n+b-x)}{\Gamma(n+a+b)}\\ \qquad\qquad \text{for } x=0,1,2,\dots,n,\ a>0\ ,\ b>0\\ 0\qquad ; & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

(2 ــ 23 ــ 2) بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة فى عدة متغيرات عشوائية:

(2 ــ 23 ــ 2 أ) التوزيع ثلاثى الحدود Trinomial Distribution:

يكــون المتغــير العشوائى (X, Y) له توزيع ثلاثى الحدود إذا كانت دالة احتماله المشتركة:

$$(2.23.5):\quad P(x,y)=\frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\,P_1^{x}\,P_2^{y}\,P_3^{(n-x-y)}$$

حيث: y, x, n أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة $x + y \leq n$ و P_1 و P_2 و P_3 كسور حقيقية موجبة تحقق العلاقة $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ وخلاف ذلك $P(x, y) = 0$.

(2 ــ 23 ــ 2 ب) التوزيع المتعدد الحدود The Multinomial Distribution:

إذا كان المتغير العشوائى المشترك $(X_1, ..., X_r)$ له دالة الاحتمال المشتركة (3 .30 .1) فإنه يسمى بالمتغير المشترك المتعدد الحدود ويسمى توزيعه الاحتمالى بالتوزيع المتعدد الحدود. انظر أيضاً بند (7 ــ 4).

(2 ــ 23 ــ 2 جـ) التوزيع الهندسى الزائد المتعدد المتغيرات:

The Multi – variate Hypergeometric Distribution:

نقول أن المتغير العشوائى المشترك $(X_1, ..., X_r)$ له توزيع هندسى زائد متعدد المتغيرات عدد متغيراته r إذا كانت دالة احتماله:

$$(2.\,23.\,6):\ P(x_1, ..., x_r) = \Pr(X_1 = x_1, ..., X_r = x_r)$$

$$= \binom{N P_1}{x_1} ... \binom{N P_{r+1}}{x_{r+1}} \Big/ \binom{N}{n}$$

حيث n و N و $x_1, ..., x_{r+1}$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة $x_{r+1} = n - x_1 - ... - x_r$ و $P_1, ..., P_{r+1}$ كسور حقيقية موجبة تحقق العلاقة $P_{r+1} = 1 - P_1 - ... - P_r$. والمتغير $(x_1, ..., x_r)$ يسمى بالمتغير الهندسى الزائد ذو الـ r متغيراً. انظر بند (7 ــ 6).

(2 ــ 23 ــ 3) بعض التوزيعات المستمرة الخاصة للمتغير المفرد:

Some Special Univariate Continous Distributions:

(2 ــ 23 ــ 3 أ) التوزيع المنتظم The Uniform Distribution:

لقد سبق تقديم هذا التوزيع فى بند (1 ــ 23 ــ 1) من الباب الأول تحت مسمى القانون الاحتمالى المنتظم. ويمكن تعريفه بصورة أخرى كما يلى:

المتغير العشوائى X يكون له توزيع منتظم فى الفترة $a \leq X \leq b$ ــ حيث a, b أعداد حقيقية و $a < b$ ــ إذا كان له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2.\,23.\,7):\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ;\ for\ a < X < b \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبمقارنـــة العلاقة السابقة بالعلاقة (1 .32 .1) نجد أن f(x) هى الكمية $1/L(S)$ حيــث S هى الفترة $[a, b]$ وبالتالى فإن احتمال أن ينتمى المتغير X إلى الفترة β هو: $L(\beta)/L(S) = \frac{1}{(b-a)}\int_{\beta} dx$.

انظر التوزيع المنتظم بالباب الثامن.

(2 ـ 23 ـ 3 ب) التوزيع المعتاد The Normal Distribution:

المتغـــير العشـــوائى X الـــذى له توزيع معتاد هو ذلك المتغير الذى له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2.\ 23.\ 8):\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \\ \quad ;\ \text{for } -\infty \le x \le \infty\ ,\ \sigma > 0,\ -\infty \le \mu \le \infty \\ 0 \quad ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمعلمـــتان μ و σ^2 يسميان توقع وتباين X على الترتيب. انظر التوزيع المعتاد بالباب الثامن.

(2 ـ 23 ـ 3 جـ) التوزيع الأسى The Exponential Distribution:

المتغـــير العشـــوائى X ذو التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda > 0$ هو ذلك المتغير الذى له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2.\ 23.\ 9):\quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ;\ \text{for } x > 0\ ,\ \lambda > 0 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر التوزيع الأسى بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 د) توزيع "جاما" "Gamma" Distribution:

المتغـــير العشـــوائى X يكون له توزيع "جاما" بمعلمتين $\alpha > 0$ و $n > 0$ إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.10):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\,x^{n-1}\,e^{-\alpha x} & ;\ \text{for } x>0\ ,\ n>0\ ,\ \alpha>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

انظر توزيع جاما بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 هــ) توزيع "بيتا" "Beta" Distribution:

يكـــون المتغـــير العشـــوائى X له توزيع بيتا بمعلمتين m و n إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.11):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(m,n)}\,x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} & ;\ \text{for } 0<x<1, m>0, n>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

انظر توزيع بيتا بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 و) توزيع "كوشى" "Cauchy" Distribution:

يكون المتغير العشوائى X له توزيع "كوشى" بالمعلمتين λ و α حيث $\lambda > 0$ و $-\infty < \alpha < \infty$ إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.12):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\pi[\lambda^2+(x-\alpha)^2]} & ;\ \text{for } -\infty<x<\infty\\ & ,\ \lambda>0\ ,\ -\infty<\alpha<\infty\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

انظر توزيع كوشى بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 ز) توزيع "ت" أو توزيع "ستيودنت" "T" or "Student" Distribution:

يكــون المتغير العشوائى X له توزيع "ت" أو توزيع "ستيودنت" بمعلمة n إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.13):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\dfrac{1}{\beta\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} & ;\ \text{for } -\infty<x<\infty\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

والمعلمة n تسمى بــ "درجات الحرية". وعندما n = 1 يكون توزيع "ت" هو توزيع "كوشى" بمعلمتى $\alpha=0$ و $\lambda=1$. انظر توزيع "ت" بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 ح) توزيع "مربع كا" أو "كا²" Chi – Square Distribution:

نقــول أن المتغــير العشوائى X له توزيع كا² بدرجات حرية n (أو بمعلمة n) إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.14):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-x/2} & ;x>0\ ;\ n>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

انظر توزيع "كا²" بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 ط) توزيع "ف" "F" Distribution:

نقــول أن المتغــير العشــوائى X له توزيع "ف" (أو توزيع "F") بمعلمتين m و n (حيث m > 0 و n > 0) إذا كان له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2.23.15):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\,\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left[1+\frac{m}{n}x\right]^{\frac{m+n}{2}}} & ;\ \text{for } x>0\,,\ m>0\,,\ n>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

انظر توزيع "F" بالباب الثامن.

(2 ــ 23 ــ 3 ى) توزيع "راى ليج" "Ray Leigh" Distribution:

نقول أن المتغير العشوائى X له توزيع "راى ليج" إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.23.16):\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^2}\,x\,e^{-\frac{1}{2}\left(x/\lambda\right)^2} & ;\ \text{for } x>0\,,\ \lambda>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

(2 ـ 23 ـ 3 ك) توزيع "ماكسويل" "Maxwell" Distribution:

نقول أن المتغير العشوائى X له توزيع "ماكسويل" إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2.\ 24.\ 17):\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\,\dfrac{1}{\lambda^3}\,x^2\,e^{-x^2/\lambda^2} & ;\ \text{for } x>0\ ,\ \lambda>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

(2 ـ 23 ـ 4) بعض التوزيعات المستمرة الخاصة فى عدة متغيرات عشوائية:

(2 ـ 23 ـ 4 أ) التوزيع المعتاد الثنائى The Bivariat Normal Distribution:

المتغـــير العشـــوائى المشترك (X, Y) يكون له توزيع معتاد ثنائى إذا كان له دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$(2.\ 23.\ 18):\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} & ;\ \text{for } -\infty<x,y<\infty\\ & ,\ \sigma_1>0\ ,\ \sigma_2>0\ ,\ -1<\rho<1\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

حيث:

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

و $-\infty<\mu_1$ و $\mu_2<\infty$.

الكميـــتان σ_1^2 و σ_2^2 همـــا تبايـــنى X و Y علـــى الترتيب كما أن μ_1 و μ_2 هما متوســـطى X و Y و ρ هو معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y. وسنتناول هذا التوزيع بشىء من التفصيل فى الباب التاسع.

(2 ـ 23 ـ 4 ب) توزيع "دريشليت" "Dirichlet" Distribution:

نقـــول أن المتغير العشوائى المشترك $(X_1, ..., X_k)$ له توزيع "دريشليت" ذو المعالم $n_1, n_2, ..., n_k, n_{k+1}$ إذا كانت دالة كثافة احتماله المشتركة:

(2. 23. 19):

$$f(x_1,\dots,x_k)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n_1+\cdots+n_{k+1})}{\Gamma(n_1)\dots\Gamma(n_{k+1})}\cdot x_1^{n_1-1}\dots x_k^{n_k-1}\,(1-x_1-\cdots-x_k)^{n_{k+1}-1}\\ \qquad ;\ \text{for } 0<x_i\ ;\ i=1,2,\dots,k\ ,\ x_1+\cdots+x_k<1\\ 0 \qquad ; \qquad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

مــثال (2 ــ 23 ــ 1): فــى الــتوزيعات الاحتمالــية ذات الحديــن والبواسونى والهايبرجيومترى المقدمة فى البنود (2 ــ 23 ــ 1 د، هـــ، ح) على الترتيب، أثبت أن كل مــنها يحقق شروط كثافة الاحتمال ــ أى أن دالة الاحتمال موجبة ومجموعها على مدى المتغير يساوى الواحد الصحيح.

(الحل)

أولاً: التوزيع ذو الحدين:

$$\text{(i)}\ P(x)=\binom{n}{x}P^x(1-P)^{n-x}>0$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{x=0}^{n}P(x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}P^x(1-P)^{n-x}=[P+(1-P)]^n=1$$

ثانياً: التوزيع البواسونى:

$$\text{(i)}\ f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}>0\ ,\ \lambda>0$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{x=0}^{\infty}f(x)=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

ثالثاً: التوزيع الهايبرجيومترى:

$$\text{(i)}\ f(x)=\left[\binom{m}{x}\binom{M-m}{n-x}\Big/\binom{M}{n}\right]>0$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{x=0}^{n}\binom{m}{x}\binom{M-m}{n-x}\Big/\binom{M}{n}=\frac{\binom{M}{n}}{\binom{M}{n}}=1\ ,\ [x\le\min(n,m)]$$

مـثال (2 ـ 23 ـ 2): أثبـت أن الدالة (5 .23 .2) تحقق شروط كثافة الاحتمال وأوجـد دالة الاحتمال الهامشية $P_2(y)$ للمتغير Y ودالة الاحتمال الشرطية $P_{21}(y \mid x)$ وبين أن $\sum_y P_{21}(y \mid x) = 1$.

(الحل)

أولاً:

$$\text{(i)}\quad P(x,y) = \frac{n!\, P_1^x\, P_2^y\, P_3^{(n-x-y)}}{x!\, y!\, (n-x-y)!} > 0$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_x \sum_y P(x,y) = [P_1 + P_2 + P_3]^n = 1$$

ثانياً: دالة الاحتمال الهامشية $P_2(y)$ هى:

$$\begin{aligned} P_2(y) &= \sum_{x=0}^{n-y} \frac{n!}{x!\, y!\, (n-x-y)!} P_1^x\, P_2^y\, P_3^{(n-x-y)} \\ &= \frac{n!\, P_2^y}{y!\,(n-y)!} \sum_{x=0}^{n-y} \frac{(n-y)!}{x!(n-x-y)!} P_1^x\, P_3^{(n-x-y)} \\ &= \binom{n}{y} P_2^y\, [P_1 + P_3]^{n-y} \end{aligned}$$

وبما أن $P_3 = 1 - P_1 - P_2$ إذن:

$$P_2(y) = \binom{n}{y} P_2^y\,(1 - P_2)^{n-y} \quad ; \quad y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ثالثاً: دالة الاحتمال الشرطية $P_{21}(y \mid x)$:

$$P_{21}(y \mid x) = P(x,y)/P_1(x)$$

حيث $P_1(x)$ يمكن الحصول عليها مثل $P_2(y)$ تماما فى الصورة:

$$P_1(x) = \binom{n}{x} P_1^x\,(1 - P_1)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

إذن:

$$\begin{aligned} P_{21}(y \mid x) &= P(x,y)/P_1(x) \\ &= \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} \left[\frac{P_2}{1 - P_1 - P_2}\right]^y \left[1 - \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2}\right]^{n-x} \\ &\quad ;\; y = 0, 1, 2, \ldots, n - x. \end{aligned}$$

رابعاً:

$$\sum_{y=0}^{n-x} P_{21}(y \mid x) = \left[\frac{P_2}{1-P_1-P_2} + \left(1-\frac{P_2}{1-P_1-P_2}\right)\right]^{n-x}$$

$$= 1$$

مـثال (2 ـ 23 ـ 3): فـي كـل مـن الـتوزيعات الآتية: (1) الأسى (2) جاما (3) كوشـي المعطـاة بالعلاقات (2. 23. 9, 10, 12) أثبت أن كل منها يحقق شروط كثافة الاحتمال.

(الحل)

(1) التوزيع الأسى:

$$\text{(i)}\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0 \qquad (\lambda > 0)$$

$$\text{(ii)}\ \int_0^\infty f(x)dx = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda\left(-\tfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = 1$$

(2) توزيع جاما:

$$\text{(i)}\ f(x) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\alpha x} > 0 \ ;\ \alpha > 0 \ ;\ x > 0$$

$$\text{(ii)}\ \int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (\alpha x)^{n-1} e^{-\alpha x}\, d(\alpha x) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1$$

(3) توزيع كوشى:

$$\text{(i)}\ f(x) = \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x-\alpha)^2]} > 0$$

حيث $\lambda > 0$

$$\text{(ii)}\ I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\lambda^2 + (x-\alpha)^2]}$$

ضع $y = x - \alpha$

$$I = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\lambda^2 + y^2} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} \tan^{-1}(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

تمارين الباب الثانى

(2 ــ 1): فى كلٍ من الدوال التالية أثبت أن f(x) دالة كثافة احتمال (أو دالة احتمال) ــ أى أن $f(x) > 0$ و $\int_x f(x)dx = 1$ (أو $\sum_x f(x) = 1$) ــ وأوجـد دالــة الـتوزيع الاحتمالى F(x) وارسم منحنى كلٍ من الدالتين f(x) وF(x):

$$(1)\ f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < 1 \\ 2 - x & ; \ 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$$(2)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & ; 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}\left[x^2 - 3(x-1)^2\right] & ; 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}\left[x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2\right] & ; 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$(3)\ f(x) = |x| \ ; \ |x| < 1$$

$$(4)\ f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \ ; \ |x| < 1$$

$$(5)\ f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \ ; \ 0 < x < 1$$

$$(6)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi\left(1 + x^2/3\right)} \ ; \ -\infty < x < \infty$$

$$(7)\ f(x) = e^{-x} \ ; \ x \ge 0$$

$$(8)\ f(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|} \ ; \ -\infty < x < \infty$$

$$(9)\ f(x) = e^{x}/\left[1 + e^{x}\right]^2 \ ; \ -\infty < x < \infty$$

$$(10)\ f(x) = \tfrac{2}{\pi}e^{x}/\left[1 + e^{2x}\right] \ ; -\infty < x < \infty$$

$$(11)\ f(x) = a e^{-x} + 2b e^{-2x} \ ; x > 0,\ a + b = 1$$

(12) $f(x)=\frac{a}{2}e^{-|x|}+be^{x}/[1+e^{x}]^{2} \quad ; -\infty<x<\infty \;,\; a+b=1$

(13) $f(x)=\frac{1}{4}x\,e^{-x/2} \quad ; \quad x>0$

(14) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2} \quad ; -\infty<x<\infty$

(15) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-2)^2/8} \quad ; -\infty<x<\infty$

(16) $f(x)=\binom{6}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{6-x} \quad ; \quad x=0,1,\ldots,6$

(17) $f(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \quad ; x=1,2,\ldots$

(18) $f(x)=\binom{8}{x}\binom{4}{6-x}\Big/\binom{12}{6} \quad ; \quad x=0,1,2,\ldots$

(19) $f(x)=\binom{1+x}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \quad ; \quad x=0,1,2,\ldots$

(20) $f(x)=\binom{-8}{x}\binom{-4}{6-x}\Big/\binom{-12}{6} \quad ; x=0,1,\ldots,6$

(21) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2a+x)}{a(a+x)^2} & ; 0<x\le a\\[2ex] \dfrac{a^2(a+2x)}{x^2(a+x)^2} & ; a<x<\infty\end{cases}$

(22) $f(x)=-q^{x}/x\ln(1-q) \quad ; x=1,2,3,\ldots \quad ,0<q<1$

(23) $f(x)=\frac{1}{\beta(a,b)}\frac{\Gamma(a+x)\,\Gamma(n+b-x)}{\Gamma(n+a+b)}$

$;\text{for}: x=0,1,2,\ldots,n\,,a>0,b>0$

(24) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}\,\beta\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad \text{for}: -\infty<x<\infty$

(25) $f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x/2}\quad ;\ x>0\ ,\ n>0$

(26) $f(x)=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\,\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left[1+\frac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}}\quad ;\ x>0\ ,\ m>0\ ,\ n>0$

(27) $f(x)=\frac{1}{\lambda^2}\,x\,e^{-(x/\lambda)^2/2}\quad ;\ x>0\ ,\ \lambda>0$

(28) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda^3}x^2\,e^{-x^2/\lambda^2}\quad ;\ x>0\ ,\ \lambda>0$

(29) $f(x_1,\dots,x_k)$

$$=\frac{\Gamma(n_1+\cdots+n_{k+1})}{\Gamma(n_1)\dots\Gamma(n_{k+1})}\,x_1^{n_1-1}\dots x_k^{n_{k}-1}\,(1-x_1-\cdots-x_k)^{n_{k+1}-1}$$

$$\text{for}:\ x_i>0\ ,\ i=1,2,\dots,k\ ,\ x_1+\cdots+x_k<1$$

(2 ــ 2): تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء كرتين عشوائيا فى 4 صناديق بطريقة ما بحيث أن كــل كــرة يمكن أن تسقط فى أى صندوق بفرص متكافئة. فإذا كان المتغير العشوائى X هو عدد الكرات فى الصندوق فأوجد دالة احتمال المتغير X.

(2 ــ 3): تجــربة عشــوائية تتمــثل فى إلقاء قطعة عملة متزنة عدة مرات حتى تظهر الصورة لأول مرة فتتوقف عملية الإلقاء. فإذا كان المتغير العشوائى X هو عدد الرميات فأوجد دالة احتمال X.

(2 ــ 4): صــندوق بــه M كرة منها pM كرة بيضاء $(0<p<1)$ والباقى كرات سوداء. ويوجــد شخصــان A و B يلعبان لعبة من ألعاب الصدفة تتمثل فى سحب كرة عشوائياً من الصندوق، فإذا كانت بيضاء يكسب A ويأخذ جنيه واحد من B وإذا كانــت سوداء يكسب B ويأخذ جنيه واحد من A، علماً بأن A معه جنيهان و B معــه جنيه واحد قبل بداية اللعب. فإذا كان X هو عدد مرات تكرار هذه اللعبة حتى تتوقف بنفاذ المبلغ الموجود مع أحد اللاعبين فأوجد دالة احتمال المتغير X.

(2 ــ 5): إذا كانت:

$$f(x)=\frac{1}{b}\left[1-\left|\frac{x-a}{b}\right|\right]\ ;\ a-b<x<a+b$$

حيث a, b ثابتان و $-\infty<a<\infty$ و $b>0$.

(أ) أثبت أن f(x) دالة كثافة احتمال وارسم منحنى f(x).

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالى F(x).

(2 ــ 6): إذا كانت:

$$f(x)=\frac{k}{b}\left[1-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{2}\right];\ a-b<x<a+b,-\infty<a<\infty,b>0$$

(أ) أوجد قيمة k التى تجعل f(x) دالة كثافة احتمال وارسم منحنى f(x).

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالى F(x) وارسم المنحنى الممثل لها.

(2 ــ 7): إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}a & ;\ 0<x<1\\ \frac{1}{2} & ;\ 1\le x\le 2\\ \frac{1}{2}(1-a) & ;\ 2<x\le 3\ ;\ 0\le a\le 1\end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى F(x).

(2 ــ 8): إذا كانت:

$$f(x;a)=a\,f(x;1)+(1-a)f(x;0)$$

حيث a مقدار ثابت يحقق العلاقة $0\le a\le 1$. بفرض أن كلٍ من f(. ; 0) و f(. ; 1) دالة كثافة احتمال، بين أن f(. ; a) تمثل أيضاً دالة كثافة احتمال.

(2 ــ 9): إذا كانت:

$$f(x)=k\,e^{-ax}\left(1-e^{-ax}\right);\ 0<x<\infty$$

(أ) أوجد قيمة k التى تجعل f(x) دالة كثافة احتمال وأوجد دالة التوزيع الاحتمالى F(x)

(ب) أوجد $\Pr(X>1)$.

(2 ــ 10): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 وX_2 هى:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2)&=4x_1x_2\ ;\ 0<x_1<1\ ,\ 0<x_2<1\\ &=0\qquad ;\ \text{خلاف ذلك}\end{aligned}$$

أوجد: $\Pr\left(0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < x_2 < 1\right)$ و $\Pr(x_1 = x_2)$ و $\Pr(x_1 < x_2)$ و $\Pr(x_1 \le x_2)$.

(2 ــ 11): إذا كانت الدالة $g(x) \ge 0$ لجميع قيم x و $\int_0^\infty g(x)dx = 1$ بين أن الدالة:

$$f(x_1, x_2) = 2g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \Big/ \left(\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

حيث $0 < x_2 < \infty$ و $0 < x_1 < \infty$ دالة كثافة احتمال للمتغيرين X_1 و X_2.

(2 ــ 12): إذا كانت الدالة F(x, y) تساوى الواحد الصحيح عندما $x + 2y \ge 1$ وتساوى الصفر عندما $x + 2y < 1$. بين أن هذه الدالة لا يمكن أن تكون دالة توزيع احتمالى لمتغيرين عشوائيين.

(2 ــ 13): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 و X_2 هى:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad ; \quad 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد الدالة الشرطية $f_{21}(x_2 | x_1)$ والدالة الهامشية $f_2(x_2)$.

(2 ــ 14): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = 21 x_1^2 x_2^3 \quad ; \quad 0 < x_1 < x_2 < 1$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد: الدالة الشرطية $f_{12}(x_1 | x_2)$ والدالة الهامشية $f_1(x_1)$.

(2 ــ 15): نفرض أننا نختار عشوائياً نقطة من الفترة [0, 1] وأن المتغير العشوائى X_1 هو الرقم المقابل لهذه النقطة وبعد اختيار النقطة الأولى نختار نقطة ثانية فى الفترة $[0, x_1]$ ــ حيث x_1 هو الرقم المقابل للنقطة الأولى ــ فإذا كان المتغير العشوائى X_2 هو الرقم المقابل للنقطة الثانية. أوجد الدالة الهامشية $f_1(x_1)$ والدالة الشرطية $f_{21}(x_2 | x_1)$ واحسب الاحتمال $\Pr(x_1 + x_2 \ge 1)$.

(2 ــ 16): نفرض أن f(x) وF(x) هما دالتى كثافة الاحتمال والتوزيع الاحتمالى للمتغير X وأن: $f(x | x > x_0) = f(x)/[1 - F(x_0)]$ ، $x > x_0$: (أ) بين أن $f(x | x > x_0)$ دالة كثافة احتمال. (ب) إذا كان $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$ احسب $\Pr[x > 2 | x > 1]$.

(2 ــ 17): X و Y متغيران عشوائيان مستقلان، $-\infty < X < \infty$ و $-\infty < Y < \infty$.
فإذا كان: $Pr[S_1] = Pr[a < X < b] = \frac{2}{3}$ و $Pr[S_2] = Pr[c < Y < d] = \frac{5}{8}$
فأوجد $Pr[S_1 \cup S_2]$.

(2 ــ 18):

$$f(x, y) = k\,e^{(ax^2 + 2cxy + bY^2)} \; ; \; -\infty < x, y < \infty$$

فــى الدالة السابقة بين أن الشروط اللازمة لتكون كثافة احتمال هى:(1) $a \le 0$ (2) $b \le 0$ (3) $ab - c^2 > 0$. وبين كذلك أنه إذا تحققت هذه الشروط وكان تكــامل هذه الدالة من $-\infty$ إلى $+\infty$ لكلا المتغيرين يساوى الواحد الصحيح فإن:

$$k = \frac{1}{\pi}\begin{vmatrix} -a & c \\ c & -b \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

(2 ــ 19): فى الدالة الثنائية:

$$f(x, y) = \begin{cases} h(x) \cdot g(y) \; ; \; a < x < b \; , a < y < b \; ; \; or \; ; b < x < c \; , b < y < c \\ 0 \qquad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بيــن أن تحليل هذه الدالة إلى حاصل ضرب دالتين h(x) و g(y) ليس كافيا لكى يكون X و Y مستقلان.

(2 ــ 20): أوجد الثابتين k_1 و k_2 لدالتى كثافة الاحتمال:

(أ) $f(x) = k_1 (a^2 + x^2)^{-n} \; ; \; -\infty < x < \infty \; , \; a > 0 \; , n > 0$.

(ب) n ثابت > 2 و $-1 < x < 1$; $f(x) = k_2 (1 - x)^{\frac{n-4}{2}}$.

(2 ــ 21): X و Y متغيران موجبان كثافة احتمالهما معا:

$$f(x, y) = k\,e^{-ax-by}$$

حيــث a و b ثابــتان موجبان. أوجد قيمة k وأوجد كذلك دالة التوزيع الاحتمالى F(x, y) والدوال الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(y)$ والدوال الشرطية $f_{12}(x \mid y)$ و $f_{21}(y \mid x)$.

(2 ــ 22): X و Y متغيران موجبان وكثافة احتمالهما معاً:

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,y(1-x-y) & ;\ x+y\le 1 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة k ثم أوجد الدالة الشرطية $f_{12}(x\,|\,y)$.

(2 ــ 23): إذا كانت:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x & ;0<y<x\ ,\ 0<x<1 \\ 0 & ;\quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد كثافة الاحتمال الشرطية $f(x\,|\,y)$.

(2 ــ 24): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال الشرطية:

$$f(x|y)=\begin{cases} 3x^2/y^3 & ;\ 0<x<y \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والدالة الهامشية: $f_2(y)=5y^4\ ;\ 0<y<1$ أوجد الاحتمال: $\Pr[x>\frac{1}{2}]$

(2 ــ 25): إذا كانت:

$$f(x,y,z)=8\,x\,y\,z\ ,\ 0<x\ ,\ y\ ,z<1$$

دالة كثافة احتمال المتغيرات X, Y, Z. احسب الاحتمال $\Pr[X<Y<Z]$

(2 ــ 26): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x,y)=4\,x\,(1-y)\ ;\ 0<x,\ y<1$$

أوجد الدالة الشرطية $f\left(x\,|\,y<\frac{1}{2}\right)$.

(2 ــ 27): أخذت نقطتان عشوائيتان على محيط دائرة نصف قطرها R. فإذا كان المتغير العشوائى X هو البعد بين هاتين النقطتين، أوجد دالة كثافة احتمال X.

(2 ــ 28): لأى متغير متقطع X يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots$، أثبت أن مجموعة النقط $x_1, x_2, \ldots$ التى يتكون منها مدى المتغير X والتى عندها $\Pr(X=x_i)>0$ تمثل على أكثر تقدير مجموعة قابلة للعد.

(2 ــ 29): لدراسة ظاهرة الادخار فى أحد المجتمعات، لو فرضنا أنه فى طبقة معينة من طــبقات المجــتمع أمكــن تمثــيل هذه الظاهرة بمتغير عشوائى X يمثل كمية المدخرات بالجنيه لأى فرد من أفراد هذه الطبقة، وكانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & ;\ x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & ;\ x\ge 0\end{cases}$$

علماً بأن الحدث $x \le 0$ (الادخار السالب) يمثل الدين.

(أ) ارسم الدالة F(x).

(ب) هــل هــذه الدالة مستمرة؟ وإذا كانت مستمرة أوجد صيغة كثافة الاحتمال وارسم شكلها.

(جـ) مــا هو احتمال أن ادخار فرد من أفراد هذا الطبقة يكون (1) أكثر من 50 جنــيه، (2) أقــل من (50-) جنيه أى يكون مدين بأكثر من 50 جنيه، (3) ينحصر بين (50-) و(50) جنيه ، (4) مساوياً 50 جنيه.

(د) مــا هو الاحتمال الشرطى لأن تكون كمية مدخرات شخص ما فى هذه الطبقة (1) أقــل من 100 جنيه إذا علمنا أن مدخراته أكثر من 50 جنيه (2) أكثر من 50 جنيه إذا علمنا أن مدخراته أقل من 100 جنيه.

(2 ــ 30): فــى دراســة لطــول مدة المكالمة التليفونية الدولية بالدقائق من مدينة معينة كظاهــرة عشوائية أمكن تمثيل طول مدة المكالمة بالمتغير العشوائى X الذى له دالة التوزيع الاحتمالى:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{2}{3}e^{-x/3}-\frac{1}{3}e^{-[x/3]} & ;\ x>0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

حيث [x] هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x عندما $0 \le x$:

(1) ارسم دالة التوزيع الاحتمالى F(x).

(2) هل الدالة F(x) مستمرة أم متقطعة أم غير ذلك.

(3) ما هو احتمال أن تكون طول مدة مكالمة تليفونية دولية من هذه المدينة:

(أ) أكثر من 6 دقائق؟ (ب) أقل من 4 دقائق؟ (جـ) تساوى 3 دقائق؟ (د) بين 4 و7 دقائق؟

(4) ما هو الاحتمال الشرطى أن طول مدة مكالمة تليفونية دولية من هذه المدينة: (أ) أقل من 9 دقائق إذا علمت أنها استمرت أكثر من 5 دقائق؟
(ب) أكثر من 5 دقائق إذا علمت أنها أقل من 9 دقائق؟

(2 ـ 31): إذا كـــان المتغــير الثنائى (X, Y) من النوع المختلط حيث X متغير عشوائى متقطع دالة احتماله:

$$P_{i.} = \Pr(X = i) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} \;;\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

و Y متغير عشوائى مستمر. ودالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما X = i هى:

$$f(y \mid i) = i\,(1-y)^{i-1} \;\;;\;\; 0 < y < 1$$

أثبت أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة (غير الشرطية) للمتغير المستمر Y هى:

$$f_2(y) = 2/(1+y)^2 \;\;;\;\; 0 < y < 1$$

(2 ـ 32): تجربة مركبة تتم على خطوتين. فى الخطوة الأولى يتم إلقاء زهرة نرد متزنة، والمتغــير العشــوائى X يمثل عدد النقط التى تظهر على السطح العلوى لزهرة الــنرد. فــإذا كانــت القيمة المشاهدة للمتغير X تساوى x تكون الخطوة الثانية للــتجربة هى اختيار نقطة (أو عدد) عشوائياً من الفترة $\left[0, \frac{1}{x}\right]$ فإذا كان المتغير Y يمثل الرقم المختار من الفترة $\left(0, \frac{1}{x}\right)$ فأوجد:

(1) دالة احتمال المتغير X.

(2) دالـــة كـــثافة الاحـــتمال (غير الشرطية) للمتغير Y ودالة كثافة الاحتمال الشرطية $f(y \mid x)$ للمتغير Y عندما $X = x$.

(3) دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x, y)$ للمتغير المختلط (X, Y).

(4) دالة الاحتمال الشرطية $P(x \mid y)$ للمتغير X عندما $Y = y$.

(2 ـ 33): كيس به كرة بيضاء وكرتان سوداء. عند سحب 3 كرات من الكيس مع الإعادة (بـــدون إعـــادة) إذا كـــان المتغـــير العشـــوائى X_i يمـــثل نتـــيجة السحبة رقم i $(i = 1, 2, 3)$ حيث $X_i = 1$ إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ويساوى الصفر إذا كانت سوداء. أوجد:

(أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات الثلاثة (X_1, X_2, X_3).

(ب) دوال كثافة الاحتمال الهامشية لكل متغير من المتغيرات الثلاثة.

(جـ) دالة كثافة احتمال المتغير $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$.

(د) دالة كثافة احتمال المتغير $Y_2 = \max_i (X_1, X_2, X_3)$.

(هـ) دالة كثافة احتمال المتغير $Y_3 = \min_i (X_1, X_2, X_3)$.

(2 ــ 34): إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \; , x \geq 0 \; , y \geq 0$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. أوجد:

(أ) الاحتمال: $X \leq 1 \; , \; Y \leq 1$; $\Pr(x \leq 1 \; , \; Y \leq 1)$. (ب) $\Pr(X + Y \leq 1)$.

(جـ) $\Pr(X + Y > 2)$. (د) $\Pr(X < 2Y)$.

(هـ) $\Pr(X > 1)$. (و) $\Pr(X = Y)$.

(ز) $\Pr(Y > 1 \mid X \leq 1)$. (ح) $\Pr(X > Y \mid Y > 1)$.

(2 ــ 35): أوجد كل مطلوبات التمرين السابق (2 ــ 34) إذا كانت:
$f(x, y) = \frac{1}{4}$;; $0 \leq X \leq 2 \; , \; 0 \leq Y \leq 2$ وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(2 ــ 36): المتغيران العشوائيان X, Y لهما دالة الاحتمال المشتركة P(x, Y) المعطاة بالجدول التالى:

Y \ X	P(x, Y) 0	1	2	$P_2(Y)$
0	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$
1	$\frac{2}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{12}{60}$
2	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{18}{60}$
3	$\frac{4}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{24}{60}$
$P_1(x)$	$\frac{10}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{30}{60}$	1

أوجد:

(أ) $\Pr(X \le 1\ ,\ Y \le 1)$. (ب) $\Pr(X + Y \le 1)$.

(جـ) $\Pr(X + Y > 2)$. (د) $\Pr(X < 2Y)$.

(هـ) $\Pr(X > 1)$، $\Pr(Y > 1)$. (و) $\Pr(X = Y)$.

(ز) $\Pr(X \ge Y \mid Y > 1)$. (ح) $\Pr(X^2 + Y^2 \le 1)$.

(ط) هل المتغيران X, Y مستقلان؟ علل إجابتك.

(2 ــ 37): $X_1, X_2, ..., X_5$ خمسة متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{-x^2/8} & ; \text{for } x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(وهو توزيع "راى ليج" المعطى بالعلاقة (2. 23. 16) عندما $\lambda = 2$)

أوجد احتمال أن: $\max_i (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 4$.

(2 ــ 38): Y, X متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & ; \infty \le x\ ,\ y \le \infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) هل X و Y مستقلان؟

(ب) هل X و Y لهما نفس التوزيع؟

(جـ) أوجد $\Pr(X^2 + Y^2 \le 4)$.

(د) هل X^2 و Y^2 مستقلان؟

(هـ) أوجد $\Pr(X^2 \le 2)$ و $\Pr(Y^2 \le 2)$.

(2 ــ 39): X_1 و X_2 و X_3 ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حدد العدد a الذى يجعل احتمال أن واحد على الأقل من المتغيرات X_1، X_2، X_3 أكبر من a يساوى 0.9.

(2 ــ 40): A وB حدثــان و $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B \mid A)=\frac{1}{2}$ و $P(A \mid B)=\frac{1}{4}$. فــإذا كان المتغــير العشوائى X مُعَرَّف كما يلى: X = 1 عند حدوث A وX = 0 عند عدم حدوث A. والمتغير العشوائى Y مُعَرَّف كما يلى: Y = 1 عند حدوث B وY = 0 عند عدم حدوث B. بين إذا ما كانت العبارات التالية صح أو خطأ:

(أ) المتغيران العشوائيان X وY مستقلان.

(ب) $Pr\left(X^2+Y^2=1\right)=\frac{1}{4}$.

(جـ) $Pr\left(X\,Y=X^2\,Y^2\right)=1$.

(د) المتغير العشوائى X له توزيع منتظم فى الفترة [0, 1]. أى التوزيع (2. 23. 7) عندما b = 1 ، a = 0.

(هــ) المتغيران العشوائيان X وY لهما نفس التوزيع؟

(2 ــ 41): إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلان ولهما نفس التوزيع حيث:

$f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1\ ;;\ f(y)=1, 0\le y\le 1$ و $f(x)=f(y)=0$ خـــلاف ذلك. أوجد:

(أ) $Pr(X+Y<0.5)$.   (ب) $Pr(X-Y<0.5)$.

(جـ) $Pr(X\,Y<0.5)$.   (د) $Pr(X/Y<0.5)$.

(هـ) $Pr\left(X^2<0.5\right)$.   (و) $Pr\left(X^2+Y^2<0.5\right)$.

(ز) $Pr\left(e^{-x}<0.5\right)$.   (ح) $Pr(\cos\pi\,Y<0.5)$.

(2 ــ 42): إذا كانت:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & ;\ \text{if}\ \ x\le 0\ \text{or}\ x+y\le 1\ \text{or}\ y\le 0\\ 1 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

هل يمكن اعتبار F(x, y) دالة توزيع احتمالى؟ علل إجابتك.

(2 ــ 43): عند إلقاء 3 زهرات نرد متزنة عشرة مرات. إذا كان X هو عدد المرات التى فــيها الــثلاث أوجه متشابهة وY عدد المرات التى فيها وجهان فقط متشابهان. أوجد دالة الاحتمال المشتركة للمتغيران X وY.

(2 ــ 44): إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان ودالة كثافة احتمال كل منهما هى:

$$f(x)=2x \;\; ; \;\; 0<x<1 \; ;; \; f(y)=2y \; ; \; 0<y<1$$

و $f(x)=f(y)=0$ خـــلاف ذلـــك. احســـب الاحـــتمال الشـــرطى: $\Pr(X<Y \mid X<2Y)$.

(2 ــ 45): الــتوزيع المشـــترك المتقطع للمتغير (X, Y, Z) مُعَرَّف بتخصيص احتمالات متســـاوية لنقط الاحتمال الستة التالية: (0, 0, 0) و(0, 0, 1) و(2, 0, 1) و(2, 1, 0) و(1, 2, 1) و(0, 2, 0): (أ) حدد التوزيعات الهامشية للمتغيرات X و Y وZ. (ب) حدد دالة الاحتمال المشتركة الهامشية للمتغير (X, Y). (جـ) حدد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير (X, Y) إذا علمت أن Z = 1.

(2 ــ 46): (أ) بين أن الدالة:

$$f(x_1,\dots,x_n)=1 \;\; ; \text{ for } 0<x_i<1 \;\; , \; i=1,2,\dots,n$$

تمثل دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغيرات مستقلة.

(ب) بين أن الدالة:

$$f(x_1,\dots,x_n)=k \; ; \text{ for } x_i>0 \; , \; x_1+\dots+x_n\le 1$$

تمثل دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغيرات غير مستقلة.

(2 ــ 47): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y, Z) هى:

$$f(x,y,z)=\frac{3}{4\pi} \;\; ; \text{ for } x^2+y^2+z^2\le 1$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى Z.

(2 ــ 48): المتغيران العشوائيان X_1, X_2 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1+x_2 \;\; ; \;\; 0<x_1<1 \;\; , \;\; 0<x_2<1 \\ \text{وتساوى الصفر خلاف ذلك} \end{cases}$$

بين أن المتغيران غير مستقلان. ثم بين أن:

$$\Pr(0<X_1<\tfrac{1}{2} \; , \; 0<X_2<\tfrac{1}{2}) \ne \Pr(0<X_1<\tfrac{1}{2})\cdot \Pr(0<X_2<\tfrac{1}{2})$$

(2 ــ 49): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين X_1, X_2 هى:

$$f(x_1, x_2) = 8\, x_1 x_2 \;\;;;\;\; 0 < x_1 < x_2 < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن المتغيران X_1, X_2 غير مستقلان.

(2 ــ 50): إذا كانت المتغيرات الثلاثة X_1, X_2, X_3 لها دالة الاحتمال المشتركة التالية:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{4} \;\;;;\;\; (x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. أثبت أن:

$$P_{iJ}(x_i, x_J) = P_i(x_i) \cdot P_J(x_J) \;\;;\;\; i \neq J \quad ;; \;\; i, J = 1, 2, 3$$

بينما:

$$P(x_1, x_2, x_3) \neq P_1(x_1)\, P_2(x_2)\, P_3(x_3)$$

حيــث $P_i(x_i)$ هى دالة احتمال المتغير X_i و $P_{iJ}(x_i, x_J)$ هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_i, X_J.

ملاحظــة: هــذا التمريــن مثال قدمه "س. برنستين" "S. Bernestien" ليبين أن الاســتقلال مثنى مثنى ليس من الضرورى أن يترتب عليه الاستقلال بين المتغيرات الثلاثة معاً.

(2 ــ 51): إذا كــان المتغــيران العشوائيان X_1, X_2 لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$f(x_1, x_2) = 2e^{-x_1 - x_2} \;\;;;\; 0 < x_1 < x_2 \;\;,\;\; 0 < x_2 < \infty$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن المتغيران X_1, X_2 غير مستقلان.

(2 ــ 52): أثبــت أن الدالـــة $F(y \mid x - h < X \leq x)$ المعطاة بالعلاقة (7 .17 .2) تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالى بالنسبة للمتغير الشرطى Y.

(2 ــ 53): أثبت صحة العلاقة (2. 17. 9).

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

(معالم الموضع) والتشتت والعزوم

Measures of Central Tendency (Location Parameters), Dispersion and Moments

(3 ـ 1) مقدمة:

من دراستنا لمبادئ الإحصاء نعلم أن أى ظاهرة أو مجتمع إحصائى يمكن دراسته وتحديد خصائصه عن طريق تحديد مجموعة من الثوابت أو القيم النموذجية Typical Values ـ تسمى بارامترات المجتمع ـ Parameters ـ تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة. وهذه البارامترات تلعب دوراً هاماً فى الإحصاء الرياضى. هذه الثوابت أو البارامترات كثيرة، منها الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى والمنوال والوسيط وغيرها من المتوسطات بصفة عامة والتى تسمى بمقاييس المركز (أو مقاييس الموضع). ومنها أيضاً العزوم والمتراكمات وغيرها من المقاييس المسماة بمقاييس التشتت. وكل مقياس من هذه المقاييس عبارة عن ثابت يمثل قيمة واحدة أو رقم واحد يعبر عن متوسط المجتمع محل الدراسة أو تشتته أو درجة التواءه أو تفرطحه أو غير ذلك من المعلومات التى تحدد خصائص المجتمعات بحيث يمكن تلخيص بيانات الظاهرة الممثلة للمجتمع محل الدراسة فى رقم واحد أو مجموعة محدودة من الأرقام (أو الثوابت) حتى يمكن استيعاب هذه البيانات وإعطاء فكرة عامة عنها لفهمها واستنتاج المعلومات المفيدة منها.

وكما هو معروف أيضاً من دراستنا لمبادىء الإحصاء أن أى جدول تكرارى لظاهرة ما يمثلها متغير عشوائى X يمكن وضعه فى صورة مراكز فئات x_i وتكرارات r_i:

Mid X مراكز الفئات	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	Σ
r_i frequencies تكرارات	r_1	r_2	...	r_i	...	r_k	n

فـإذا فرضنا أن $g(x)$ دالة ما فى المتغير X (أو فى القيم x_i) فيمكن تعريف متوسط الدالة $g(x)$ بالعلاقة التالية:

$$(3.\ 1.\ 1):\ \overline{g}(x) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i) \cdot \left(\frac{r_i}{n}\right)$$

وباختـيارات مناسبة للدالة $g(x)$ يمكن أن نحصل من الجدول التكرارى على كثير مـن الثوابـت أو البارامـترات الـتى تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة سواء من متوسـطات أو مقايـيس أخـرى للتشتت، أو غير ذلك من المقاييس التى تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة وذلك كما يلى:

(3 ـ 1 ـ 1) مقاييس المركز (أو الموضع) المحسوبة من الجداول التكرارية:

Measures of Central Tendency (or Measures of Location):

(أ) الوسط الحسابى:

بوضع $g(x_i) = x_i$ فى معادلة (3. 1. 1) نحصل على الوسط الحسابى ـ والذى نسميه أحـياناً فى الإحصاء الرياضى بالتوقع أو القيمة المتوقعة ـ ونرمز له عادة برمز خاص هو $\overline{x}$ (أو μ أو m) وبذلك يكون الوسط الحسابى:

$$(3.\ 1.\ 2):\ \overline{x} = \sum_{i} x_i \left(\frac{r_i}{n}\right).$$

(ب) الوسط الهندسى:

بوضع $g(x_i) = \ln x_i$ فى معادلة (3. 1. 1) نحصل على لوغاريتم الوسط الهندسى ـ فإذا رمزنا للوسط الهندسى بالرمز g_x فإن:

$$(3.\ 1.\ 3):\ \ln g_x = \sum_{i} (\ln x_i) \cdot \left(\frac{r_i}{n}\right)$$

ومـنها نحصل على g_x ـ وذلك بشرط أن جميع قيم x_i تكون موجبة حتى يمكن تعريف $\ln(x_i)$.

(جـ) الوسط التوافقى:

بوضــــع $g(x_i)=\frac{1}{x_i}$ فى معادلة (3. 1. 1) نحصل على مقلوب الوسط التوافقى ــ فلو رمزنا للوسط التوافقى بالرمز H_x نجد أن:

$$(3.\ 1.\ 4):\ \frac{1}{H_x}=\sum_i \frac{1}{x_i}\cdot\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

(د) الوسيط والمنوال:

فى دراستنا لمبادىء الإحصاء تعرفنا على الوسيط والمنوال للتوزيعات التكرارية. حيث عَرَّفنا الوسيط بأنه هو القيمة المتوسطة للبيانات بعد ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً) فى جــدول تكــرارى متجمع صاعد (أو هابط) ــ بحيث أن عدد التكرارات السابقة للوسيط تســاوى عدد التكرارات اللاحقة له ــ والوسيط يسمى إحصاء ترتيبى لأهمية الترتيب فى تحديــده. والمــنوال هــو القيمة الأكثر شيوعاً (أو الأكثر تكراراً) ويقع المنوال فى الفئة المقابلة لأكبر تكرار فى الجدول التكرارى.

(3 ــ 1 ــ 2) مقاييس التشتت المحسوبة من الجداول التكرارية:

تعرفنا كذلك فى دراستنا لمبادىء الإحصاء على مقاييس التشتت وكيفية إيجادها من الجــداول الــتكرارية ــ حيث أن هذه المقاييس تبرز خاصية هامة أخرى من خصائص التوزيع التكرارى هى درجة تركيز أو انتشار (أى تشتت) التوزيع التكرارى. فقد يتساوى توزيعـــان فى المتوسط مع اختلافهما فى درجة التركيز أو الانتشار. ويقاس التشتت بعدة مقايــيس مــثل المدى الذى يمثل الفرق بين أكبر وأصغر قراءة أو الانحراف المتوسط أو التباين أو الانحراف المعيارى أو غير ذلك مثل العزوم والمتراكمات ــ حيث يمكن قياس درجـــة الــتواء التوزيع التكرارى أو تماثله بحساب العزم المركزى الثالث وقياس تفرطح الــتوزيع بحســاب العـــزم المركزى الرابع وكل هذه المقاييس نحصل عليها بالاختيارات المناسبة للدالة $g(x_i)$ فى المعادلة (3. 1. 1) كما يلى:

(أ) الانحراف المتوسط:

بوضــــع $g(x_i)=|x_i-\mu|$ فى معادلة (3. 1. 1) [حيث μ هو الوسط الحسابى أو الــتوقع] نحصل على الانحراف المتوسط ــ وهو متوسط الانحرافات المطلقة للقيم x_i عن متوسطها μ ــ وبذلك يكون الانحراف المتوسط والذى نرمز له بالرمز Δ_x هو:

$$(3.\ 1.\ 5):\ \Delta_x=\sum_i |x_i-\mu|\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

(ب) التباين والانحراف المعيارى:

للحصـــول على التباين σ_x^2 من الجدول التكرارى نضع $g(x_i)=(x_i-\mu)^2$ فى معادلة (3.1.1) فنحصل على التباين فى الصورة:

$$(3.1.6):\ \sigma_x^2=\sum_i (x_i-\mu)^2\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

والانحراف المعيارى σ_x هو الجذر الموجب للتباين:

$$(3.1.7):\ \sigma_x=+\sqrt{\sum_i (x_i-\mu)^2\left(\tfrac{r_i}{n}\right)}$$

(جـ) العزم المركزى الثالث:

يمكن الحصول على العزم المركزى الثالث بوضع $g(x_i)=(x_i-\mu)^3$ فى معادلة (3.1.1) وبذلك يكون العزم المركزى الثالث هو:

$$(3.1.8):\ \mu_3=\sum_i (x_i-\mu)^3\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

(د) العزم المركزى الرابع:

وبالمثل يكون العزم المركزى الرابع:

$$(3.1.9):\ \mu_4=\sum_i (x_i-\mu)^4\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

(هـ) العزم المركزى من الدرجة J:

وعموماً يكون العزم المركزى من الدرجة J هو:

$$(3.1.10):\ \mu_J=\sum_i (x_i-\mu)^J\left(\tfrac{r_i}{n}\right)$$

(و) بعض مقاييس الالتواء والتفرطح:

كمـــا يمكـــن قياس الالتواء والتفرطح للتوزيع التكرارى بعدة مقاييس. فمن مقاييس الالتواء مثلاً:

$$(3.1.11):\ S_1=\frac{\text{mean}-\text{mode}}{\sigma}=\frac{\text{الوسط الحسابى} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

$$(3.1.12):\ S_2=\mu_3^2/\mu_2^3$$

ومن مقاييس التفرطح:

$$(3.\ 1.\ 13):\ \gamma = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

وقياساً على ما سبق يمكن تحديد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس السابقة للتوزيعات الاحتمالية بصورة مماثلة لما هو متبع فى التوزيعات التكرارية مع مراعاة المحاذير الرياضية اللازمة وذلك باستبدال التكرار النسبى $\frac{r}{n}$ فى معادلة (3. 1. 1) بدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X وتحويل علامة المجموع إلى علامة التكامل إذا كان X متغير مستمر وتركها كما هى إذا كان متقطع، وذلك استنباطاً من العلاقة بين التوزيعات التكرارية والتوزيعات الاحتمالية مثل العلاقة بين دالة التوزيع الاحتمالى ودالة التوزيع التجريبية للعينة والمعطاة بالعلاقة (4 .22 .2).

(3 ـ 2) مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات أو مقاييس الموضع) للمتغير العشوائى المفرد:

Measures of Central Tendency (Means or Measures of Location) for Uni-variate r. v.:

(3 ـ 2 ـ 1): مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات والتى تعرف كذلك بمقاييس الموضع للمتغير العشوائى المفرد X مثل الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى والوسيط (وباقى الإحصاءات الترتيبية) والمنوال ـ يمكن الحصول عليها للمتغير العشوائى X أو لأى دالة (بوراليه) فى المتغير X ـ بأسلوب مماثل لذلك الأسلوب المستخدم فى الحصول على هذه المقاييس من التوزيعات التكرارية وذلك من المعادلة (3. 1. 1) باستخدام دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى X بدلاً من التكرار النسبى $\frac{r_i}{n}$.

فإذا كانت g(x) دالة فى المتغير العشوائى المتقطع X الذى له دالة الاحتمال P(x) ـ فإن الدالة g(x) تكون متغيراً عشوائياً ـ ويكون متوسط (أو توقع) هذا المتغير (أو هذه الدالة) g(x) ـ كما يتضح من معادلة (3. 1. 1) ـ هو:

$$(3.\ 2.\ 1):\ E[g(X)] = \bar{g}(X) = \sum_i g(x_i)P(x_i)$$

حيث Σ هو المجموع مأخوذاً على جميع قيم X التى عندها $P(x) > 0$.

أمـــا إذا كان المتغير X من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال f(x) فإن توقع الدالة g(x) تكون:

$$(3.2.2):\ E[g(X)] = \bar{g}(X) = \int_x g(x) f(x) dx$$

حيث $\int_x$ هو التكامل مأخوذاً على كل مدى المتغير X.

ولكن المجموع فى العلاقة (3. 2. 1) قد يكون مكوناً من عدد لانهائى من الحدود ــ وعلـــى ذلك فإنه لا يكون دائماً مجموع تقاربى أى لا يكون دائماً موجود ــ فقد يكون المجمـــوع لانهائى. كما أن التكامل الموجود فى العلاقة (3. 2. 2) قد يكون فيه أحد أو كلا طـــرفى التكامل لانهائى ــ لهذا فإنه لا يكون دائماً موجود ــ ولذلك فإننا نقول أن التوقع المحسوب بالعلاقة (3. 2. 1) يكون موجود إذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.2.3):\ \sum_i |g(x_i)| P(x_i) < \infty$$

حيث $|g(x_i)|$ هى القيمة الموجبة للدالة $g(x_i)$. كما أن التوقع المحسوب بالعلاقة (3. 2. 2) يكون موجود إذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.2.4):\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$$

وعلـــى ذلك إذا كان المجموع فى الجانب الأيمن من العلاقة (3. 2. 1) موجود (أى محدود) ولكن العلاقة (3. 2. 3) غير متحققة فإننا نقول أن توقع الدالة أو المتغير العشوائى g(X) غير موجود كما فى مثال (3 ــ 2 ــ 3) التالى ــ وكذلك إذا كان التكامل فى الجانب الأيمـــن من العلاقة (3. 2. 2) موجود فى حين أن العلاقة (3. 2. 4) غير متحققة فإننا نقول أن توقع المتغير العشوائى g(X) غير موجود.

وعموما إذا كانت الدالة $|g(X)|$ لها حد أعلى ــ أى يوجد عدد حقيقى موجب M بحيـــث تكون $|g(X)| \le M$ لجميع قيم X ــ فإن توقع المتغير العشوائى g(X) يكون دائماً موجود وذلك لتحقق الشرطين (3. 2. 3)،(3. 2. 4) دائماً.

ويمكن التعبير عن التوقع $E[g(X)]$ بعلاقة واحدة فى حالة المتغير المتقطع أو المستمر واستخدام صيغة واحدة فى الحالتين بدلاً من الصيغتين (3. 2. 1) و(3. 2. 2) وذلك باستخدام دالة التوزيع الاحتمالى F(x) للمتغير X واستخدام تكامل "ستيليتج" فنقول أن:

$$(3.2.5):\ E[g(X)] = \int_x g(x)\, dF(x)$$

يسمى بتوقع المتغير العشوائى $g(X)$، إذا كان X معرف بدالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$، وإذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.\ 2.\ 6):\ \int_x |g(x)|\, d\, F(x) < \infty$$

حيث أن التكامل يتحول إلى مجموع إذا كان المتغير X من النوع المتقطع وتتحول $dF(x)$ إلى دالة الاحتمال $p(x_i)$.

مما سبق يمكن تقديم التعريف التالى لتوقع المتغير العشوائى $g(X)$.

تعريف (3 ـ 2 ـ 1): إذا كانت $g(X)$ دالة (بوراليه) فى المتغير العشوائى X الذى له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ فإن توقع المتغير $g(X)$ يعرف بأنه:

$$(3.\ 2.\ 7a):\ E[g(X)] = \int_x g(x)\, d\, F(x)$$

إذا كان المتغير العشوائى X معين بدالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ وإذا تحققت العلاقة (3. 2. 6).

أو:

$$(3.\ 2.\ 7b):\ E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(x_i)$$

إذا كان X متغير متقطع له دالة الاحتمال $P(x)$ وتحققت العلاقة (3. 2. 3).

أو:

$$(3.\ 2.\ 7c):\ E[g(X)] = \int_x g(x) f(x) dx$$

إذا كان X متغير مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ وتحققت العلاقة (3. 2. 4).

ملاحظة (3 ـ 2 ـ 1): [بوضع $g(x) = [X - c]^r$ فى العلاقات (3. 2. 7) السابقة نحصل على كمية تسمى بالعزم الرائى (أو العزم من الدرجة r) μ'_r للمتغير X حول الثابت c ـ فإذا كانت c هى متوسط X فإنه يسمى بالعزم الرائى المركزى ـ وسنقدم ذلك فى بند (3 ـ 5 ـ 3) التالى].

ونتناول الآن مقاييس الموضع. وهى الوسط الحسابى (أو التوقع) والوسيط والمنوال وغيرها كلٍ على حدة.

(3 ـ 2 ـ 2) الوسط الحسابى أو التوقع للمتغير المفرد X:

إذا كــان X متغير عشوائى له دالة التوزيع الاحتمالى F(x) فيمكن تعريف توقع المتغير X ــ كما فى تعريف (3 ــ 2 ــ 1) بوضع g(x) = x ــ كما يلى:

تعــريف (3 ــ 2 ــ 2): إذا كــان X متغير عشوائى له دالة التوزيع الاحتمالى F(x) ــ فإن توقع المتغير X يعرف بأنه:

$$(3.\,2.\,8a):\ E(X)=\int_x x\,d\,F(x)$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.\,2.\,8b):\ \int_x |x|\,d\,F(x)<\infty$$

والتكامل مأخوذ بمفهوم تكامل "ستيليتج".

فإذا كان المتغير X من النوع المتقطع وله دالة الاحتمال P(x) فإن:

$$(3.\,2.\,8c):\ E(X)=\sum_x x_i\,P(x_i)$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.\,2.\,8d):\ \sum_x |x_i|\,P(x_i)<\infty$$

(أى يكون المجموع متقارباً تقارب مطلق)

أما إذا كان المتغير X من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال f(x) فإن:

$$(3.\,2.\,8e):\ E(X)=\int_x x\,f(x)dx$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.\,2.\,8f):\ \int_x |x|\,f(x)dx<\infty$$

(أى يكون التكامل متقارباً تقارب مطلق)

وعــادة نستخدم أكثر من لفظ للتوقع منها التوقع الرياضى أو القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابى.

وفيما يلى بعض الأمثلة نوجد فيها التوقع لعدد من التوزيعات الاحتمالية المقدمة فى البند (2 ــ 23).

مـــثال (3 ــ 2 ــ 2 أ): أوجـــد E(X) إذا كـــان المتغير العشوائى X له التوزيع الاحتمالى الآتى:

(1) التوزيع ذى الحدين المعطى بالعلاقة (3 .26 .1).

(2) التوزيع البواسونى المعطى بالعلاقة (1 .29 .1).

(3) التوزيع الهايبرجيومترى المعطى بالعلاقة (2 .27 .1).

(4) التوزيع المنتظم المعطى بالعلاقة (7 .23 .2).

(5) توزيع جاما المعطى بالعلاقة (10 .23 .2).

(6) توزيع بيتا المعطى بالعلاقة (11 .23 .2).

(الحـــل)

(1) توقع المتغير ذى الحدين $(k = x, q = 1 - P)$:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} P^{x} (1-P)^{n-x}$$

$$= n\,p \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} (1-P)^{(n-1)-(x-1)} = n\,p[p + (1-p)]^{n-1} = n\,p$$

(2) توقع المتغير ذى التوزيع البواسونى $(k = x)$:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, e^{-\lambda} \tfrac{\lambda^{x}}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

(3) توقع المتغير ذى التوزيع الهايبرجيومترى $(k = x)$:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{m}{x} \binom{M-m}{n-x} \Big/ \binom{M}{n} = \frac{m}{\binom{M}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{m-1}{x-1} \binom{M-m}{n-x}$$

$$= \frac{m}{\binom{M}{n}} \binom{m-1+M-m}{x-1+n-x}$$

$$= \frac{m}{\binom{M}{n}} \binom{M-1}{n-1} = n\left(\frac{m}{M}\right) = n\,p \quad ; \quad p = \frac{m}{M}$$

(4) توقع المتغير ذى التوزيع المنتظم:

$$E(X)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{(b-a)}\tfrac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}\left[b^2-a^2\right]=\frac{b+a}{2}$$

(5) توقع المتغير ذى توزيع جاما:

$$E(X)=\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x\,x^{n-1}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{\Gamma(n+1)}{\alpha\Gamma(n)}=\frac{n}{\alpha}$$

(6) توقع المتغير ذى التوزيع بيتا (n, m):

$$E(X)=\frac{1}{\beta(m,n)}\int_0^1 x\,x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{1}{\beta(m,n)}\beta(m+1,n)$$

$$=\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1+m)}=\frac{m}{n+m}$$

ويجب ملاحظة أن عملية إيجاد التوقع طبقاً لتعريف (3 ــ 2 ــ 2) والذى نشترط فيه تحقق العلاقتين (3. 2. 8d) و(3. 2. 8f) ما هى إلا عملية رياضية لها خصائص أساسية معيــنة تســاعد على تبسيط الكثير من العمليات الحسابية عند إيجاد توقع بعض الدوال أو المتغــيرات العشــوائية. فإذا كان b و c مقادير ثابتة و$g(x), g_1(x), g_2(x)$ دوال فى المتغير العشوائى X وتوقعات هذه الدوال موجودة (محدودة) فيمكن إثبات أن دليل التوقع E(.) له الخصائص التالية:

(3 ــ 2 ــ 2 أ) خصائص دليل التوقع E(.):

(1)

$$(3.2.9): E(c)=c$$

(2)

$$(3.2.10a): E[c\,g(X)]=c\,E[g(X)]$$

$$(3.2.10b): E[c\,g(X)\pm b]=c\,E[g(X)]\pm b$$

(3)

$$(3.2.11a): E[g_1(X)\pm g_2(X)]=E[g_1(X)]\pm E[g_2(X)]$$

وعموماً

$$(3.2.11b):\ E\left[\sum_i [c_i\, g_i(X)+b_i]\right]=\sum_i c_i\, E g_i(X)+\sum_i b_i$$

حيث c_i, b_i ثوابت، $g_i(x)$ دوال فى المتغير X.

(4)

$$(3.2.12): E[g_1(X)]\le E[g_2(X)]$$

إذا كانت $g_1(X)\le g_2(X)$ لجميع قيم X.

(5)

$$(3.2.13): |E[g(X)]|\le E[|g(X)|]$$

(6) إذا كان X، Y متغيران مستقلان فإن:

$$(3.2.14):\ E[g_1(X)g_2(Y)]=E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

العلاقات من (3. 2. 9) حتى (3. 2. 13) يمكن إثباتها سواء كان المتغير العشوائى X من النوع المتقطع أو النوع المتصل (المستمر) والإثبات ما هو إلا تطبيق مباشر لتعريف (3 ــ 2 ــ 1) ــ لذلــك سنكتفى بالإثبات فى الحالة التى يكون فيها X متغير عشوائى من النوع المستمر ــ وذلك كما يلى:

(1)

$$E[c]=\int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)dx=c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=c\ ;$$

(2)

$$E[c\, g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} c\, g(x)f(x)dx=c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx=c\, E[g(x)]\ ;$$

(3)

$$E[g_1(X)\pm g_2(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}[g_1(x)\pm g_2(x)]f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f(x)dx\pm\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)f(x)dx$$

$$=E[g_1(X)]\pm E[g_2(X)];$$

(4) إذا كانت $g_2(x) \geq g_1(x)$ فإن: $g_2(x) - g_1(x) \geq 0$

$$E[g_2(X) - g_1(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g_2(x) - g_1(x)] f(x) dx \geq 0$$

$$\therefore E[g_2(X)] \geq E[g_1(X)]$$

(5) فى العلاقة (3. 2. 13) إذا وضعنا:

$$g_1(x) = g(x) \;\;,\;\; g_2(x) = |g(x)|$$

$$\therefore E[g(X)] \leq E|g(X)|. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

أما إذا وضعنا فى (3. 2. 13)

$$g_1(x) = -|g(x)| \;;\; g_2(x) = g(x)$$

نجد أن:

$$-E[|g(X)|] \leq E[g(X)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

من (a)، (b) نجد أن:

$$-E[|g(X)|] \leq E[g(X)] \leq E[|g(X)|]$$

$$\therefore |E[g(X)]| \leq E[|g(X)|]$$

(6)

$$E[g_1(X) g_2(Y)] = \int_x \int_y g_1(x) g_2(y) f(x,y) dx\, dy$$

ومن الاستقلال

$$= \int_x \int_y g_1(x) g_2(y) f_1(x) f_2(y) dx\, dy = E[g_1(X)] E[g_2(Y)]$$

مـــثال (3 ــ 2 ــ 2 ب): إذا كـــان X متغير عشوائى له توزيع منتظم دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \;;\; a < X < b$$

فأوجد:

$$E(X-m)^2$$

حيث $m = E(X)$

(الحل)

$$E(X-m)^2 = E\left[X^2 - 2mX + m^2\right]$$

ومن الخاصية (3. 2. 11)

$$E(X-m)^2 = E\left(X^2\right) - E(2mX) + E\left(m^2\right)$$

ومن (3. 2. 9) و(3. 2. 10)

$$E(X-m)^2 = E\left(X^2\right) - 2mE(X) + m^2$$

$$= E\left(X^2\right) - 2m^2 + m^2 = E\left(X^2\right) - m^2$$

ونجد من مثال (3 ـ 2 ـ 2 أ) **(4)** أن:

$$m = E(X) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b x\,dx = \frac{b+a}{2}$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{(b-a)}\tfrac{1}{3}\left(x^3\right)_a^b = \tfrac{1}{3}\frac{\left(b^3-a^3\right)}{(b-a)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + ba + a^2\right)$$

$$\therefore E(X-m)^2 = E\left(X^2\right) - m^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(b^2 + ba + a^2\right) - \frac{(b+a)^2}{4} = \tfrac{1}{12}(b-a)^2$$

مثال (3 ـ 2 ـ 2 جـ): إذا كان المتغير العشوائى X يأخذ القيم:

$$x_i = (-1)^i\, 2^i/i \qquad ; \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots$$

باحتمالات

$$P_i = \Pr\left(X = x_i\right) = \frac{1}{2^i}$$

فإن توقع المتغير X يكون غير موجود بالرغم من أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -\ln 2$$

أى أن $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i < \infty$ ولكن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

ولهذا فإن E(X) غير موجود لعدم تحقق العلاقة (3. 2. 8d).

المــثال السابق يوضح أن الطرف الأيمن من العلاقة (3. 2. 8c) لا يعرف بأنه توقع المتغير X إلا إذا تحققت العلاقة (3. 2. 8d).

مــثال (3 ــ 2 ــ 2 د): إذا كــان المتغير العشوائى X له توزيع كوشى المعطى بالعلاقة (2. 23. 12) ــ (عندما $\lambda = 1 , \alpha = 0$) ــ أى أن دالة كثافة احتماله هى:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \; ; \; -\infty \le x \le \infty$$

فأوجد توقع المتغير X.

(الحل)

توقــع المتغير X من المفروض أن نحصل عليه من التكامل التالى (عندما يكون هذا التكامل موجود):

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(1 + x^2)}$$

وهذا التكامل غير صحيح Improper لوجود ∞ فى كلا طرفى علاقة التكامل لذا يمكن الحصول عليه بإحدى طريقتين أو مفهومين هما:

(1) المفهوم الأول:

$$I = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x\,dx}{(1 + x^2)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to \infty} \left[\ln(1 + x^2)\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to \infty} \left[\ln(1 + a^2) - \ln(1 + a^2)\right] = 0$$

والتكامل بهذه الطريقة يسمى بـ "القيمة الرئيسية لكوشى" أو "القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى" ـ Cauchy Principal Value ـ وهو فى هذا المثال موجود لأن قيمته تساوى 0.

وعلى ذلك لو عرفنا التوقع بالعلاقة (3. 2. 8e) على أن يأخذ التكامل بمفهوم "القيمة الرئيسية لكوشى" ـ فإن التوقع يكون موجود فى هذا المثال ـ ولكن فى الحقيقة التوقع معرف بالعلاقة (3. 2. 8e) على أن يأخذ التكامل بالمفهوم التالى وهو المفهوم العادى للتكامل:

(2) المفهوم الثانى:

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b}\frac{x\,dx}{(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-a}^{b}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}}\left[\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ln(\infty)-\ln(\infty)\right]$$

وهذه كمية غير محددة ـ إذن التوقع غير موجود. وعلى هذا فإن التوقع لا يكون موجود إلا إذا كان التكامل المعطى بالعلاقة (3. 2. 8e) موجود بالمفهوم العادى وليس بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى.

ملاحظة (3 ـ 2 ـ 2 أ): [عندما يكون التوقع موجود (Exists) تكون قيمته عند حساب التكامل بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى (Cauchy Principal Value) هى نفس قيمته عند حساب التكامل بالطريقة العادية ـ وبهذا تكون النتيجة فى الجزئين (1) و(2) من المثال السابق واحدة ـ وبالتالى يكون من المسموح به إيجاد التوقع بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى عندما يكون موجود].

ملاحظة (3 ـ 2 ـ 2 ب): فى تعريف التوقع ـ سواء تعريف (3 ـ 2 ـ 1) أو (3 ـ 2 ـ 2) ـ اشترطنا أن يكون التكامل (أو المجموع) متقاربان تقارب مطلق ـ لأننا لو أخذنا التكامل بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى سنجد فى بعض التوزيعات الاحتمالية ـ التى من مثل نوع التوزيع الموجود فى المثال السابق ـ أن توقع المجموع ليس من الضرورى أن يساوى مجموع التوقعات ـ أى أن الخاصية (3. 2. 11) ليس من الضرورى أن تتحقق دائماً ـ وهذا من ضمن الأسباب التى من أجلها روعى فى تعريف التوقع ضرورة تحقق الشروط (3. 2. 8d) و(3. 2. 8f) مع مراعاة أن يكون التكامل متقارباً تقارب مطلق وليس محسوباً بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى. وقد بين "فريشيت" "Fréchet, 1937" أن توقع مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين أحدهما مقدار ثابت ليس من الضرورى أن يساوى مجموع توقعيهما إذا اعتبرنا أن القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى هى التوقع

فـــى تعـــريف (3 ــ 2 ــ 1) أو (3 ــ 2 ــ 2). إذ قــدم "فريشيت" دالة كثافة احتمال معينة لمتغـــير عشـــوائى X وبيـــن أن $E(|x|)$ غير موجود ولكن إذا عرفنا التوقع بأنه القيمة الرئيسية بمفهوم كوشى للتكامل المعطى بالعلاقة (3. 2. 8e) فإن التوقع يكون موجود ــ ثم بـــأخذ مقدار ثابت c كمتغير عشوائى X ــ أى X = c ــ أثبت "فريشيت" أن توقع مجموع متغيريـــن عشوائيين ليس من الضرورى أن يساوى مجموع توقعى المتغيرين إذا اعتبرنا أن التوقع هو القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى. والملاحظة التالية تلقى الضوء على هذا الموضوع.

ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 جـ):

(أ) لقــد اشـــترطنا، ســـواء فى تعريف (3 ــ 2 ــ 1) أو تعريف (3 ــ 2 ــ 2)، أن تكون التكاملات التى نعرف بها التوقع متقاربة تقارب مطلق ــ وسوف نوضح المبرر الذى وضع من أجله هذا الشرط لإظهار أهميته ــ وذلك بتقديم مثال مبسط كما يلى:

إذا كـــان X متغـــير عشوائى مستمر دالة كثافة احتماله f(x) ــ وعرفنا توقع X حســب مفهوم القيمة الرئيسية لكوشى ــ بدلاً من اشتراط أن يكون التكامل متقارباً تقارب مطلق ــ أى اعتبرنا أن:

$$(3.\ 2.\ 15):\ E(X)=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}x\,f(x)dx$$

إذا فعلنا ذلك سنجد أنه ليس من الضرورى أن تتحقق العلاقة:

$$E(X+c)=E(X)+c$$

لأى ثابت c وذلك كما يلى:

إذا كـــان X متغـــير عشوائى له دالة كثافة احتمال زوجية f(-x) = f(x) ــ سنجد باســتخدام تعــريف التوقع المعطى بالعلاقة (3. 2. 15) أن E(X) موجود ويساوى الصفر وذلك لأن $\int_{-a}^{a}x\,f(x)dx$ يساوى صفر لجميع قيم a حيث أن xf(x) يعتبر دالة فردية. كما أن:

$$(3.\ 2.\ 16):\ E(X+c)=\int_{-\infty}^{\infty}(x+c)f(x)dx$$

وبوضع x + c = y

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(y-c)dy$$

وبإيجاد التكامل السابق حسب مفهوم القيمة الرئيسية لكوشى نجد أن:

$$(3.\,2.\,17):\; E(X+c)=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} y\,f(y-c)\,dy$$

وبفـــرض أن $c>0$ ثم العودة بوضع $x=y-c$ يمكن وضع التكامل السابق فى الصورة التالية:

$$\int_{-a}^{a} y\,f(y-c)\,dy=\int_{-a-c}^{a-c}(x+c)f(x)\,dx=\int_{-a-c}^{a-c} x\,f(x)\,dx+c\int_{-a-c}^{a-c} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-a-c}^{a+c} x\,f(x)\,dx-\int_{a-c}^{a+c} x\,f(x)\,dx+c\int_{-a-c}^{a-c} f(x)\,dx$$

وعندما $a\to\infty$ فى العلاقة السابقة نجد أن التكامل الأول فى الطرف الأيمن ــ وهو $E(X)$ ــ يساوى الصفر والتكامل الأخير يساوى الواحد الصحيح وبالتالى فإن العلاقة (17 .2 .3) تصبح

$$E(X+c)=0-\lim_{a\to\infty}\int_{a-c}^{a+c} x\,f(x)\,dx+c$$

وبما أن $E(X)=0$ إذن يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$E(X+c)=E(X)+c-\lim_{a\to\infty}\int_{a-c}^{a+c} x\,f(x)\,dx$$

فإذا كان التكامل الموجود فى العلاقة السابقة لا يساوى الصفر ــ كان معنى ذلك أن:

$$E(X+c)\neq E(X)+c$$

(ب) مما سبق يتضح ما يلى:

إن تعريف التوقع $E(X)$ بالعلاقة (15 .2 .3) ــ (التى نأخذ فيها التكامل بمفهوم قيمة كوشـــى الرئيسية ولا نشترط أن يكون متقاربا تقاربا مطلقا) ــ يترتب عليه إمكانية وجود متغـــير عشوائى X وثابت c بحيث يكون $E(X+c)\neq E(X)+c$ ــ ولكى نثبت ذلك يكفـــى إثـــبات أنه من الممكن أن نجد دالة كثافة احتمال زوجية $f(.)$ وثابت $c>0$ بحيث يكون:

$$(3.2.18):\ \lim_{a\to\infty}\int_{a-c}^{a+c} x f(x)dx \neq 0$$

وتمرين (3 ــ 33) (هــ) يعتبر مثال على هذه الحالة.

ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 د): إذا كان المتغير العشوائى له توزيع متماثل وتوقعه موجود فإن هذا التوقع يكون هو مركز التماثل ــ أنظر ملاحظة (3 ــ 5 ــ 3 ب) وبند (2 ــ 12 ــ 4).

ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 هــ): من (2. 6. 6b) نجد أن أى متغير عشوائى مدمج يكون توقعه مساوياً نقطة احتماله الوحيدة.

(3 ــ 2 ــ 3) الوسط الهندسى والوسط التوافقى:

The Geometric and the Harmonic Means:

الوسط الهندسى والوسط التوافقى من المتوسطات الشائعة التى نقدمها للطالب فى دراسته لمبادىء الإحصاء. ولكنها تقل فى الأهمية عن الوسط الحسابى فى النظرية الإحصائية والإحصاء الرياضى وذلك لعدة اعتبارات بعضها رياضى يتعلق بصعوبة التعامل معهما رياضياً وبعضها إحصائى يتعلق بأهمية الدور الذى يلعبه الوسط الحسابى (أو التوقع) فى دراسة نظرية العينات كما سيتضح فيما بعد.

فى دراستنا لمبادىء الإحصاء نعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم $x_1, \ldots, x_n$ عددها n بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم ــ ولا يُعرَّف الوسط الهندسى إذا كان أحد هذه القيم صفر أو سالب. ويعرف الوسط الهندسى المحسوب من جدول تكرارى بالمعادلة (3. 1. 3) السابقة. وقياساً على ذلك يمكن تعريف الوسط الهندسى g_x للمتغير العشوائى X بالعلاقة التالية:

$$(3.2.19):\ \ln g_x = \sum_i \ln(x_i)P(x_i)$$

إذا كان X متغير عشوائى متقطع يأخذ القيم x_i بدالة احتمال $P(x_i)=Pr(X=x_i)$ و $\ln g_x$ هو اللوغاريتم الطبيعى للوسط الهندسى. أو:

$$(3.2.20):\ \ln g_x = \int_x \ln(x)f(x)dx$$

إذا كان X متغير مستمر ودالة كثافة احتماله f(x). وذلك إذا كان المتغير العشوائى X متغير موجب أى أن X لا يأخذ القيمة صفر أو أى قيمة سالبة ــ سواء كان X متغير مستمر أو متقطع ــ وبشرط أن يكون المجموع فى (3. 2. 19) أو التكامل فى (3. 2. 20) موجود كما سبق تقديم ذلك عند دراسة التوقع فى تعريف (3 ــ 2 ــ 1). وإذا

كـــان أحد قيم المتغير X سالبة أو تساوى الصفر فلا يمكن إيجاد الوسط الهندسى وبالتالى نســـتخدم الوسط الحسابى أو أى متوسط آخر بدلاً منه. كذلك قياساً على العلاقة (3. 1. 5) والـــتى نعـــرف بهـــا الوسط التوافقى المحسوب من جدول تكرارى يمكن تعريف الوسط التوافقى H_x كما يلى:

$$(3.2.21):\ \frac{1}{H_x} = \sum_i \left(\frac{1}{x_i}\right) P(x_i) \qquad \text{إذا كان X متغير متقطع}$$

$$= \int_x \frac{1}{x} f(x)dx \qquad \text{إذا كان X متغير مستمر}$$

وذلك بشرط أن $X \neq 0$ وأن يكون كلٍ من المجموع والتكامل السابق موجود.

مثال (3 ـ 2 ـ 3 أ): إذا كان X متغير عشوائى مستمر له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \ ;;\ a \le X \le b \ ,\ a > 0$$

أوجـــد الوســـط الهندسى g_x والوسط التوافقى H_x وقارنهما بالوسط الحسابى m عندما تكون $a = 2$، $b = 4$.

(الحل)

$$\ln g_x = \int_a^b \ln(x) \frac{dx}{(b-a)}$$

بإيجاد التكامل بالتجزىء نجد أن:

$$= \frac{1}{(b-a)}\left[b \ln b - a \ln a - (b-a)\right]$$

$$\ln g_x = \sqrt[(b-a)]{b^b a^{-a}} - 1$$

لاحـــظ أن $a > 0$ وهذا يضمن أن قيم X كلها موجبة مما يمكن معه إيجاد قيمة g_x حسب التعريف فلو كانت a سالبة أو تساوى الصفر لما أمكن إيجاد ln(a).

كما أن الوسط التوافقى هو:

$$\frac{1}{H_x} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{1}{(b-a)} \ln(x)\Big|_a^b = \ln \sqrt[(b-a)]{\frac{b}{a}}$$

عندما a = 2، b = 4 يكون:

$$\ln g_x = \ln \sqrt[2]{4^4\, 2^{-2}} - 1 = 1.079$$

$$g_x = 2.943$$

$$\frac{1}{H_x} = \ln \sqrt[2]{\tfrac{4}{2}} = \ln \sqrt{2} = 0.3466$$

$$\therefore H_x = 2.885$$

ومن مثال (3 ـ 2 ـ 2 أ) (4) نجد أن

$$m = \frac{b+a}{2} = 3$$

وبمقارنة القيم الثلاثة نجد أن:

$$H_x = 2.885$$
$$g_x = 2.943$$
$$m = 3$$
$$\therefore H_x < g_x < m$$

فى الواقع يمكن إثبات أن:

الوسط التوافقى ≥ الوسط الهندسى ≥ الوسط الحسابى

$$(3.\,2.\,22):\ H_x \le g_x \le m_x$$

وذلــك بالنســبة لأى متغير عشوائى موجب حيث يمكن إيجاد الوسط الهندسى. ولإثبات العلاقة السابقة أنظر تمرين (3 ـ 26)

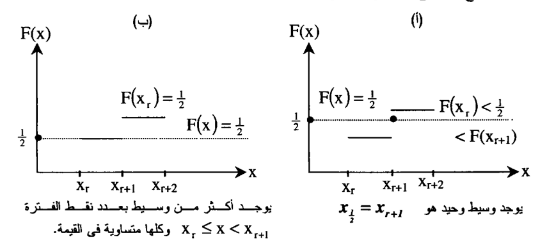
فى الواقع يعتبر الوسط الحسابى هو أهم المتوسطات الثلاثة التى ذكرناها، لذلك عــند ذكــر كلمــة متوســط دون تحديد نوع هذا المتوسط، يكون المقصود هو المتوسط الحســابى والــذى عادة نطلق عليه لفظ التوقع أو التوقع الرياضى ونسميه أحياناً بالعزم الأول حول الصفر كما سنوضح عند دراستنا للعزوم ونرمز له بعدة رموز من أهمها μ أو m أو $\bar{x}$ إذا كــان المتغــير X أو $\bar{y}$ إذا كان المتغير Y وهكذا. وإذا نظرنا للتوزيع الاحتمالى على أنه توزيع لكتلة من مادة وزنها الوحدة على القيم المختلفة للمتغير ــ وهو مــا يعــرف بالتمثــيل الميكانــيكى للاحــتمال ــ يكــون الــتوقع هــو مركــز الثقل (Center of Gravity) لهــذه الكتلة على محور المتغير. وهذه الخاصية تضفى على التوقع أهمية كبيرة كثابت نموذجى يمثل مركز التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى.

(3 ـ 2 ـ 4) الوسيط والكميات الترتيبية The Median & Quantiles:

الوسيط هو إحدى الثوابت أو القيم النموذجية التى تفيد فى تحديد خصائص الظاهرة أو المجتمع محل الدراسة. فإذا كانت x_0 إحدى قيم المتغير X التى تقسم الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير X إلى قسمين متساويين كل منهما يساوى $\frac{1}{2}$ فإن x_0 تسمى "وسيط" التوزيع، وبالتالى فإن الوسيط هو قيمة x التى تحقق المعادلة:

$$(3.2.23):\ F(x)=\tfrac{1}{2}$$

أى أن الوسيط هو أى جذر من جذور المعادلة السابقة حيث F(x) هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X. وجذور المعادلة السابقة يمكن الحصول عليها هندسياً من شكل الدالة F(x) برسم خط أفقى $y=F(x)=\frac{1}{2}$ يقطع منحنى الدالة F(x) عند نقطة (أو فترة) وقيمة x عند هذه النقطة (أو قيم x فى هذه الفترة) تكون هى وسيط التوزيع. فإذا كانت F(x) دالة توزيع لمتغير متقطع كما فى شكل (2 ـ 6 ـ 1) يكون من الممكن وجود فترة مشتركة عند تقاطع الخط المستقيم $y=F(x)=\frac{1}{2}$ مع منحنى الدالة F(x). ففى شكل (2 ـ 6 ـ 1) لو كان الخط المستقيم $y=F(x)=\frac{1}{2}$ يلتقى مع المنحنى F(x) عند النقطة $x=x_r$ فإن كل نقطة فى الفترة $x_r \le x < x_{r+1}$ تعتبر وسيط للتوزيع ـ أى يوجد فى هذه الحالة عدد لانهائى من القيم كل منها يساوى الوسيط أو أنه يوجد أكثر من وسيط للتوزيع ـ أما إذا كان الخط الأفقى $y=F(x)=\frac{1}{2}$ يقع بين الخطين $y=F(x_r)$ و $y=F(x_{r+1})$ فى شكل (2 ـ 6 ـ 1) فإن التوزيع يكون له وسيط وحيد فقط Unique Median هو $x_{\frac{1}{2}}=x_{r+1}$. ويمكن إبراز ذلك الجزء من رسم (2 ـ 6 ـ 1) الذى يوضح ذلك فى الشكلين التاليين:



شكل (3 ـ 2 ـ 4)

أمـــا إذا كان المتغير العشوائى X من النوع المستمر فإن دالة التوزيع الاحتمال F(x) تمـــثل منحنى مستمر غير متناقص كما فى الشكل (2 – 8 – 3 ب) وفى هذه الحالة توجـــد نقطة تقاطع وحيدة بين الخط $y = F(x) = \frac{1}{2}$ والمنحنى F(x) هذه النقطة الوحيدة تســـمى الوســـيط – وهـــو وســـيط وحيد – Unique Median للمتغير المستمر X أى أن المعادلة $F(x) = \frac{1}{2}$ يكون لها جذر وحيد فى هذه الحالة وعلى هذا يمكن تعريف الوسيط كما يلى:

تعريف (3 – 2 – 4 أ) الوسيط Median:

القيمة x التى تحقق المتباينات

$$(3.2.24):\ Pr(X \le x) \ge \tfrac{1}{2}\ \ ;;\ \ Pr(X \ge x) \ge \tfrac{1}{2}$$

تسمى "وسيط" المتغير X ونرمز لها بالرمز $x_{\frac{1}{2}}$.

والمتباينتين السابقتين يمكن التعبير عنهما بمتباينة مزدوجة واحدة هى:

$$(3.2.25):\ \tfrac{1}{2} \le F(x) \le \tfrac{1}{2} + Pr(X = x)$$

فـــإذا كـــان المتغير X من النوع المستمر فإن $Pr(X = x) = 0$ وبالتالى فإن المتباينة المزدوجة السابقة تتحول إلى المعادلة (3 .2 .23) السابقة وبذلك يمكن القول أنه إذا كان المتغير X من النوع المستمر فإن الوسيط يكون هو القيمة x التى تحقق المعادلة:

$$(3.2.26):\ F(x) = \tfrac{1}{2}$$

والوسيط فى هذه الحالة يكون قيمة وحيدة – أى وسيط وحيد.

مثال (3 – 2 – 4أ):

أوجد الوسيط لكل من التوزيعات التالية:

(أ) $P(x) = \binom{4}{x} \left(\tfrac{1}{4}\right)^x \left(\tfrac{3}{4}\right)^{4-x}\ ,\ x = 0,1,2,3,4$.

(ب) إذا كان X متغير عشوائى يمكن أن يأخذ إحدى القيمتين 0, 1 حيث $Pr(X = 1) = \tfrac{3}{4}\ ,\ Pr(X = 0) = \tfrac{1}{4}$.

(جـ) إذا كان X ممكن أن يأخذ القيم 0, 1, 2 حيث $P(0) = \tfrac{1}{8}\ ,\ P(1) = \tfrac{3}{8}\ ,\ P(2) = \tfrac{1}{2}$.

(د) $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}\ ;\ -\infty < x < \infty$.

(هـ) $f(x)=3x^2 \;;\; 0<X<1$.

(الحل)

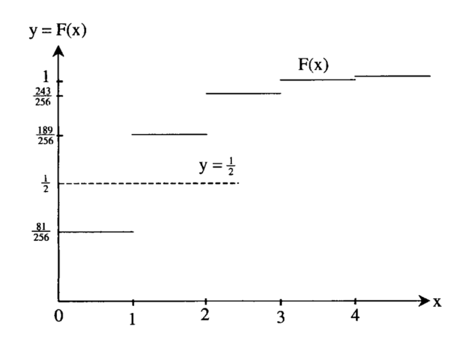
(أ) P(x) عند نقط الاحتمال $x = 0, 1, 2, 3, 4$ هي

$$P(0)=\left(\tfrac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$

$$P(1)=\binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256}$$

$$P(2)=\frac{54}{256}\ ,\ P(3)=\frac{12}{256}\ ,\ P(4)=\frac{1}{256}$$

وبرسم دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)=Pr(X \le x)$



من الرسم نلاحظ وجود وسيط وحيد عند النقطة $x_{\frac{1}{2}}=1$

وكذلك باستخدام العلاقة (24 .2 .3) نجد في الفترة $1\le x<2$ أن عندما $1<x<2$:

$$Pr(X \le x) = \frac{189}{256} > \tfrac{1}{2}$$

$$Pr(X \ge x) = 1 - Pr(X < x) = 1 - \frac{189}{256} = \frac{65}{256} < \tfrac{1}{2}$$

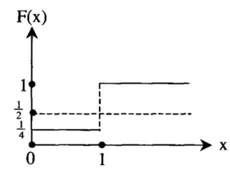
أى أن العلاقة (3.2.24) لا تتحقق.

ولكن عندما $(x = 1)$ فإن العلاقة السابقة تصبح

$$Pr(X \le x) = \frac{189}{256} > \tfrac{1}{2}$$

$$Pr(X \ge x) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} > \tfrac{1}{2}$$

إذن العلاقة (3.2.24) تتحقق عند نقطة وحيدة هى الوسيط (الوحيد) $x_{\frac{1}{2}} = 1$.



(ب) $Pr(X = 1) = \tfrac{3}{4}$, $Pr(X = 0) = \tfrac{1}{4}$

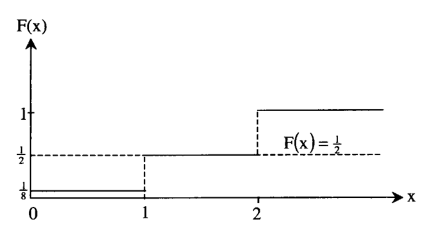
من الرسم واضح أن هناك وسيط وحيد هو $x_{\frac{1}{2}} = 1$.

وباستخدام العلاقة (3.2.24) نجد فى الفترة $x \ge 1$ أن:

$$Pr(X \le x) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) = 1 > \tfrac{1}{2}$$

$$Pr(X \ge x) = Pr(X = 1) = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}$$

إذن الفـترة $x \geq 1$ كلهـا تحقق العلاقة (3. 2. 24) ولكن X لا تزيد عن 1 إذن الوسـيط يكـون هـو القيمة الوحيدة $x_{\frac{1}{2}} = 1$ وباقى قيم الفترة $x \geq 1$ لا يعتبر أى منها وسيط.



(جـ) يمكن رسم منحنى الدالة F(x) فى الشكل التالى:

مـن الرسـم واضـح أن الخـط $F(x) = \frac{1}{2}$ ينطبق على منحنى F(x) فى الفترة $1 \leq x < 2$ إذن كل نقطة (كل قيمة) فى الفترة $1 \leq x < 2$ تعتبر وسيط.

كمـا أن باسـتخدام العلاقة (3. 2. 24) نجد أن كل قيمة x فى الفترة $1 \leq x < 2$ تعتبر وسيط ــ لأنه لكل قيمة x فى هذه الفترة نجد أن:

$$\Pr(X \leq x) = \tfrac{1}{2} \;,\; \Pr(X \geq x) = \tfrac{1}{2}$$

وهذا يحقق العلاقة (3. 2. 24).

(د) الدالة f(x) دالة زوجية ومتماثلة حول الصفر وبالتالى فإن: $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$ أى أن $F(0) = \frac{1}{2}$ وبذلـك يكون $x = 0$ هو الجذر الوحيد للمعادلة $F(x) = \frac{1}{2}$ إذن طبقا للعلاقة (3. 2. 26) يوجد وسيط وحيد هو $x_{\frac{1}{2}} = 0$.

(هـ) كما فى (د) يوجد وسيط وحيد هو جذر المعادلة

$$\tfrac{1}{2} = F(x) = \int_{0}^{x} 3Z^2\, dz = \left(Z^3\right)_0^x = x^3$$

إذن الوسيط هو

$$\therefore x_{\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

الوسيط هو حالة خاصة من مجموعة من البارامترات تسمى "بالكميات الترتيبية" "Quantiles" وتعرف كما يلى:

تعريف (3 ـ 2 ـ 4 ب) الكميات الترتيبية:

القيمة x التى تحقق المتباينات

$$(3.2.27):\ Pr(X \le x) \ge P \ ;\ Pr(X \ge x) \ge 1 - p \qquad (0 < P < 1)$$

تسمى "بالكمية الترتيبية" من الدرجة P ونرمز لها بالرمز x_p.

والمتباينات السابقة يمكن التعبير عنها بالمتباينة المزدوجة التالية:

$$(3.2.28):\ P \le F(x) \le P + Pr(X = x)$$

وفى حالة المتغيرات المستمرة تكون $Pr(X = x) = 0$ وبالتالى فإن "الكمية الترتيبية" من الدرجة P تكون هى قيمة x التى تحقق المعادلة:

$$(3.2.29):\ F(x) = P$$

ومن الممكن طبعاً فى بعض الأحيان أن أكثر من قيمة x تحقق العلاقات (3. 2. 27) أو (3. 2. 28) وفى هذه الحالة كل قيمة من هذه القيم تسمى "كمية ترتيبية" من الدرجة P. كما أن $x_{\frac{1}{4}}$ تسمى بالربيع الأدنى The Lower Quartile، $x_{\frac{1}{2}}$ هى الوسيط، $x_{\frac{3}{4}}$ تسمى بالربيع الأعلى The Upper Quartile كما أن الكميات $x_{0.1}$، $x_{0.2}$، $x_{0.3}$، ... تسمى بالعشيرات Deciles.

مثال (3 ـ 2 ـ 4 ب): إذا كان X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = e^{-x} \qquad ,\ 0 < x < \infty$$

أوجد "الكمية الترتيبية" من الدرجة $P = 0.4$ أى أوجد "الكمية الترتيبية" $x_{0.4}$.

(الحل)

من معادلة (3. 2. 29) تكون $x_{0.4}$ هى قيمة x التى تحقق المعادلة $F(x) = 0.4$ أى هى قيمة x التى تحقق المعادلة التالية:

$$0.4 = F(x) = \int_0^x e^{-y}\,dy = 1 - e^{-x}$$

$$\therefore e^{-x} = 0.6$$

$$-x = \ln(0.6) = -0.512$$

إذن الكمية الترتيبية $x_{0.4}$ هى: $x_{0.4} = 0.512$

يتضـــح ممـــا تقدم أن كل توزيع احتمالى يكون له وسيط واحد على الأقل. وفى بعـــض التوزيعات يوجد وسيط وحيد يمثل نقطة وحيدة محددة على محور المتغير كما فى كـــل الـــتوزيعات المستمرة وبعض التوزيعات المتقطعة، وفى بعض التوزيعات تكون كل نقطـــة فى فترة معينة على محور المتغير وسيط لهذا المتغير. فى حين أن التوقع لا يكون موجـــود دائماً إذ نجد كثير من التوزيعات الاحتمالية توقعها غير موجود. وعلى هذا فإن الوســيط يكـــون أفضل من التوقع فى تحديد خصائص التوزيعات الاحتمالية، وحتى فى الحالات التى يكون فيها التوقع موجود يكون الوسيط أفضل من التوقع أحياناً حيث أن قيمة التوقع ممكن أن تتأثر إلى حد كبير بالقيم المتطرفة (الشاذة) للمتغير والتى تكون بعيدة عن المـــنطقة الرئيسية لتركز قيم المتغير أى لتركيز التوزيع The Bulk of The Distribution ومـــع هذا فإن الوسط الحسابى (التوقع) يظل هو الأعظم أهمية عن غيره من المتوسطات فى الإحصاء الرياضى والنظرية الإحصائية المتقدمة وذلك لبعض الخصائص التى يتميز بهـــا فـــى دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية وخاصة تلك المسماة بتوزيعات المعاينة كما سيتضح ذلك فيما بعد.

(3 ـ 2 ـ 5) المنوال The Mode:

سبق أن عرفنا المنوال فى دراستنا لمبادىء الإحصاء بأنه القيمة الأكثر تكراراً ـــ أو القـــيمة الأكـــثر شـــيوعاً ـــ وســـنعرف المنوال الآن بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية فى النوعيـــن الأكثر أهمية وهما النوع المستمر والنوع المتقطع. فإذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغـــير مستمر X فإن أى نقطة x_0 تجعل دالة كثافة الاحتمال f(x) نهاية عظمى تسمى "مـــنوال" الـــتوزيع، وإذا كانت الدالة f(x) لها قمة واحدة يكون التوزيع له منوال وحيد ـــ ويســـمى توزيع وحيد القمة أو وحيد المنوال Unimodal Distribution، أما إذا كانت f(x) لها قمتين كان التوزيع له منوالين ويسمى Bimodal Distribution، وإذا كانت f(x) لها عدة قمـــم كان التوزيع متعدد القمم Multimodal Distribution. فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال f(x) دالة مستمرة وتفاضلية فإن القيمة x التى تحقق العلاقات التالية:

$$(3.\,2.\,30):\ \frac{d f(x)}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 f(x)}{d x^2} < 0$$

تسمى "منوال" التوزيع. وطبعاً من الممكن أن توجد أكثر من قيمة x تحقق العلاقة السابقة فيوجد أكثر من منوال. أما إذا كانت $\frac{df(x)}{dx}$ تساوى الصفر ولكن $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ فإن قيمة x التى تحقق هذه العلاقة تجعل الدالة f(x) نهاية صغرى ومثل هذه النقط نطلق عليها لفظ "المنوال المعكوس" Anti mode. أما بالنسبة للتوزيعات التى من النوع المتقطع فيمكن ترتيب نقط الاحتمال (أى قيم المتغير) x_i ترتيباً تصاعدياً ــ بالنظر إلى قيمة كل منها ــ والنقطة x_i التى تحقق العلاقة التالية:

(3. 2. 31): $P_i > P_{i-1} \quad , \quad P_i > P_{i+1}$

تسمى منوال التوزيع، وعلى ذلك فإن التوزيع المتقطع يمكن أيضاً أن يكون وحيد المنوال أو ثنائى المنوال أو متعدد المنوال. أما إذا كانت كل قيم x_i لها نفس الاحتمال ــ أى باحتمالات متساوية ــ فإنه لا يوجد فى هذه الحالة منوال للتوزيع، حتى فى التوزيعات المستمرة إذا كانت دالة كثافة الاحتمال ثابتة بالنسبة لجميع قيم المتغير فإنه لا يوجد منوال. وفى التوزيعات التى يتم تحديدها عددياً ــ مثل التوزيعات التكرارية ــ لا يمكن تحديد قيمة مضبوطة Exact للمنوال وإنما تتحدد قيمته بطريقة تقريبية ــ وهذه من أهم الصعوبات التى تواجهنا عند استخدام المنوال.

ملاحظة (3 ــ 2 ــ 5 أ):

(1) فى التوزيعات المتماثلة يكون المتوسط (إذا كان موجود) والوسيط متساويان ــ فإذا كان التوزيع المتماثل وحيد المنوال (سواء منوال عادى أو منوال معكوس) فإن:

المتوسط = الوسيط = المنوال

وإذا كان التوزيع وحيد المنوال ومتماثل حول نقطة ما X = a حيث $F(a+x) = 1 - F(a-x) + \Pr(X = x)$ كما فى (2 ــ 12 ــ 4) فإن: المتوسط = الوسيط = المنوال = a. أما إذا كان التوزيع متماثل ومتعدد المنوال سنجد أن الوسط = الوسيط ولكنهما قد يختلفان عن أى منوال للدالة ــ أنظر تمرين (3 ــ 4).

(2) وفى التوزيعات الملتوية غير المتماثلة تكون قيم المتوسطات الثلاثة مختلفة، ولكن توجد علاقة تجريبية استنبطها "كارل بيرسون" K. Pearson من التوزيعات المختلفة لبعض المتغيرات المستمرة ــ إذ لاحظ فى حالة التوزيعات الملتوية القريبة إلى حد ما من التماثل أن الوسيط يقع فى $\frac{1}{3}$ المسافة من الوسط الحسابى إلى المنوال ويكون أقرب إلى الوسط الحسابى أى أن:

(الوسط الحسابى - المنوال) يساوى تقريباً 3 (الوسط الحسابى - الوسيط)

ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلى:

$$(3.2.32):\ m - x_0 \simeq 3\left(m - x_{\frac{1}{2}}\right)$$

حيــث m هــو الوسط الحسابى و $x_{\frac{1}{2}}$ الوسيط و x_0 المنوال. وتمرين(6 ــ 21) يعطى توزيع احتمالى خاص تتحقق بالنسبة له العلاقة التقريبية (3.2.32).

(3) ويوجــد مقــياس آخر من مقاييس الموضع وإن كان قليل الاستعمال إلا أن له بعض الاســتخدامات فى نظرية المعاينة (التى سنقدمها فيما بعد) كما أنه سهل الحساب، هذا المقياس هو "منتصف المدى" Mid-range، وهو قيمة المتغير X التى تقع فى المنتصف تمامــاً بين أصغر قيمة وأكبر قيمة للمتغير، وهى بذلك تعتمد على القيمتين الطرفيتين للمتغــير وهاتيــن القيمتين كثيراً ما تكون إحداهما أو كلاهما تساوى $\pm\infty$ وهذا هو الســبب فى أن هذا المقياس غير مناسب لقياس الموضع فى كثير من التوزيعات التى لها قيم غير محدودة.

مثال (3 ــ 2 ــ 4 جـ): أوجد المنوال لكل من التوزيعات التالية:

(أ) $P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x\ ;\ x = 1,2,3,\ldots$

(ب) $f(x) = 12x^2(1-x)\ ;\ 0 < x < 1$

(جـ) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}\ ;\ 0 < x < \infty$

(د) $f(x) = \dfrac{1}{\beta(n,m)} x^{n-1}(1-x)^{m-1}\quad 0 \le x \le 1\ ,\ n > 0\ ,\ m > 0$

(الحل)

(أ) P(x) تكــون نهايــة عظمـــى عندما x = 1 حيث أن P(1) أكبر احتمال وبالتالى يكون المنوال هو $x_0 = 1$.

(ب) بوضع:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$12\left(2x - 3x^2\right) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \text{or} \quad x = \tfrac{2}{3}$$

ولكن عندما $x = 0$ تكون $f(x) = 0$ وعندما $x = \frac{2}{3}$ تكون $f(x) = \frac{16}{9}$ إذن f(x) تكون نهاية عظمى عندما $x = \frac{2}{3}$ وبالتالى فإن المنوال هو: $x_0 = \frac{2}{3}$.

(جـ)

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$x e^{-x}(2 - x) = 0$$

إذن $x = 0$ أو $x = 2$ أو $x = \infty$ ولكن عندما $x = 0$ أو $x = \infty$ تكـــون $f(x) = 0$ وعـــندما $x = 2$ تكون $f(x) = 2e^{-2} > 0$ إذن f(x) تكون نهاية عظمى عندما $x = 2$ ويكون المنوال: $x_0 = 2$.

(د) ضع:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{x^{n-2}(1-x)^{m-2}}{\beta(n,m)}[(n-1)(1-x)-(m-1)x] = 0$$

المقـــدار الســـابق فى الطرف الأيسر يساوى الصفر عندما $x = 0$ أو $x = 1$ بشـــرط أن تكـــون $(n > 2 , m > 2)$ ــ كذلـــك يســـاوى الصـــفر عـــندما $0 = [(n-1)(1-x)-(m-1)x]$ أى عـــندما $x = \frac{n-1}{n+m-2}$ بشـــرط أن تكـــون $(n > 1, m + n > 2)$. ولكـــن الحالة التى فيها $x = 0$ أو $x = 1$ تكون $f(x) = 0$ أى نهاية صغرى ــ إذن الدالة f(x) تكون نهاية عظمى عندما:

$$x = \frac{n-1}{n+m-2}, \ n > 1 \ , \ n + m > 2$$

وهذه هى قيمة المنوال للدالة f(x).

(3 ـ 3) مقاييس التشتت للمتغير العشوائى المفرد:

Measures of Dispersion for One-dimensional r.v.:

ذكــرنا فــى بداية بند (3 ـ 1) أن أى ظاهرة أو مجتمع إحصائى يمكن دراسته وتحديــد خصائصـــه عـــن طريق تحديد مجموعة من الثوابت أو القيم النموذجية تسمى بارامترات المجتمع. وبعد معرفتنا لقيمة نموذجية (أو لثابت من ثوابت المجتمع) فإننا غالباً نهــتم بحســاب بارامـــتر آخر يوضح مدى انتشار أو تركيز قيم المتغير حول هذه القيمة النموذجــية. والبارامـــتر الـــذى مـــن هـــذا الـــنوع يســـمى مقياس للانتشار أو التشتت Measure of Dispersion وأحـــياناً يســـمى مقـــياس التركيز Measure of Concentration. والتركـــيز هـــو عكس التشتت، فكلما زاد التركيز قل التشتت والعكس صحيح. فإذا كان البارامـــتر الذى لدينا هو المتوسط μ، فإن متوسط مربعات انحرافات قيم أى متغير عن متوسطه μ يستخدم كمقياس لدرجة تشتت (أو تركيز) هذا المتغير عن متوسطه، ويسمى هذا المقياس "بالتباين" "Variance"، وهو الذى نقدمه فى البند التالى.

(3 ـ 3 ـ 1) التباين والانحراف المعيارى :

The Variance & The Standard Deviation:

إذا كـــان X متغـــير عشوائى توقعه موجود ويساوى μ فإن تباين X باعتباره متوسط (أو توقع) مربعات انحرافات قيم X عن متوسطها μ ـ يساوى $E(X-\mu)^2$ ـ يمكن الحصول عليه من العلاقة (3. 2. 7) السابقة بوضع $g(x)=(X-\mu)^2$ حيث نحصل علـــى توقع مربعات انحرافات X عن متوسطها. وحيث أن تباين X هو متوسط مربعات انحرافات قيم X عن متوسطها لذا فإن وحدات قياس التباين هى مربعات وحدات قياس X فـــإذا كانـــت قيم X محسوبة بالسنتيمتر فإن تباين X يحسب بالسنتيمتر المربع. وعلى هذا يمكن تعريف التباين كما يلى:

تعريف (3 ـ 3 ـ 1 أ) التباين The Variance:

"متوسط مربعات انحرافات المتغير العشوائى X عن توقعه μ يسمى "بالتباين" وعادة نرمز له بالرمز μ_2 أو σ^2 أو $D^2(X)$ أو $V(X)$ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$(3.\,3.\,1a):\ V(X)=\int_x (x-\mu)^2 f(x)dx$$

إذا كان X متغير مستمر دالة كثافة احتماله f(x) أو

$$(3.\,3.\,1b):\ V(X)=\sum_x (x_i-\mu)^2 P_i$$

إذا كان X متغير متقطع و $P_i = Pr\left(X = x_i\right)$ هى دالة احتمال X.

وكمـــا يتضح من التعريف السابق ــ أن التباين مقياس لتشتت المتغير العشوائى حـــول توقعـــه ــ وعلى ذلك فكلما زاد تركيز قيم المتغير العشوائى حول توقعه كلما كان تباينه صغيراً.

ملاحظة (3 ــ 3 ــ 1 أ): التباين يعرف أيضاً بالعزم الثانى حول التوقع أو حول المركز أو العزم المركزى الثانى كما سيتضح عند دراسة العزوم فى البند (3 ــ 5).

لكل متغير عشوائى تباينه موجود ــ نجد من معادلات (3. 2. 10) أن:

$$(3.\,3.\,2):\; V(X) = E(X-\mu)^2 = E\left[X^2 - 2\mu E(X) + \mu^2\right]$$
$$= E\left(X^2\right) - \mu^2 = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

كذلك من معادلة (3. 2. 10b) ــ إذا كانت b, c أى مقداران ثابتان فإن:

$$(3.\,3.\,3):\; V[aX+b] = E\left[(aX+b)^2\right] - [E(aX+b)]^2$$
$$= a^2E\left(X^2\right) - a^2E^2(X) = a^2V(X)$$

إذن من العلاقة السابقة عندما $a = 1$ نجد أن:

$$(3.\,3.\,4):\; V(X+b) = V(X)$$

وإذا كان X، Y متغيران مستقلان فيتضح من العلاقة (3. 2. 14) أن:

$$(3.\,3.\,5):\; V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

وذلك لأن:

$$V(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - [E(X+Y)]^2$$
$$= E\left[X^2 + Y^2 + 2YX\right] - \left[E^2(X) + E^2(Y) + 2E(XY)\right]$$

ومن الاستقلال

$$= E\left(X^2\right) + E\left(Y^2\right) + 2E(X)E(Y) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y)$$
$$= \left[E\left(X^2\right) - E^2(X)\right] + \left[E\left(Y^2\right) - E^2(Y)\right] = V(X) + V(Y)$$

ويمكـــن تعمـــيم العلاقـــة (3. 3. 5) إلى حالة n من المتغيرات المستقلة فإذا كان $X_1,...,X_n$ متغيرات مستقلة عددها n و $a_1,...,a_n$ مقادير ثابتة فإن:

$$(3.\ 3.\ 6):\ V(a_1X_1+...+a_nX_n)=a_1^2\,V(X_1)+...+a_n^2V(X_n)$$

مثال (3 ــ 3 ــ 1): أوجد تباين التوزيع التالي:

$$P_i=\Pr(X=i)=\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}\qquad (i=0,1,2,...,n)$$

ــ وهو التوزيع المسمى بتوزيع ذو الحدين بمعلمتين n، p. وإذا كان X متغير له توزيع ذو حدين بمعلمتين $2,\frac{1}{2}$ و Y متغير آخر له توزيع ذو حدين بمعلمتين $3,\frac{1}{3}$ فقارن بين تشتت كل من المتغيرين.

(الحل)

$$E(X)=\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}=np[P+(1-P)]^{n-1}=nP$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{n}i^2\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}$$

بوضع $i^2=i(i-1)+i$

$$=n(n-1)P^2\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}P^{i-2}(1-P)^{n-i}$$

$$+nP\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}P^{i-1}(1-P)^{n-i}$$

$$E(X^2)=n(n-1)P^2+nP$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$=n(n-1)P^2+nP-n^2P^2=nP(1-P)$$

نلاحظ أن المتغيران X، Y لهما نفس التوقع حيث

$$E(X)=nP=2\times\tfrac{1}{2}=1$$

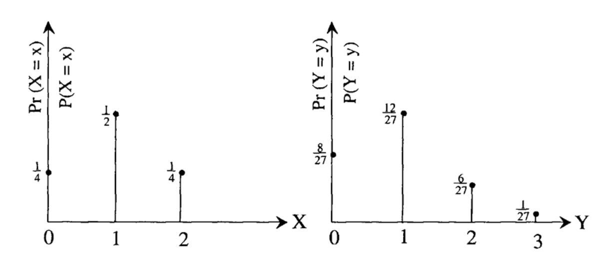
$$E(Y)=nP=3\times\tfrac{1}{3}=1$$

ولكنهما مختلفان فى التباين حيث

$$V(X)=nP(1-P)=2\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

$$V(Y)=3\times\tfrac{1}{3}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3}$$

إذن تبايـــن X أقـــل مـــن تباين Y وهذا يدل على أن قيم X (حول توقعها) أكثر تركـــيزاً مـــن قـــيم Y (حول توقعها) ويمكن رسم دالتى احتمال X، Y ومن الرسم يمكن ملاحظة درجة التركيز ـــ حيث نجد أن قيم X أكثر تركيزاً ـــ أى أقل تشتتاً.



مـــن الشكلين السابقين نرى أن التشتت حول التوقع للمتغير العشوائى X أقل من تشـــتت المتغـــير Y ـــ إذ واضح أن قيم Y أكثر انتشاراً حول توقعها من قيم X ـــ وهذا يوضح أهمية التباين كمقياس للتشتت.

مـــثال (3 ـــ 3 ـــ 2): أوجـــد تبايـــن المتغير X ذى التوزيع المسمى بتوزيع بيتا بمعلمتين n, m حيث دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\frac{1}{\beta(n,m)}X^{n-1}(1-X)^{m-1}\ ;\ 0\le X\le 1\ ;\ n>0\,,\ m>0$$

(الحل)

$$E(X)=\frac{1}{\beta(n,m)}\int_0^1 x\cdot x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx=\frac{\beta(n+1,m)}{\beta(n,m)}=\frac{n}{n+m}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{\beta(n,m)}\int_0^1 x^2 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$$

$$=\frac{1}{\beta(n,m)}\beta(n+2,m)=\frac{(n+1)n}{(n+m+1)(n+m)}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{nm}{(n+m+1)(n+m)^2}$$

ملاحظـــة (3 ــ 3 ــ 1 ب): مـــن (2. 6. 6b) نجـــد أن تباين أى متغير عشوائى مدمج يساوى الصفر.

تعريف (3 ــ 3 ــ 1 ب) الانحراف المعيارى Standard Deviation:

الجذر الموجب للتباين يسمى بـــ "الانحراف المعيارى".

وعـــادة نرمـــز للانحـــراف المعـــيارى بالرمز σ أو $\sqrt{\mu_2}$ أو $\sqrt{V(x)}$ أو $\sqrt{D^2(x)}$ وذلـــك إذا رمـــزنا للتبايـــن بالرمز σ^2 أو μ_2 أو $V(x)$ أو $D^2(x)$ على الترتيـــب. والانحـــراف المعـــيارى للمتغير X له نفس وحدات قياس X وذلك لأنه الجذر التربـــيعى (الموجب) للتباين ومادام التباين يقاس بمربع وحدات قياس X فإن جذر التباين يكـــون له نفـــس وحـــدات قياس X. وكثيراً ما نحتاج إلى قياس متغير معين بوحدات من انحرافه المعيارى ــ فإذا كان X متغير عشوائى توقعه μ وانحرافه المعيارى σ ــ فإننا كثـــيراً مـــا نحـــتاج إلى إيجاد المتغير $\frac{X-\mu}{\sigma}$ الذى يسمى بالمتغير القياسى وهو يمثل انحراف المتغير X عن متوسطه μ مقيساً بوحدات من انحرافه المعيارى σ.

تعـــريف (3 ــ 3 ــ 1 جـــ): إذا كـــان X متغير عشوائى توقعه μ وانحرافه المعيارى σ، فإن المتغير العشوائى Y المعرف بالعلاقة: $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ يسمى بالمتغير القياسى A Standardized r. v. حيث

$$E(Y)=0$$
$$V(Y)=1$$

التباين يتميز بالخاصية الهامة التالية: لأى قيمة ثابتة $c \neq E(X)$:

$$(3.3.7a):\ V(X) < E\left[(X-c)^2\right]$$

ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلى:

$$(3.3.7b):\ E\left[(X-c)^2\right] = E\left[(X-\mu+\mu-c)^2\right]$$

حيث $\mu = E(X)$

$$= E\left[(X-\mu)^2\right] + (\mu-c)^2 = V(X) + (\mu-c)^2$$

وحيث أن $(\mu-c)^2 > 0$ عندما $\mu \neq c$ إذن العلاقة (3.3.7) صحيحة.

والتوقع $E\left[(X-c)^2\right]$ يسمى بـ "الانحراف التربيعى المتوسط" The Mean Quadratic Deviation or The Mean Square Deviation للمتغير العشوائى X عن النقطة c، وعلى ذلك يكون التباين هو الانحراف التربيعى المتوسط عن النقطة $E(X)=\mu$ ، فإذا كان توقع المتغير X يساوى الصفر $(\mu=0)$ فإن $V(X)=E(X^2)$ يكون هو الانحراف التربيعى للمتغير X عن النقطة $\mu=0$ ــ أى أن $E(X^2)$ يقيس تشتت المتغير X عن النقطة $\mu=0$ ــ وكلما كان $E(X^2)$ صغيراً كلما كانت قيم X متركزة حول الصفر والتوقع $E(X^2)$ يسمى بـ "الوسط التربيعى" "The Mean Square" وعلى هذا فإن "الوسط التربيعى" لأى متغير عشوائى يعتبر مقياس لانحرافات هذا المتغير عن الصفر. وعموماً، الانحراف التربيعى المتوسط $E\left[(X-c)^2\right]$ هو أساس مبدأ المربعات الصغرى Principal of Least Squares الذى سنتعرض له فيما بعد ــ حيث أن الانحراف التربيعى المتوسط $E\left[(X-c)^2\right]$ يقيس درجة تركيز قيم X حول النقطة $X=c$ وكلما كان الانحراف التربيعى المتوسط صغيراً كلما كان التركيز كبيراً.

(3 ــ 3 ــ 2) الانحراف المتوسط The Mean Deviation:

الانحراف المتوسط مقياس آخر من مقاييس التشتت بالإضافة إلى التباين والانحراف المعيارى، ويعرف الانحراف المتوسط بالصيغة التالية:

$$(3.3.8a):\ \delta(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu| f(x)\,dx\,.$$

(إذا كان X متغير مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ وتوقعه μ)

$$(3.3.8b):\qquad =\sum \left| x-\mu \right| P(x).$$

(إذا كان X متغير متقطع دالة كثافة احتماله $P(x)$ وتوقعه μ)

والانحراف المتوسط $\delta(\mu)$ يسمى بالانحراف المتوسط حول المتوسط μ، كما يسمى أحيانا "بالانحراف المتوسط" اختصاراً للتعبير ــ ومن العلاقتين (3. 3. 8a)، (3. 3. 8b) نرى أن الانحراف المتوسط للمتغير X حول توقعه μ هو $E(|x-\mu|)$. ويمكن إيجاد الانحـــراف المتوســـط حـــول الوسيط $x_{\frac{1}{2}}$ بإيجاد التوقع $E\left(\left|x-x_{\frac{1}{2}}\right|\right)$ كذلك الانحراف المتوســط حول المنوال x_0 يكون $E(|x-x_0|)$، وهكذا يكون الانحراف المتوسط حول الــنقطة $x = c$ هو $E(|x-c|)$ ــ حيث c يمكن أن تكون الوسط الحسابى أو الهندسى أو الــتوافقى أو الوســيط أو المنوال أو أى قيمة أخرى. وتوجد خاصية هامة من خصائص الانحراف المتوسط يمكن تقديمها كما يلى:

يمكن إثبات أن $E(|x-c|)$ تحقق العلاقة التالية:

$$(3.3.9):\ E(|X-c|)=\begin{cases} E\left(\left|X-x_{\frac{1}{2}}\right|\right)+2\int_{x_{\frac{1}{2}}}^{c}(c-x)f(x)dx & \text{عندما } c > x_{\frac{1}{2}} \\ E\left(\left|X-x_{\frac{1}{2}}\right|\right)+2\int_{c}^{x_{\frac{1}{2}}}(x-c)f(x)dx & \text{عندما } c < x_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

وذلك إذا كان X متغير مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ ووسيطه $X = x_{\frac{1}{2}}$، كما يمكــن إثــبات نفس العلاقة السابقة إذا كان X متغير من النوع المتقطع، والعلاقة السابقة توضح الخاصية التالية التى يتميز بها $E(|X-c|)$ وهى:

[التوقع $E(|X-c|)$ يكون نهاية صغرى عندما تكون c مساوية للوسيط $x_{\frac{1}{2}}$].

وهذا واضح من العلاقة السابقة إذ نجد أن $E(|X-c|)$ فى الطرف الأيسر مساوياً للتوقع $E\left(\left|X-x_{\frac{1}{2}}\right|\right)$ فى الطرف الأيمن مضافاً إليه كميه موجبة، ولإثبات العلاقة السابقة أنظر تمرين (3 ـ 18) ومادام $E(|X-c|)$ يكون نهاية صغرى عندما تكون c هى الوسيط، إذن لو استخدمنا الوسيط كمقياس للموضع فيكون من الطبيعى أن نستخدم الانحراف المتوسط كمقياس للتشتت. كذلك مادام $E[(X-c)^2]$ يكون أقل ما يمكن عندما c تساوى التوقع كما يتضح من العلاقة (3. 3. 7b) إذن عند استخدام التوقع كمقياس للموضع يكون من الطبيعى استخدام التباين كمقياس للتشتت.

ملاحظة (3 ـ 3 ـ 2 أ): إذا كان المتغير X محدود ـ أى يوجد عددين حقيقيين a, b $(a<b)$ حيث $a<X<b$ و $F(x)=0$ لجميع قيم $x \le a$ و $F(a+\varepsilon)>0$ لجميع قيم $\varepsilon>0$ مهما كانت ε صغيرة كما أن F(x) = 1 لجميع قيم $x \ge b$ و $F(b-\varepsilon)<1$ حيث F(x) هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X ـ إذن الفترة $a \le X \le b$ تحتوى على كل توزيع المتغير X كما أن طول هذه الفترة (b – a) يسمى بـ "المدى" Range، وأحياناً يستخدم المدى كمقياس من مقاييس التشتت. والفترة $a \le X \le b$ تعطى أحياناً فكرة جيدة عن موضع وتشتت التوزيع. لذلك إذا كانت هذه الفترة لانهائية ـ أى أحد أو كلا طرفيها يساوى مالانهاية ـ فيمكن فى بعض الأحيان استخدام الفترة $\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma$ أو $x_{\frac{1}{4}} \le X \le x_{\frac{3}{4}}$ لإعطاء فكرة مبسطة (وأحياناً جيدة) عن توزيع المتغير X والكمية $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{4}}\right)$ تسمى "تصف المدى الربيعى" Semi - interquartile range وأحياناً تستخدم كمقياس للتشتت.

بقى أن ننوه أن الانحراف المتوسط عند التعامل معه رياضياً تواجهنا أحياناً بعض الصعوبات الناتجة عن التعامل مع القيمة الموجبة $|x-\mu|$ لذلك يمكن تقديم العلاقة التالية للانحراف المتوسط $\delta(\mu)$ التى لا تعتمد على القيمة الموجبة وهى:

$$(3.\ 3.\ 10):\ \delta(\mu)=2\int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)\,dF(x)=-2\int_{-\infty}^{\mu}(x-\mu)\,dF(x)$$

حيث F(x) هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X و $\mu=E(X)$، ولإثبات العلاقة السابقة أنظر تمرين (3 ـ 27).

(3 ـ 3 ـ 3) الفرق المتوسط The Mean Difference:

الفـرق المتوسط أحد مقاييس التشتت قدمه "جينى" عام 1912 ــ (1912) Gini. وسمى بهذا الاسم تمييزاً له عن الانحراف المتوسط ونرمز له بالرمز Δ ويعرف بالعلاقة التالية:

$$(3.3.11):\ \Delta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| f(x) f(x') dx\, dx'$$

إذا كان المتغير العشوائى من النوع المستمر.

أما إذا كان المتغير من النوع المتقطع فإن الفرق المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$(3.3.12):\ \Delta = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{J=-\infty}^{\infty} |x_i - x_J| P_i P_J \quad ; \quad i \neq J$$

ملاحظة (3 ــ 3 ــ 3 أ): يمكن حساب الفرق المتوسط من الجدول التكرارى كما يلى:

إذا كانـت مراكـز الفـئات عددهـا m ولـنرمز لها بالحروف $x_1, x_2, ..., x_m$ والـتكرارات المقابلـة لهـا $r_1, ..., r_m$ حيث $\sum_{1}^{m} r_i = n$ ــ فلو كونا الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وكانت تكراراته المتجمعة هى $R_1, ..., R_m$ ــ حيث $R_i = \sum_{J=1}^{i} r_J$ هو التكرار المتجمع المقابل لمركز الفئة x_i ــ $(r_1 = R_1 < R_2 < ... < R_m = n)$ ــ إذن إذا اسـتخدمنا العلاقـة (3.3.12) السـابقة مـع كتابة الدالة التجريبية $P_n^*(x_i) = \frac{r_i}{n}$ (المعطـاة بالعلاقة (2.22.2) والتى تحسب من الجدول التكرارى) بدلاً من دالة الاحتمال P_i ــ يمكـن بعد إجراء بعض العمليات الحسابية أن نضع العلاقة (3.3.12) فى الصورة التالية التى تصلح لحساب الفرق المتوسط من الجدول التكرارى:

$$(3.3.13a):\ \Delta = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{m-1} R_i (n - R_i)(x_{i+1} - x_i)$$

فإذا كانت الفئات متساوية وطول كل منها $(x_{i+1} - x_i) = c$ إذن:

$$(3.3.13b):\ \Delta = \frac{2c}{n^2}\sum_{i=1}^{m-1} R_i (n - R_i)$$

ملاحظة (3 ـ 3 ـ 3 ب): في حالة المتغير المستمر في (3. 3. 11) ـ يجب مراعاة أن الدالة f(x) هي نفسها الدالة $f\left(x'\right)$ لذلك استخدمنا رمز واحد للدلالة على هذه الدالة هو f(.) ولكن x و x' يمثلان قيمتان مختلفتان من قيم المتغير X. والفرق المتوسط يعطي متوسط الانحرافات المطلقة بين قيم المتغير بعضها البعض وليس الانحرافات عن قيمة مركزية، وهذا مما يجعل له قيمة نظرية، كما أن الفرق المتوسط يمكن أن يكون موجود في بعض الحالات التي لا يوجد فيها التباين وذلك لأن التكامل أو المجموع عند حساب Δ قد يكون تقاربي لاعتماده على $\left|x-x'\right|$ وهي خطية (من الدرجة الأولى) في حين أن التباين يعتمد على $(x-\mu)^2$ وهو مقدار درجة ثانية، وعلى أي حال إذا كان التوقع موجود يكون الفرق المتوسط موجود كذلك.

ولكن من ناحية أخرى يؤدي ظهور علامة القيمة الموجبة في الفرق المتوسط إلى صعوبة التعامل معه رياضياً ـ مثل الانحراف المتوسط تماماً ـ لذلك نقدم مقياس آخر للتشتت يعتمد على مربعات انحرافات القيم عن بعضها البعض بدلاً من الانحرافات المطلقة. والمقياس الذي نقدمه يسمى "متوسط الفرق المربع" وهو كما ذكرنا يعتمد على مربعات انحرافات القيم عن بعضها البعض دون استخدام علامة القيمة الموجبة. فإذا رمزنا له بالرمز θ^2 فإننا نعرفه بالعلاقة التالية:

$$(3.\ 3.\ 13):\ \theta^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-x'\right)^2 f(x)f\left(x'\right)dx\ dx'$$

إذا كان المتغير مستمراً

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{J=-\infty}^{\infty}\left(x_i-x_J\right)^2 P_i P_J\ \ ;\ (i\neq J)$$

إذا كان المتغير متقطعاً.

ويمكن إثبات أن "متوسط الفرق المربع θ^2" لأي متغير عشوائي X يساوي ضعف تباين المتغير ـ أي أن:

$$(3.\ 3.\ 14):\ \theta^2=2V(X)$$

وذلك لأن من العلاقة (3. 3. 13) نجد أن:

$$\theta^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2-2x\,x'+x'^2\right)f(x)f\left(x'\right)dx\ dx'$$

وبكتابة y بدلاً من x'

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy - 2\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)dy$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X^2) = V(X) + V(X) = 2V(X)$$

والعلاقـــة (14 .3 .3) توضح أن التباين يمكن تعريفه بأنه نصف "متوسط الفرق المـــربع θ^2" وبالـــتالى يمكن حسابه من العلاقة (13 .3 .3) التى تعتمد على انحرافات قيم المتغير عن بعضها ولا تعتمد على انحرافات قيم المتغير عن قيمة مركزية مثل التوقع كما فى العلاقة (1 .13 .3). ولما كان تقديم المعامل θ^2 الهدف منه هو التغلب على الصعوبات الـــتى تواجهنا فى حساب الفرق المتوسط Δ المتمثلة فى وجود القيمة الموجبة إلا أن هذا الـــتعديل أو التحســـين أوصلنا إلى التباين σ^2 فذلك يؤكد أن ميزان التفضيل بين الفرق المتوســـط Δ والانحـــراف المعـــيارى σ مازال فى صالح σ، وبذلك يظل الانحراف المعـــيارى أفضـــل مـــن الفرق المتوسط كمقياس للتشتت. كما يجب ملاحظة أن "متوسط الفـــرق المربع θ^2" لا يساوى "مربع الفرق المتوسط ــ Δ^2" ــ أى أن $\theta^2 \neq \Delta^2$. وإذا كـــان تقديـــم "متوسط الفرق المربع θ^2" يعتبر محاولة للتغلب على الصعوبة المتمثلة فى وجود القيمة الموجبة فى "الفرق المتوسط Δ "، إلا أن هذا أوصلنا إلى معامل جديد هو فى الواقـــع ضـــعف التباين، أى أننا بذلك تخلينا نهائيا عن Δ. ولكن فى الواقع يمكن إيجاد صـــورة أخـــرى غير السابقة لحساب Δتعتمد على دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير. فإذا كان X متغير عشوائى من النوع المستمر دالة توزيعه الاحتمالى F(x) وله توقع موجود، فإن الفرق المتوسط Δ يكون موجوداً كذلك. ويمكن إثبات أننا نستطيع الحصول عليه من العلاقة التالية بدلاً من العلاقة (11 .3 .3) التى تعتمد على القيمة الموجبة:

$$(3.\ 3.\ 15):\ \Delta = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\{1 - F(x)\}dx = 4\int_{-\infty}^{\infty} x\{F(x) - \tfrac{1}{2}\}d\,F(x)$$

أنظر تمرين (3 ــ 23).

من العرض السابق لمقاييس الموضع (أو المركز) ومقاييس التشتت وجدنا أكثر مـــن مقـــياس للموضع وكذلك أكثر من مقياس للتشتت والسبب فى وجود أكثر من مقياس للخاصـــية الواحـــدة الـــتى نرغب فى قياسها يرجع إلى الغموض الذى يكتنف تعريفنا أو مفهومـــنا للخاصـــية ذاتها. ولو كانت الخاصية محددة تحديداً لا يكتنفه الغموض لكان من

الطبيعى أن يكون هناك مقياس وحيد لقياسها. فمثلاً المركز أو الموضع كخاصية من خصائص التوزيع لو كان المقصود بها هو مركز الثقل حسب المفهوم الميكانيكى للتوزيع علـى أنـه كتلة من مادة وزنها وحدة الوزن لكان مركز الثقل له مقياس واحد لقياسه هو التوقع (الوسط الحسابى). ولكن لعدم تحديد المركز على هذه الصورة فإننا نستخدم لقياسه مقاييس أخرى مثل الوسط الهندسى والوسط التوافقى. كذلك التشتت هل المقصود به تشتت القيم عن بعضها أو تشتت القيم عن قيمة مركزية وما هى هذه القيمة المركزية كل هذا كان سبباً فى وجود أكثر من مقياس للتشتت. وفى الحقيقة كل مقياس من هذه المقاييس له مميزاته وعيوبه وقد يكون مقياس ما أجود بكثير من غيره فى حالة معينة ولكنه فى حالة أخرى يكون أقل جودة من غيره. لذلك فإننى لا أرى فائدة كبيرة من محاولة حصر مميزات وعيوب كل مقياس. ومع ذلك فإن كل مقاييس التشتت السابقة تشترك فى عيب معين وهى أنها تقيس التشتت بنفس وحدات قياس المتغير، فلو كان المتغير X يمثل التوزيع العمرى لمجموعة من الأشخاص فإن الانحراف المعيارى مثلاً يكون تمييزه بالسنوات ولو كان المتغير Y يمثل أطوال نفس المجموعة من الأشخاص يكون الانحراف المعيارى محسوباً بالسنتيمترات، وبالتالى فإننا إذا رغبنا فى مقارنة تشتت المتغير X بتشتت المتغير Y فإن ذلك لا يكون ممكناً باستعمال الانحراف المعيارى (أو حتى أى مقياس آخر سابق) وذلك لاختلاف التمييز لوحدات كل من المقياسين، فلا يمكن مقارنة سنتيمترات بسنوات. لذلك كان لابد من تقديم مقياس آخر للتشتت لا يعتمد على وحدات قياس المتغير وإنما يكون فى شكل وحدات مطلقة لا تمييز لها، هذا المقياس نسميه معامل الاختلاف ونقدم له أكثر من صيغة فى البند التالى.

(3 ـ 3 ـ 4) معامل الاختلاف Coefficient of Variation:

ذكرنا أن مقاييس التشتت التى عرضناها لها نفس تمييز قيم المتغير، لذلك عند المقارنة بين تشتتى مجتمعين لا تصلح مقاييس التشتت السابقة إلا إذا كان المجتمعان لهما نفس التمييز عند قياس قيم كلٍ منهما. لذلك لابد من البحث عن مقياس للتشتت يكون متحرراً من التمييز فى شكل وحدات مطلقة لاستخدامه لمقارنة التشتت فى حالة المجتمعات المختلفة التمييز. هذا المقياس هو ما نسميه بـ "معامل الاختلاف" وسنرمز له بالرمز V. وفى الواقع توجد أكثر من صيغة يمكن استخدامها لهذا الغرض ومن هذه الصيغ ما يلى:

(1) معامل اختلاف كارل بيرسون Karl Pearson's Coefficient of Variation:

وهو معرف بالعلاقة التالية:

$$(3.\ 3.\ 16):\ V = \frac{\sigma}{\mu}$$

أى يساوى الانحراف المعيارى مقسوماً على المتوسط μ، وهو أكثر معاملات الاختلاف استخداماً فى التطبيق. ثم يليه فى الأهمية المعامل التالى المعروف باسم:

(2) معامل التركيز لجينى Gini's Coefficient of Concentration:

وهو معرف بالعلاقة التالية:

$$(3.3.17):\ G=\frac{\Delta}{2\mu}$$

أى يساوى الفرق المتوسط Δ مقسوماً على ضعف المتوسط (2μ).

ويمكن إثبات أن:

$$(3.3.18):\ 0\le G\le 1$$

أنظـــر تمريـــن (3 ــ 60). كمـــا يوجـــد صيغ أخرى لمعامل الاختلاف لكنها قليلة الاستخدام منها ما يلى:

$$(3.3.19):\ \begin{cases}(a) & V=\dfrac{\delta(\mu)}{\mu}\\[2ex] (b) & V=\dfrac{\delta(x_{\frac{1}{2}})}{x_{\frac{1}{2}}}\end{cases}$$

الصيغة الأولى (a) هى الانحراف المتوسط حول الوسط μ مقسوماً على الوسط μ، والصيغة الثانية (b) هى الانحراف المتوسط حول الوسيط $x_{\frac{1}{2}}$ مقسوم على الوسيط $x_{\frac{1}{2}}$.

ملاحظة (3 ــ 3 ــ 4 أ):

ذكـــرنا أن معـــامل اختلاف بيرسون هو $V=\dfrac{\sigma}{\mu}$ كما فى العلاقة (3.3.16) فإذا كان التوقع $\mu=1$ فإن معامل اختلاف بيرسون يكون هو نفسه الانحراف المعـــــيارى σ، ومعـــنى هذا أن معامل الاختلاف يكون مقياس من مقاييس التشتت إذا كان المتغير يقاس بوحدات من توقعه.

مثال (3 ــ 3 ــ 4أ): فى التوزيع المنتظم التالى:

$$f(x)=1 \qquad\qquad 0\le x\le 1$$

أوجد:

(أ) الانحراف المتوسط حول الوسط الحسابى $\delta(\mu)$.

الانحراف المتوسط حول الوسيط $\delta(x_{\frac{1}{2}})$.

الانحراف المتوسط حول المنوال $\delta(x_0)$.

(ب) التباين σ^2 والانحراف المعيارى σ.

(جـ) الفرق المتوسط Δ ومتوسط الفرق المربع θ^2.

(د) معامل الاختلاف لبيرسون.

(هـ) معامل التركيز لجينى.

(الحـل)

(أ) التوقع $\mu = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

والوسيط هو حل المعادلة

$$\tfrac{1}{2} = F(x) = \int_0^x dx = x$$

إذن الوسيط هو $x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

وهذا التوزيع لا يوجد له منوال لأنه ليس له قمة. وحيث أن التوقع يساوى الوسيط إذن الانحـــراف المتوســـط حول التوقع $\delta(\mu)$ هو نفسه الانحراف المتوسط حول الوسيط $\delta\left(x_{\frac{1}{2}}\right)$. ومن علاقة (3. 3. 8) نجد أن:

$$\delta(\mu) = \int_0^1 \left|x - \tfrac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right) dx = \tfrac{1}{4}$$

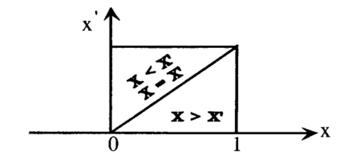
(ب) التباين σ^2:

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

الانحراف المعيارى σ

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.2887$$

(جـ) الفرق المتوسط Δ [من علاقة (3.3.11)]



$$\Delta = \int_0^1\int_0^1 |x - x'|\,dx\,dx'$$

$$\Delta = \int_{x=0}^{1}\left\{\int_{x'=0}^{x}(x - x')dx' + \int_{x'=x}^{1}(x' - x)dx'\right\}dx = \tfrac{1}{3}$$

كما يمكن إيجاد الفرق المتوسط Δ باستخدام علاقة (3.3.15) حيث نجد أن:

$$\because F(x) = x \quad ; \ 0 \le x \le 1$$
$$= 1 \quad ; \ x \ge 1$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

$$\therefore \Delta = 2\int_0^1 x(1 - x)dx = \tfrac{1}{3}$$

كذلك:

$$\Delta = 4\int_0^1 x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)dx = \tfrac{1}{3}$$

أمـــا متوســـط الفـــرق المربع θ^2 فهو كما ذكرنا قبل ذلك في العلاقة (3.3.14) يســـاوى ضـــعف التبايـــن، فـــلا داعى لحسابه باستخدام الصيغة (3.3.13) وإنما نحسبه باستخدام التباين:

$$\therefore \theta^2 = 2\sigma^2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

(د) من علاقة (3.3.16) نجد أن معامل الاختلاف لكارل بيرسون هو:

$$V = 0.5774$$

(هـ) من علاقة (3.3.17) نجد أن معامل التركيز لجينى هو:

$$G = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{1}{3}$$

سبق أن ذكرنا بعض العلاقات التى تربط بين بعض مقاييس الموضع مثل العلاقة (3.2.22) الـتى تـربط بين الوسط الحسابى μ والوسط الهندسى g_x والوسط التوافقى H_x وتنص على أن $H_x \le g_x \le \mu$ وكذلك العلاقة (3.2.32) التى توضح أن: الوسط الحسابى (التوقع) مطروحا منه المنوال $\simeq$ 3 (الوسط الحسابى - الوسيط)، كما يمكن إيجاد بعض العلاقات التى تربط بين بعض مقاييس التشتت، فيمكن إثبات أن:

الانحـراف المتوسـط حول الوسط الحسابى $\delta(\mu)$ أقل من أو يساوى الانحراف المعيارى σ:

$$(3.3.20): \delta(\mu) \le \sigma$$

والفرق المتوسط Δ أقل من أو يساوى $\sigma\sqrt{2}$

$$(3.3.21): \Delta \le \sqrt{2}\ \sigma$$

أنظر تمرين (3 ـ 20).

ولمـا كـان المتوسط μ هو أهم مقاييس الموضع على الإطلاق والتباين σ^2 أهم مقاييس التشتت وذلك من وجهة نظر الإحصاء الرياضى على الأقل لأهميتهما المتعاظمة فـى دراسة توزيعات المعاينة (كما سنرى فيما بعد عند دراسة توزيعات المعاينة) لذا كان من المفيد البحث عن أى علاقات بين μ و σ^2، ولكن فى الواقع لا توجد علاقات محددة تربط بين μ و σ^2، إذ أن المتوسط μ ليس من الضرورى أن يكون أكبر من أو يساوى σ^2 كمـا أنه ليس من الضرورى أن يكون أقل من أو يساوى σ^2. ولكن فى توزيعات معينة نجد أن $\mu \ge \sigma^2$ وفى توزيعات أخرى نجد أن $\mu \le \sigma^2$ وفى توزيعات غيرها نجد أن μ يمكـن أن تكـون أكبر من σ^2 أو تساويها أو تكون أقل منها (وذلك لقيم مختلفة للبارامـتر الـذى يعـتمد علـيه الـتوزيع). فمثلاً فى التوزيع ذو الحدين كما فى مثال (3 ـ 3 ـ 1) نجد أن:

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

(n عدد صحيح موجب، $q = 1-p$، $0 < P < 1$)

إذن $\mu > \sigma^2$

وفى التوزيع البواسونى كما فى مثال (3 ـ 2 ـ 2 أ) نجد أن $\mu = \lambda$ ويمكن إثبات أن التبايـــن $\sigma^2 = \lambda$ أى أن $\mu = \sigma^2$ فى التوزيع البواسونى. وفى توزيع جاما فى نفس المـــثال (3 ـ 2 ـ 2 أ) نجـــد أن $\mu = \frac{n}{\alpha}$ ويمكـــن إثـــبات أن التبايـــن $\sigma^2 = \frac{n}{\alpha^2}$ $(n > 0 \ , \ \alpha > 0)$ إذن:

$\mu < \sigma^2$ عندما $0 < \alpha < 1$ و $\mu = \sigma^2$ عندما $\alpha = 1$ و $\mu > \sigma^2$ عندما $\alpha > 1$.

مما سبق يتضح عدم وجود نمط محدد فى العلاقة بين μ و σ^2.

(3 ـ 4) متباينة "تشيبيتشيف" Chebychev's Inequality:

لقـــد قدم "تشيبيتشيف" (1867) ـ متباينة هامة يمكن بها أن نحدد الاحتمال المنتشر فـــى "ذيلي" أى توزيع احتمالى بطريقة تقريبية، وهذه المتباينة تبرز بوضوح أهمية الدور الذى يلعبه الانحراف المعيارى كمقياس للتشتت، وهى تأخذ الصيغة التالية:

إذا كـــان X متغير عشوائى توقعه μ وتباينه موجود (Exist) ويساوى $0 < \sigma^2$، فإن:

$$(3.4.1): \ \Pr\left(\left| X - \mu \right| \geq \lambda\sigma \right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

حيث λ أى ثابت موجب.

ويمكن الحصول على متباينة تشيبيتشيف كنتيجة للنظرية التالية:

نظرية (3 ـ 4 أ):

إذا كـــان Y متغـــير عشوائى غير سالب (أى يأخذ قيم غير سالبة فقط) وتوقعه E(Y) موجود و k أى ثابت موجب فإن:

$$(3.4.2): \ \boldsymbol{Pr\left(Y \geq k\right) \leq \frac{E\left(Y\right)}{k}}$$

(الإثبات)

ســـوف نثبـــت هـــذه النظرية فى حالة المتغير المستمر علماً بأن الإثبات فى حالة المتغير المتقطع يتم بأسلوب مشابه مع استبدال علامات التكامل بعلامات المجموع.

$$E\left(Y\right) = \int_0^\infty y f\left(y\right) dy = \int_0^k y f\left(y\right) dy + \int_k^\infty y f\left(y\right) dy$$

وبما أن $y \geq 0$ ، $k \geq 0$ إذن $\int_0^k y f(y)dy \geq 0$ و $E(Y) \geq \int_k^\infty y f(y)dy \geq k \int_k^\infty f(y)dy$

وبما أن:

$$\int_k^\infty f(y)dy = \Pr(Y \geq k)$$

إذن:

$$E(Y) \geq k \Pr(Y \geq k)$$

وهذا يثبت صحة المتباينة (3. 4. 2).

هـ. ط. ث.

وإذا فرضنا أن X متغير عشوائى توقعه $E(X) = \mu$ وانحرافه المعيارى σ و Y متغير عشوائى آخر حيث: $Y = (X - \mu)^2$ فإن المتغير Y يحقق فروض نظرية (3 ـ 4أ) السابقة حيث أن $Y \geq 0$ و $E(Y)$ موجود $E(Y) = E(X-\mu)^2 = \sigma^2$ فإذا وضعنا الثابت $k = \lambda^2 \sigma^2$ فإننا نحصل من العلاقة (3. 4. 2) على المتباينة التالية:

$$(3.\ 4.\ 3):\ \Pr\left[(X-\mu)^2 \geq \lambda^2\sigma^2\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

والمتباينة السابقة مكافئة تماماً للمتباينة (3. 4. 1) وهذا يثبت صحة متباينة تشيبيتشيف.

والمتباينة (3. 4. 2) تظل صحيحة حتى إذا استبدلنا المتغير المفرد Y بالمتغير المشترك المتعدد$(Y_1, ..., Y_n)$ لأى عدد n من المتغيرات العشوائية ويمكن إثبات ذلك بنفس طريقة الإثبات السابقة المستخدمة فى حالة المتغير المفرد.

فى الواقع متباينة (3. 4. 1) أول من اكتشفها هو "بنيامى" Bienaymé (1853) ثم اكتشفها بعد ذلك بطريقة مستقلة "تشيبيتشيف" (1867) لذلك تسمى أحياناً "بمتباينة بنيامى — تشيبيتشيف" "Bienaymé – Chebychev's Inequality".

فإذا كان X متغير عشوائى تباينه (موجود) ويساوى σ^2 وتوقعه μ فإن "متباينة تشيبيتشيف" توضح أن مقدار الاحتمال فى توزيع المتغير X الذى يوجد خارج الفترة $\mu - \lambda\sigma \leq X \leq \mu + \lambda\sigma$ يساوى على أكثر تقدير $\frac{1}{\lambda^2}$ وهذا يعطى فكرة جيدة عن كيفية استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للتشتت مما يوضح أهمية الدور الذى يلعبه الانحراف المعيارى كمقياس للتشتت. فنرى مثلاً من متباينة (3. 4. 1) فى التوزيعات ذات

التبايـــن المحـــدود أن مقدار الاحتمال المنتشر خارج الفترة $\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma$ لا يمكـــن أن يـــزيد عن $\frac{1}{9}$، وفى بعض التوزيعات قد يكون الاحتمال المضبوط خارج هذه الفـــترة يساوى الصفر، وفى هذه الحالة يكون الفرق بين الحد الأعلى الذى تقدمه متباينة "تشيبيتشـــيف" وبين مقدار الاحتمال المضبوط المنتشر خارج الفترة $\mu\pm3\sigma$ يساوى $\frac{1}{9}$، وبالـــتالى يـــثار التســـاؤل الـــتالى: هـــل يمكـــن تحسين الحد الأعلى الذى تقدمه متباينة "تشيبيتشـــيف" حـــتى يكون أكثر قرباً إلى الاحتمال المضبوط فى الفترة $|X-\mu|\geq\lambda\sigma$ وذلك لجميع قيم $\lambda>0$ ولجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود؟ أو بمعنى آخر هل يمكن إيجاد متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" لجميع قيم $\lambda>0$ وجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود؟ سنحاول الآن مناقشة ذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثال (3 ــ 4 أ): إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\tfrac{1}{4}\quad ;\quad -2<x<2$$

فإن:

$$E(X)=0\quad ,\quad V(X)=\tfrac{4}{3}\quad ,\quad \sigma=\tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

وعندما $\lambda=\frac{3}{2}$:

$$\Pr\left(|X-\mu|\geq\lambda\sigma\right)=\Pr\left(|X|\geq\sqrt{3}\right)$$

$$=1-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\tfrac{1}{4}dx=1-\tfrac{1}{4}\left(2\sqrt{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0.134$$

إذن 0.134 هو الاحتمال المضبوط لتحقق المتباينة $|X-\mu|\geq\lambda\sigma$ عندما $\mu=0$ و $\lambda=\frac{3}{2}$ و $\sigma=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ولكن من متباينة "تشيبيتشيف" (3. 4. 1) نجد أن الحد الأعلى للاحتمال الســـابق هو $0.44\dot{4}\simeq\left(\frac{1}{\lambda^2}=\frac{4}{9}\right)$ وهذا يوضح أن الاحتمال المضبوط فى هذه الحالة يقل عن الحد الأعلى الذى تقدمه المتباينة (3. 4. 1) بمقدار 0.31 تقريبا وهذا الفرق يعتبر كبيراً نسبياً، إذ أن الحد الأعلى أكثر من ثلاثة أمثال الاحتمال المضبوط، وإذا أخذنا $\lambda=\sqrt{3}$ ســـنجد أن الاحتمال المضبوط هو $\Pr\left(|X-\mu|\geq\lambda\sigma\right)=\Pr\left(|X|\geq2\right)=0$ فى حين أن الحد الأعلى $\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ الذى تقدمه متباينة "تشيبيتشيف" يساوى $\frac{1}{4}$ والفرق فى هذه الحالة أيضاً كبير نسبيا.

فـــى المـــثال الســـابق وجدنـــا اخـــتلافاً كبـــيراً نســـبياً بين الاحتمال المضبوط $\Pr(|X-\mu|\geq\lambda\sigma)$ والحـــد الأعلى الذى تقدمه متباينة (1 .4 .3) والسؤال الآن هل يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" لجميع قيم $\lambda>0$ وجميع المتغيرات العشـــوائية محـــدودة التبايـــن، أو بمعـــنى آخـــر هل يمكن تحسين الحد الأعلى لمتباينة "تشيبيتشـــيف"؟ فى الواقع المثال التالى يوضح أنه لا يمكن إيجاد متباينة تصلح لجميع قيم $\lambda>0$ ولجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" بـــدون وضـــع فـــروض (أو قيود) على توزيع المتغير العشوائى خلاف فرض أن يكون التباين محدود.

مـــثال (3 ــ 4 ب): إذا كـــان المتغير العشوائى X من النوع المتقطع ويأخذ القيم $x=-2,0,2$ باحتمالات $\frac{1}{8},\frac{6}{8},\frac{1}{8}$ على الترتيب سنجد أن:

$$\mu=E(X)=0 \qquad , \qquad \sigma=1$$

فإذا كانت $\lambda=2$ فإن:

$$\Pr(|X-\mu|\geq\lambda\sigma)=\Pr(|X|\geq 2)$$

$$=\Pr(X=-2 \text{ or } X=2)=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{4}$$

وهـــذا هو الاحتمال المضبوط، ومن متباينة (1 .4 .3) نجد أن الحد الأعلى لمتباينة "تشيبيتشيف" عندما $\lambda=2$ يساوى $\frac{1}{4}$ وهو نفس قيمة الاحتمال المضبوط فى هذه الحالة، وبالـــتالى فإنـــنا لا يمكـــن أن نحصل على متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" فى هذه الحالة حيث أن حدها الأعلى هو نفسه الاحتمال المضبوط.

وعمومـــاً فـــى مجموعة خاصة من المتغيرات العشوائية المتقطعة التى تتميز بأن تبايـــنها محـــدود إذا كان تباين المتغير يساوى σ^2 وتوقعه μ ونقط احتمال المتغير هى: $X=\mu-\lambda\sigma\ ,\ \mu\ ,\ \mu+\lambda\sigma$ ــ أى ثلاث نقط فقط ــ باحتمالات $\frac{1}{2\lambda^2}\ ,\ \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right),\ \frac{1}{2\lambda^2}$ على الترتيب فإن:

$$\Pr(|X-\mu|\geq\lambda\sigma)=\tfrac{1}{\lambda^2}$$

وهـــذا يوضح أنه لا يمكن فى هذه الحالة الحصول على متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشـــيف"، والحـــد الأعلـــى الـــذى تقدمه المتباينة فى هذه الحالة $\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ يصلح لتحديد الاحـــتمالات (ولكـــن هذا ليس صحيحاً فى جميع التوزيعات بصفة عامة) والمثال السابق

يعتـــبر حالة خاصة من التوزيعات التى يمكن الحصول بالنسبة لها على حد أعلى لمتباينة "تشيبيتشيف" يساوى الاحتمال المضبوط وذلك عندما $\lambda = 2$.

وقـــد ظهر بعد متباينة "تشيبيتشيف" عدد كبير من المتباينات من نفس النوع، نذكر فـــيما يلـــى أشـــهر هذه المتباينات، فمنها على سبيل المثال تلك المتباينة التى قدمها كارل بيرســـون K. Pearson (1919) والتى توضح أنه بالنسبة لأى متغير عشوائى X توقعه μ يكون:

$$(3.4.4):\ \Pr\left(\left|X-\mu\right| \ge k\, V_r^{\frac{1}{r}}\right) \le \frac{1}{k^r}$$

حيث $V_r = E\left(\left|X-\mu\right|^r\right)$ ، وذلك إذا كان V_r موجود حسب تعريف (3 – 2 – 1) عندما $g(x) = \left|X-\mu\right|^r$. والمتبايـــنة السابقة يمكن الحصول عليها من متباينة (3. 4. 2) عندما نضع:

$$Y = \left|X-\mu\right|^r \ ; \ K = k^r\, V_r$$

ومتبايـــنة "تشيبيتشـــيف" (3. 4. 1) تعتبر حالة خاصة من متباينة بيرسون (3. 4. 4) عـــندما r = 2 والقيد الذى نفترضه لصحة المتباينة (3. 4. 4) هو أن يكون $E\left(\left|X-\mu\right|^r\right)$ محدود.

والمتبايـــنات السابقة جميعها لا يمكن تحسين حدها الأعلى ليكون أكثر اقترابا من الاحـــتمال المضبوط فى التوزيعات الاحتمالية بصفة عامة إلا إذا فرضنا مزيداً من القيود علـــى الـــتوزيع الاحـــتمالى، فمـــثلاً قدم "جاوس" Gauss (1821) متباينة فى حالة المتغير العشوائى المستمر وحيد المنوال محدود التباين أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" وهى تأخذ الصورة التالية:

$$(3.4.5):\ \Pr\left(\left|X-x_0\right| \ge k\, V\right) \le \frac{4}{9k^2}$$

لجميع قيم $k > 0$ حيث x_0 هو منوال المتغير X و:

$$V^2 = E\left(X-x_0\right)^2 = V(X) + \left[x_0 - E(X)\right]^2$$

ومـــن متبايـــنـــة (3. 4. 5) يمكن الحصول على المتباينة التالية للانحـــراف عـــن المتوســـط μ:

$$(3.4.6):\ \Pr\left(\left|X-\mu\right|\geq\lambda\sigma\right)\leq\frac{4}{9}\cdot\frac{1+u^2}{\left(\lambda-|u|\right)^2}$$

لجميع قيم $\lambda > |u|$ حيث $u=\dfrac{\mu-x_0}{\sigma}$ ، x_0 و σ هما المنوال والانحراف المعيارى للمتغير X.

والمتباينة (3. 4. 6) أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" (3. 4. 1) حيث أن الحد الأعلى للمتباينة (3. 4. 6) أقل عادة من الحد الأعلى للمتباينة (3. 4. 1)، فعلى سبيل المثال إذا كانت $|u|=0.3$ فإن احتمال أن يزيد الانحراف عن المتوسط μ عن 3σ باستخدام المتباينة (3. 4. 6) يكون 0.06645 بينما هذا الاحتمال باستخدام متباينة "تشيبيتشيف" (3. 4. 1) يساوى 0.11111، أما إذا حسبنا احتمال الانحراف عن 4σ سيكون الاحتمالين المقابلين هما 0.03539 باستخدام (3. 4. 6) و0.0625 باستخدام (3. 4. 1) ــ والمتباينة التى قدمها "جاوس" (1821) ــ افترض للوصول إليها أن التباين محدود وأن التوزيع وحيد المنوال، فهى بذلك تعتمد على نفس الفرض الذى تتطلبه متباينة "تشيبيتشيف" (وهو أن يكون التباين محدود) بالإضافة إلى فرض إضافى هو أن يكون التوزيع وحيد المنوال، وهذا يوصلنا إلى متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف". وعموماً لا يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" بدون فرض المزيد من القيود على توزيع المتغير العشوائى أكثر من مجرد افتراض أن يكون التباين محدود وعموماً فى التوزيعات التى يكون فيها $E|X-\mu|^r$ موجود عندما $r>2$ يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة "تشيبيتشيف" ولمعرفة المزيد من هذه المتباينات يمكن الرجوع إلى "جودون" Godwin, H.J. (1964), (1955).

كما قدم "بيرج" "Berge" (1957) المتباينة التالية فى حالة المتغير الثنائى المشترك (X_1, X_2): لأى متغيرين عشوائيين X_1, X_2 حيث $V(X_1)=\sigma_1^2$ و $V(X_2)=\sigma_2^2$ ومعامل الارتباط بينهما ρ يمكن إثبات أن:

$$(3.4.7):\ \Pr\left(\left|X_1-E(X_1)\right|\geq\lambda\sigma_1\ \text{ or }\ \left|X_2-E(X_2)\right|\geq\lambda\sigma_2\right)\leq\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\lambda^2}$$

ثم قام "أولكن" و"برات" "I. Olkin, J.W. Pratt" (1958) بتعميم المتباينة السابقة إلى حالة $n>2$ من المتغيرات العشوائية المشتركة $(X_1, \ldots, X_n)$.

(3 ــ 5) العزوم (للمتغير المفرد) Moments (For One - dimensional r.v.):

يعتـــبر الـــتوقع والتبايـــن حالـــتان خاصـــتان من مجموعة أكبر من الثوابت أو البارامـــترات Parameters تســـمى بالعـــزوم ــ الـــتى ســـبق الإشارة إليها فى ملاحظة (3 ــ 2 ــ 1) كحالـــة خاصـــة من تعريف (3 ــ 2 ــ 1) ــ وتلعب العزوم دوراً هاماً فى التطبـــيقات الإحصـــائية. وتســـتخدم العـــزوم فى توصيف التوزيعات الاحتمالية وقياس خصائصها، وفى بعض الأحيان وتحت شروط معينة تفيد فى تحديد التوزيعات الاحتمالية. والعزوم ليست هى الثوابت الوحيدة التى تحقق هذه الأغراض وإنما توجد مجموعة أخرى من الثوابت (أو البارامترات) مفيدة فى هذا المجال تسمى بالمتراكمات والتى سوف نقدمها فيما بعد. ويمكن تعريف العزوم كحالة خاصة من تعريف (3 ــ 2 ــ 1) كما يلى:

(3 ــ 5 ــ 1) العزوم العادية Ordinary Moments:

تعريف (3 ــ 5 ــ 1 أ) العزم الرائى أو العزم ذو الدرجة The r[th] moment r:

إذا كانـــت الدالـــة $g(X) = X^r$ دالـــة تكاملية (أى تكاملها محدود) فى المدى $(-\infty \le X \le \infty)$ بالنســـبة لدالة التوزيع الاحتمالى F(x) حيث r عدد صحيح موجب فإنه ــ طبقاً لتعريف (3 ــ 2 ــ 1) ــ يعرف التوقع:

$$(3.\ 5.\ 1):\ \mu_r' = E\left(X^r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, d\, F(x)$$

بأنـــه "العـــزم العادى من الدرجة r" أو "العزم الرائى حول الصفر" للمتغير X أو للدالة F(x) أو العزم الرائى حول الصفر للتوزيع.

والـــتكامل السابق هو تكامل "ستيليتج" بالنسبة للدالة F(x) وهو يتحول إلى مجموع إذا كان المتغير X من النوع المتقطع أنظر.

ونقول أن العزم الرائى محدود أو موجود (Exists) طالما كانت الدالة x^r تكاملية فـــى المـــدى $-\infty \le X \le \infty$ بالنســـبة للتوزيع F(x)، والدالة x^r تكون تكاملية بالنسبة للـــتوزيع F(x) إذا تحققـــت العلاقة (3. 2. 6) عندما $g(x) = x^r$ ــ (ويمكن نظرياً توسيع التعريف السابق باعتبار أن r عدد مقيس غير سالب وليس مجرد عدد صحيح موجب) ــ فـــإذا كـــان التوزيع من النوع المتقطع فإن العزم الرائى μ_r' للمتغير العشوائى X يعرف بأنه:

$$(3.\ 5.\ 1a):\ \mu_r' = \sum_i x_i^r\, P(x_i)$$

وذلك إذا تحققت العلاقة

$$(3.5.1b):\ \sum_{i}|x_i|^r P(x_i) < \infty$$

حيث $P(x_i)$ هى دالة احتمال X.

أمـــا إذا كـــان التوزيع من النوع المستمر فإن العزم الرائى للمتغير العشوائى X يعرف بأنه:

$$(3.5.2a):\ \mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.5.2b):\ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^r f(x)dx < \infty$$

حيث f(x) هى دالة كثافة احتمال X.

وفـــى كلا النوعين لا يعتبر μ'_r موجـــود إلا إذا تحققـــت العلاقـــة (3. 5. 1b) أو (3. 5. 2b). ونرمـــز للعـــزم العـــادى بوضع شرطة أعلى الرمز μ تمييزاً له عن العزم المركـــزى الـــذى ســـنقدمه فيما بعد. والعزم الرائى μ'_r يسمى أيضاً بالعزم الرائى حول الصفر كما سنوضح فيما بعد لتمييزه عن العزم الرائى حول المركز والذى نرمز له عادة بالرمـــز μ_r بدون إضافة الشرطة. والعزم الرائى له نفس وحدات قياس المتغير مرفوعة للقـــوة r. والتوقع هو العزم الأول حول الصفر μ'_1 عندما r = 1. كما أن العزم μ'_0 (من الدرجة الصفر) دائماً موجود ويساوى الواحد الصحيح حيث أن:

$$(3.5.3):\ \mu'_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$

ويمكـــن باســـتخدام تكـــامل "ســـتيليتج" تقديم صيغة أخرى غير العلاقة (3. 5. 1) للحصول على العزم الرائى μ'_r عندما يكون هذا العزم موجود وذلك لأى متغير عشوائى X بدلالة دالة توزيعه الاحتمالى F(x) فى الشكل التالى:

$$(3.5.4):\ \mu'_r = r\left\{\int_{0}^{\infty} x^{r-1}[1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^{0} x^{r-1}F(x)dx\right\}$$

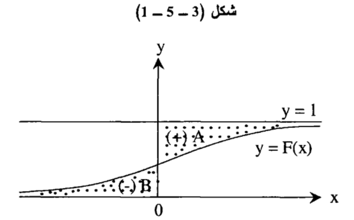
انظر تمرين (3 ــ 47).

ومـــن العلاقة السابقة يمكن الحصول على صيغة أخرى للتوقع بدلاً من العلاقـــة (3. 2. 8c) أو العلاقة (3. 2. 8e) وذلك عندما نضع $r = 1$ فى العلاقة (3. 5. 4) فيكون التوقع

$$(3.5.5):\ E(X) = \mu_r' = \int_0^{\infty}[1 - F(x)]dx - \int_{-\infty}^{0}F(x)dx$$

ومـــن الصيغة السابقة يمكن تمثيل التوقع هندسياً، حيث يتضح من هذه الصيغة أن التوقع يمكن تمثيله هندسياً من منحنى دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ إذ أنه يساوى المساحة المحصورة بين المحور الرأسى $x = 0$ والخط المستقيم $y = 1$ والمنحنى $y = F(x)$ فى الفترة $(0 \le x \le \infty)$ مطروحاً منها المساحة المحصورة بين المحور الأفقى $y = 0$ والمنحنى $y = F(x)$ والمحور الرأسى $x = 0$ فى الفترة $(-\infty \le x \le 0)$ كما يتضح من الشكل التالى:

شكل (3 – 5 – 1)



الـــتوقع $E(X)$ يســـاوى مساحة المنطقة المظللة A مطروحاً منها مساحة المنطقة المظللة B. ويجب أن ننبه القارئ أننا لن نستخدم الصيغة (3. 5. 4) للحصول على μ_r' إلا إذا كان μ_r' موجود، ولنفس السبب لن نستخدم الصيغة(3. 5. 5) للحصول على التوقع إلا إذا كـــان الـــتوقع موجـــود، حيث أن إثبات أى من هاتين الصيغتين يعتمد على أن العزم المشار إليه موجود.

بقـــى أن نشـــير إلـــى ملاحظة بسيطة بالنسبة للعزوم العادية، هى أننا نشير إليها بالرمـــز μ_r' حيـــث نضع الشرطة تمييزاً لها عن العزوم المركزية، ولكن بالنسبة للتوقع ســـنرمز له عـــادة بالرمز μ دون كتابة الدليل 1 أسفل الحرف μ ودون وضع شرطة أعلـــى هـــذا الحرف وذلك لعدم وجود أى خلط بين العزم الأول حول الصفر وهو التوقع والعزم الأول حول المركز والذى سنثبت فيما بعد أنه يساوى الصفر، وبذلك يكون الرمز المســـتخدم للـــتوقع رمـــز بسيط وسهل فى الكتابة وهذا يتناسب مع كثرة استخدامنا لدليل التوقع، كما أننا سنرمز له أحياناً أخرى بالرمز m.

(3 ـ 5 ـ 2) العزوم المطلقة The Absolute Moments:

إذا كان العزم الرائى μ_r' موجود فإن الدالة $g(x)=|x|^r$ تكون تكاملية فى المدى $-\infty \leq x \leq \infty$ بالنســبة لدالـــة الـــتوزيع الاحتمالى $F(x)$ طبقاً لتعريف (3 ـ 5 ـ 1) وبالتالى فإن التوقع:

$$(3.5.6):\ \nu_r' = E\left(|X|^r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, dF(x)$$

يعــرف بأنــه "العــزم المطلــق مــن الدرجـــة r" أو العــزم الــرائى المطلق "The r^{th} Absolute Moment" حيث $|x|$ هى القيمة الموجبة لـــ x.

وعلـــى هذا إذا كان X متغير عشوائى من النوع المتقطع ودالة احتماله $P(x_i)$ عند نقطة الاحتمال x_i فإن العزم الرائى المطلق:

$$(3.5.6):\ \nu_r' = E\left(|X|^r\right) = \sum_i |x_i|^r \ P(x_i)$$

وإذا كان X متغير عشوائى من النوع المستمر ودالة كثافة احتماله $f(x)$ فإن:

$$(3.5.7):\ \nu_r' = E\left(|X|^r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x)dx$$

والعــزم المطلــق ν_r' يكون هو نفس العزم العادى μ_r' إذا كانت r عدد زوجى. وكمـــا يتضح من العلاقتين (3. 5. 1b) و(3. 5. 2b) إذا كان العزم العادى μ_r' موجود فإن العزم المطلق ν_r' يكون موجود أيضاً، وبصفة عامة إذا كان μ_r' موجود فيمكن إثبات أن جميع العزوم العادية والمطلقة من الدرجة k تكون جميعها موجودة لجميع قيم $0 \leq k \leq r$ كما يتضح ذلك من النظرية التالية:

نظرية (3 ـ 5 ـ 2 أ):

إذا كـــان العزم الرائى μ_r' موجود فإن كل العزوم العادية والمطلقة من الدرجة k تكون موجودة لجميع قيم $0 \leq k \leq r$.

(الإثبات)

لجميع قيم $0 \leq k \leq r$ نجد أن:

$$|x|^k < |x|^r + 1$$

إذن:

$$\nu'_k = E\left(|X|^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF(x)$$

$$\therefore \nu'_k < \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + |x|^r\right] dF(x) < 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, dF(x) = 1 + \nu'_r$$

وحيث أن ν'_r موجود (لأن μ'_r موجود) إذن ν'_k موجود لجميع قيم $0 \le k \le r$.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (3 ـ 5 ـ 2 أ): هذه الملاحظة مكونة من جزئين هما:

(1) نقدم فيما يلى شرط كافى لوجود أى عزم من الدرجة $0 < k$ فى الصيغة التالية:

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى F(x) للمتغير العشوائى X تحقق الشروط التالية لأى عدد صحيح $0 < k$:

$$(3.\,5.\,8): \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^r F(x) < c \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^r \left[1 - F(x)\right] < c \end{cases}$$

حيث c مقدار ثابت ـ فإن أى عزم من الدرجة k يكون موجود لجميع قيم $r > k$.

(الإثبات)

ولإثــبات ذلك يكفى إثبات أنه فى حالة تحقق العلاقات (3. 5. 8) يكون تكامل $|x|^k$ بالنســبة لدالــة التوزيع الاحتمالى F(x) فى أى فترة محدودة $(a \le x \le b)$ أقل من ثابت معين c مثلاً لا يعتمد على a أو b وذلك كما يلى:

فى أى فترة $2^{J-1} \le x \le 2^J$ حيث J عدد صحيح موجب نفرض أن:

$$\text{(a)}\quad I_J(2) = \int_{2^{J-1}}^{2^J} |x|^k \, dF(x) \le 2^{Jk} \int_{2^{J-1}}^{2^J} dF(x)$$

$$= 2^{kJ}\left[F\left(2^J\right) - F\left(2^{J-1}\right)\right] \le 2^{kJ}\left[1 - F\left(2^{J-1}\right)\right]$$

وبفرض صحة العلاقة (3.5.8) فإنه يوجد ثابت محدود c حيث يكون:

$$\left(2^{J-1}\right)^r\left[1-F\left(2^{J-1}\right)\right]<c$$

$$\therefore\left[1-F\left(2^{J-1}\right)\right]<2^{r-Jr}\,c$$

من العلاقة السابقة والعلاقة (a) نجد أن:

$$I_J(2)<2^{kJ}\cdot 2^{r-rJ}\cdot c$$

وحيث أن r عدد محدود و c مقدار ثابت محدود إذن يمكن وضع $2^r\cdot c=c'$ حيث c' مقدار ثابت محدود وبالتالى فإن المتباينة السابقة تصبح:

$$\text{(b)}\ I_J(2)<2^{J(k-r)}\cdot c'$$

حيث c' ثابت (محدود) مستقل عن J.

كذلك فى أى فترة محدودة $-2^J\le x\le -2^{J-1}$ نفرض أن:

$$\text{(c)}\ I_J(-2)=\int_{-2^J}^{-2^{J-1}}|x|^k\,dF(x)\le 2^{Jk}\int_{-2^J}^{-2^{J-1}}dF(x)$$

$$=2^{Jk}\left[F\left(-2^{J-1}\right)-F\left(-2^{J}\right)\right]<2^{Jk}\,F\left(-2^{J-1}\right)$$

وبفـــرض صـــحة العلاقة (3.5.8) فإنه يوجد ثابت محدود c (وهو نفس الثابت c الذى سبق الإشارة إليه) حيث يكون:

$$\left|-2^{J-1}\right|^r F\left(-2^{J-1}\right)<c$$

وكمـــا ســـبق أن وضعنا $2^r\cdot c=c'$ حيث c' مقدار ثابت محدود كما سبق أن ذكرنا، فإن المتباينة السابقة تأخذ الشكل التالى:

$$F\left(-2^{J-1}\right)<2^{-Jr}\cdot c'$$

من العلاقة السابقة والعلاقة (c) نجد أن:

$$\text{(d)}\ I_J(-2)<2^{J(k-r)}\cdot c'$$

حيث c' ثابت (محدود) مستقل عن J.

كما أن:

$$\text{(e)}\ I=\int_{-1}^{1}|x|^k\,dF(x)\le\int_{-1}^{1}dF(x)=F(1)-F(-1)\le 1$$

ولكن لأى فترة محدودة $a\le x\le b$ يكون:

$$\int_a^b|x|^k\,dF(x)\le\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,dF(x)$$

$$\le\sum_{J=1}^{\infty}\int_{-2^J}^{-2^{J-1}}|x|^k\,dF(x)+\int_{-1}^{1}|x|^k\,dF(x)+\sum_{J=1}^{\infty}\int_{2^{J-1}}^{2^J}|x|^k\,dF(x)$$

من (a) و(c) و(e) يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلى:

$$\int_a^b|x|^k\,dF(x)\le\sum_{J=1}^{\infty}I_J(-2)+I+\sum_{J=1}^{\infty}I_J(2)$$

ومن (b) و(d) و(e) نجد أن:

$$\int_a^b|x|^k\,dF(x)<\sum_{J=1}^{\infty}2^{J(k-r)}\cdot c'+1+\sum_{J=1}^{\infty}2^{J(k-r)}c'<1+2\sum_{J=1}^{\infty}2^{J(k-r)}c'$$

حيث c' ثابت مستقل عن J ــ إذن:

$$\text{(f)}\ \int_a^b|x|^k\,dF(x)<1+2c'\sum_{J=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{J(r-k)}$$

عــندما تكــون $k<r$ يكــون المجموع الموجود فى الطرف الأيمن من المتباينة الســابقة محدود لأنه يمثل متوالية هندسية لانهائية حدها الأول $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{r-k}$ وأساسها $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{r-k}$ وبالتالى فإن مجموعها يساوى $\frac{1}{2^{(r-k)}-1}$ إذن العلاقة (f) تأخذ الصورة:

$$\text{(g)}\ \int_a^b|x|^k\,dF(x)<1+\frac{2c'}{2^{(r-k)}-1}$$

والطرف الأيمن فى العلاقة السابقة كمية محدودة حيث c' ثابت (محدود) كما ذكرنا و $r>k$ ــ كما أن الطرف الأيمن أيضاً مستقل عن a، b إذن:

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b |x|^k \, d\,F(x) < 1 + \frac{2c'}{2^{(r-k)}-1}$$

$$\therefore \nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, d\,F(x) < \infty$$

أى أن العزم المطلق ν'_k موجود وبالتالى μ'_k موجود لجميع قيم $r > k$.

ولكــن عــندما تكــون $r \le k$ يكون المجموع فى الطرف الأيمن من العلاقة (f) الســابقة ممــثلاً لمجموع متسلسلة لانهائية كل حد من حدودها أكبر من أو يساوى الواحد الصحيح وبالتالى فإن المجموع يكون غير محدود أى يساوى $+\infty$ وبالتالى فإن الشرط الكافى يسرى فقط عندما $r > k$. وبذلك نكون قد أثبتنا صحة الشرط الكافى الذى ذكرناه.

هـ. ط. ث

(2) فــى الواقــع توجد علاقة بين وجود العزوم واحتمال أن يأخذ المتغير العشوائى قيم مطلقة كبيرة ــ فإذا كان العزم الرائى μ'_r للمتغير العشوائى X موجود فإن:

$$(3.5.9):\ \lim_{a\to\infty} a^r \Pr(|X| > a) = 0$$

حيث $0 < a$.

ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلى:

$$I = \lim_{a\to\infty} a^r \Pr(|X| > a) = \lim_{a\to\infty} a^r \int_{|x|>a} d\,F(x)$$

حيث F(x) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X.

$$I \le \lim_{a\to\infty} \int_{|x|>a} |x|^r \, d\,F(x)$$

$$I \le \lim_{a\to\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, d\,F(x) - \int_{-a}^{a} |x|^r \, d\,F(x) \right]$$

وحيــث أن μ'_r موجود إذن ν'_r موجود كذلك ــ وبهذا يكون التكامل الثانى على الطــرف الأيمــن مــأخوذاً حســب قــيمة كوشــى الرئيســية (عــندما $a \to \infty$)

(Cauchy Principal Value) هو نفسه ν_r' (العزم الرائى المطلق) ــ ونحن نعرف كما فى ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 أ) ــ أن هذا مسموح به.

$$\therefore I \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, dF(x) - \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} |x|^r \, dF(x)$$

$$I \leq \nu_r' - \nu_r' = 0$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (3. 5. 9).

ملاحظــة (3 ــ 5 ــ 2 ب): إذا كــان المتغير العشوائى X له حد أدنى وحد أعلى ــ أى متغــير محــدود من كلا طرفيه Bounded ــ بمعنى وجود عددان محدودان a و b بحيث يكون $Pr(a < X < b) = 1$ ــ فإن كل عزوم المتغير X تكون محدودة Finite ــ وفى هذه الحالة يحقق العزم الرائى μ_r' المتباينة التالية:

$$|\mu_r'| \leq max \left(|a|^r \; or \; |b|^r\right)$$

حيث max تعبر عن أكبر القيمتين.

وذلك لأن:

$$|\mu_r'| = \left|\int_a^b x^r \, d\,F(x)\right| \leq \int_a^b |x|^r \, d\,F(x)$$

إذن عــندما $|b| > |a|$ تكون $|\mu_r'| \leq |b|^r$ ∴ وعندما $|b| < |a|$ تكون $|\mu_r'| \leq |a|^r$
وفى كلتا الحالتين نجد أن:

$$|\mu_r'| \leq max \left(|a|^r \; or \; |b|^r\right)$$

ملاحظة (3 ــ 5 ــ 2 جـ): إذا كان العزم العادى μ_r' للمتغير X موجود و r عدد زوجى فإنــه يســاوى العــزم المطلــق ν_r' ــ كمــا ســبق أن ذكرنا بعد تعريف ν_r' بالعلاقة (3. 5. 7) ــ وفــى هذه الحالة يكون العزم أكبر من الصفر ولا يساوى الصفر إلا إذا كان المتغــير العشــوائى X متلاشى (مدمج) كما فى (2. 6. 6b) واحتماله الكلى متركزاً عند النقطة X = 0 ــ أما العزم المطلق عندما يكون موجود فإنه لا يساوى الصفر أبداً إلا إذا كــان المتغــير العشوائى متلاشى واحتماله الكلى متركزاً عند النقطة X = 0 سواء كانت درجــته (r) زوجية أم فردية ــ وفى هذا يختلف عن العزم العادى الذى قد يكون موجود ويســاوى الصفر (عندما تكون درجته فردية) دون أن يكون المتغير العشوائى متلاشى وهذا واضح من تعريف كل من العزم العادى والعزم المطلق.

(3 ــ 5 ــ 3) العزوم حول نقطة والعزوم المركزية:

The Moments About A Point & The Central Moments:

إذا كانــت الدالــة $g(x)=(x-a)^r$ دالــة تكاملية فى المدى $(-\infty \le x \le \infty)$ بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالى F(x) ــ حيث a مقدار ثابت فإن:

$$(3.5.10):\ \mu'_r(a)=E[g(X)]=E[(X-a)]^r=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^r\, dF(x)$$

يعرف بأنه "العزم الرائى حول النقطة a" أو ببساطة "العزم الرائى حول a" للمتغير X. وعــندما a = 0 نحصل على العزم العادى μ'_r وعندما $g(x)=|x-a|^r$ نحصل على العزم المطلق حول النقطة a ــ $\nu'_r(a)$ ــ وعندما تكون النقطة a هى التوقع μ نحصل على العزم الرائى المركزى μ_r ويكتب بدون شرطة لتميزه عن العزم العادى μ'_r ــ أى أن:

$$(3.5.11):\ \mu_r=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^r\, dF(x)$$

هو العزم الرائى المركزى للمتغير العشوائى X. نلاحظ أن $\mu_0=\mu'_0=\nu'_0=1$ ــ والعزم المركزى الأول $\mu_1=0$ ــ كما أن العزم الثانى المركزى هو التباين.

ويمكن إيجاد العزوم حول النقطة a بدلالة العزوم حول نقطة أخرى b من العلاقة (3.5.10) بوضع:

$$(x-a)^r=[(x-b)+(b-a)]^r$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين:

$$(3.5.11'):\ (x-a)^r=\sum_{J=0}^{r}\binom{r}{J}(x-b)^{r-J}\,(b-a)^J$$

وبالتعويض عن المعادلة السابقة فى (3.5.10) نجد أن:

$$(3.5.12):\ \mu'_r(a)=\sum_{J=0}^{r}\binom{r}{J}(b-a)^J\,\mu'_{r-J}(b)$$

ونلاحظ من علاقة (3. 5. 10) أن:

$$(3.\ 5.\ 13):\ \begin{cases} \mu'_1(a) = \mu - a,\ \mu'_1(b) = \mu - b \\ b - a = -[\mu'_1(b) - \mu'_1(a)] \end{cases}$$

وللحصـــول علـــى العزوم المركزية بدلالة العزوم حول الصفر نضع $a = \mu$ ، $b = 0$ فى العلاقة (3. 5. 12) ــ فنحصل على العزم المركزى الرائى μ_r بدلالة العزوم حول الصفر μ' فى الصورة التالية:

$$(3.\ 5.\ 14a):\ \mu_r = \sum_{J=0}^{r} \binom{r}{J} (-\mu'_1)^J\ \mu'_{r-J}$$

كما يمكن بطريقة مماثلة الحصول على العزوم المركزية بدلالة العزوم حول نقطة (b مثلاً) فى الصورة التالية:

$$(3.\ 5.\ 14b):\ \mu_r = \sum_{J=0}^{r} \binom{r}{J} [-\mu'_1(b)]^J\ \mu'_{r-J}(b)$$

وبمقارنة علاقتى (3. 5. 14) نجد أن العلاقة (الدالية) بين العزوم المركزية والعزوم حـــول الصفر هى نفس العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم حول نقطة ــ لذلك سنكتب هـــذه العلاقـــة مفصـــلة لعدد من العزوم المركزية ــ على أن نكتب العزوم على الجانب الأيمـــن فى الصورة μ' دون التفرقة بين إذا ما كان العزم حول الصفر أو حول نقطة ــ حيث أن هذه العلاقة واحدة فى الحالتين.

إذن بوضـــع $r = 1,2,3,4,...$ فى أى من العلاقتين (3. 5. 14) يمكن كتابة العزوم المركزية بدلالة العزوم حول الصفر (أو حول النقطة b) فى الصورة التالية:

$$(3.\ 5.\ 15):\ \begin{cases} \mu_0 = 1 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 \\ \mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1 \\ \mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

فـــإذا كانت μ'_r هى العزم الرائى حول الصفر فإن $\mu = \mu'_1$ وإذا كانت μ'_r هى العزم الرائى حول النقطة b فإن $\mu - b = \mu'_1$ طبقاً للعلاقة (3. 5. 13).

وإذا وضـــعنا $a = 0$ و $b = \mu$ فى العلاقة (3. 5. 12) نحصل على العزوم حول الصفر بدلالة العزوم المركزية:

$$(3.5.16):\ \mu'_r = \sum_{J=0}^{r} \binom{r}{J} (\mu)^J \mu_{r-J}$$

حيث μ هو التوقع و μ_k هو العزم المركزى من الدرجة k.

وبذلك يمكن كتابة العزوم حول الصفر بدلالة العزوم المركزية فى الصورة التالية:

$$(3.5.17):\begin{cases}\mu'_0 = 1\\ \mu'_1 = \mu\\ \mu'_2 = \mu_2 + \mu^2\\ \mu'_3 = \mu_3 + 3\mu\mu_2 + \mu^3\\ \mu'_4 = \mu_4 + 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\mu_2 + \mu_4\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

(أمثلة)

مثال (3 ـ 5 ـ 1): متغير عشوائى X له توزيع بواسونى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; \quad x = 0,1,2,\dots$$

أوجد: توقع وتباين X وكذلك العزم المركزى الثالث μ_3.

(الحل)

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$\mu'_2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\overline{x-1} + 1\right) \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \mu'_2 - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

بالمثل نجد أن:

$$\mu_3' = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 \tfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

إذن العزم المركزى الثالث من العلاقة (3. 5. 15) هو:

$$\mu_3 = \lambda$$

مثال (3 ــ 5 ــ 2): إذا كان المتغير العشوائى X له توزيع جاما دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \qquad , \qquad x > 0 \, , \, n > 0$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد العزم الرائى حول الصفر μ_r' ثم أوجد تباين التوزيع.

(الحل)

$$\mu_r' = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^r x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

وبما أن $n > 0$ إذن $r + n > 0$ أى أن التكامل السابق موجود ــ إذن:

$$\mu_r' = \frac{1}{\Gamma(n)} \Gamma(n+r)$$

$$\mu_1' = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n$$

$$\mu_2' = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = (n+1)n$$

إذن التباين

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = n(n+1) - n^2 = n$$

مثال (3 ــ 5 ــ 3): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{k}{(1+x^2)^m} \quad ; \quad -\infty \le x \le \infty \, , \; m \ge 1$$

(1) أوجد قيمة k.

(2) بين شرط وجود العزم الرائى μ'_r.

(3) عندما $m = 1$ أوجد كل العزوم المحدودة (الموجودة).

(4) عندما $m > 1$ أوجد كل العزوم المحدودة.

(الحل)

(1) لإيجاد قيمة k نعلم أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dx}{(1+x^2)^m} = 1$$

$$\therefore \tfrac{1}{k} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m}$$

وذلك لأن f(x) دالة زوجية وحيدة المنوال متماثلة حول الصفر $f(-x) = f(x)$.

ضع:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

إذن:

$$\tfrac{1}{k} = \int_0^1 y^{m-\frac{1}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy$$

التكامل السابق تكامل بيتا وشرط وجوده أن يكون $m - \tfrac{1}{2} > 0$ أى $m > \tfrac{1}{2}$.

إذن عندما: $m > \tfrac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{k} = \beta\left(\tfrac{1}{2}, m - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$k = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \tfrac{1}{2}\right)}, \quad m > \tfrac{1}{2}$$

(2) العزم الذى من الدرجة J (فى حالة وجوده) يكون:

$$\mu'_J = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^J\,dx}{\left(1+x^2\right)^m}$$

والتكامل السابق (فى حالة وجوده) يكون مساوياً للصفر عندما تكون J عدد فردى ــ وبهــذا فإن كل العزوم الفردية الموجودة لهذا التوزيع تساوى الصفر ــ أما إذا كانت J عدد زوجى ــ لتكن J = 2r حيث r عدد صحيح غير سالب ــ يكون العزم μ'_{2r} هو:

$$\mu'_{2r} = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2r}\,dx}{\left(1+x^2\right)^m} = 2k\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2r}\,dx}{\left(1+x^2\right)^m}$$

وبأسلوب مماثل لإيجاد التكامل فى (1) نجد أن:

$$\mu'_{2r} = k\int_{0}^{1} y^{m-r-\frac{1}{2}-1}\left(1-y\right)^{r+\frac{1}{2}-1}\,dy$$

والــتكامل الســابق هــو تكــامل بيــتا وشــرط وجــوده هــو أن تكــون:

$$m-r-\tfrac{1}{2}>0 \quad , \quad r+\tfrac{1}{2}>0$$

وهــذا يتطلــب أن: $2r<2m-1$. أى أن شرط وجود العزم μ'_{2r} هو أن تكون $2r<2m-1$ ــ وعلى ذلك فإن العزوم حول الصفر التى من درجة أقل من $(2m-1)$ كلهــا موجــودة والعزوم الفردية منها كلها أصفار ــ ولكن العزوم التى تزيد درجتها عن $(2m-1)$ أو تساويها غير موجودة.

(3) عندما m = 1 تكون 2m – 1 = 1 ومن (2) يتضح أن كل العزوم ابتداء من التوقع غير موجودة وقد سبق أن وجدنا فى مثال (3 ــ 2 ــ 2 د) أن التوقع غير موجود وبالتالى فــإن كل العزوم التى أعلى منه درجة غير موجودة ــ لهذا عندما m = 1 تكون كل عزوم هذا التوزيع غير موجودة.

(4) عــندما تكــون $m>1$ تكــون كل العزوم الزوجية μ'_{2r} موجودة إذا تحققت العلاقة $2r<2m-1$ كما أوضحنا فى (2) ويكون كما أثبتنا فى (2):

$$\mu'_{2r} = k\beta\left(m-r-\tfrac{1}{2},\, r+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(m-r-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)} \quad , \quad 2r<2m-1$$

وبذلــك تكــون كــل العزوم الزوجية والفردية التي درجتها أقل من 2r موجودة والفــردية مــنها تســاوى الصفر كما سبق أن ذكرنا فى (2) وبهذا يكون التوقع موجود ويساوى الصفر عندما $m > 1$.

ملاحظــة (3 ـ 5 ـ 3 أ): العــزم الثانى حول النقطة c يمكن ــ باستخدام العلاقة (3. 3. 7b) ــ كتابته فى الصورة التالية:

$$\mu_2' = E(X-c)^2 = V(X) + (\mu - c)^2$$

حيث μ هو توقع X ــ وهذا يوضح أن العزم الثانى يكون أقل ما يمكن عندما $\mu = c$ ــ أى أن العزم الثانى يكون نهاية صغرى عندما يكون محسوباً حول مركز التوزيع μ.

ملاحظة (3 ـ 5 ـ 3 ب): إذا كان متغير عشوائى له توزيع احتمالى متماثل حول قــيمة معينة "a" فإن العزوم الفردية حول "a" جميعها أصفار. فإذا كان مركز التماثل "a" هــو التوقع فإن كل العزوم المركزية الفردية تكون أصفار (إذا كانت موجودة) ــ أى أن أى توزيــع متماثل حول توقعه تكون عزومه المركزية الفردية (إذا كانت موجودة) كلها أصفار.

ملاحظــة (3 ـ 5 ـ 3 جــــ): سبق أن ذكرنا أن العزوم الزوجية العادية تساوى العزوم الزوجية المطلقة ــ والآن نضيف الآتى:

إذا كان المتغير العشوائى X متغير غير سالب ــ أى أن $Pr(X \geq a) = 1$ حيث $a \geq 0$ ــ فــإن العــزوم المطلقة حول أى نقطة b على يسار النقطة a تساوى العزوم العادية المساوية لها فى الدرجة (يمكن للقارئ إثبات ذلك).

مــثال (3 ـ 5 ـ 4): أوجــد العــزوم المركزية العادية والمطلقة للمتغير X ذى التوزيع المعتاد إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \; ; \; -\infty \leq x \leq \infty$$

(الحل)

(1) التوقع: يلزم لإيجاد العزوم المركزية أن نحصل على التوقع μ.

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

وباستخدام التحويلة $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ نختصر التكامل السابق إلى:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma z)e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z\,e^{-z^2/2}\,dz$$

الـــتكامل الثاني في الطرف الأيمن يساوى صفر لأنه تكامل دالة فردية في المدى $\pm\infty$ والتكامل الأول يساوى $\sqrt{2\pi}$ إذن: $E(X)=\mu$.

(2) العزوم المركزية العادية: يمكن إيجاد العزم المركزى الرائى μ_r كما يلى:

$$\mu_r=E(X-\mu)^r=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^r e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

وبنفس التحويلة السابقة:

$$\mu_r=\frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^r\exp\left[-z^2/2\right]dz$$

فإذا كانت r عدد فردى تكون الدالة المكاملة فردية ويكون التكامل فى المدى $\pm\infty$ مساويا للصفر أى أن $\mu_r=0$ عندما r عدد فردى.

أما إذا كانت r عدد زوجى ـــ لتكن $2k=r$ حيث k عدد صحيح غير سالب ـــ فإن:

$$\mu_{2k}=\frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\cdot\int_{0}^{\infty}z^{2k}e^{-z^2/2}\,dz$$

وباستخدام التحويلة:

$$y=z^2/2\ ,\ \ z=\sqrt{2y}$$

$$dz=\frac{1}{\sqrt{2}}y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\therefore \mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} 2^k \int_0^\infty y^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)-1} e^{-y}\, dy$$

$$\therefore \mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k}\, 2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

ولكن:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k}\, k!}$$

$$\mu_{2k} = \sigma^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k\, k!}$$

وبما أن $r = 2k$ حيث r عدد زوجي فيمكن كتابة الصيغة التالية:

العـزوم المركـزية للتوزيع المعتاد دائماً موجودة والعزم الرائي المركزي معطى بالعلاقة التالية:

$$(3.5.18):\ \mu_r = \frac{r!}{2^{r/2}\left(\frac{r}{2}\right)!} \cdot \sigma^r \qquad \text{عندما r عدد زوجي}$$

$$= 0 \qquad \text{عندما r عدد فردي}$$

(3) العـزوم المركـزية المطلقة: العزم المركزي المطلق $\nu_r = E\left(|X-\mu|^r\right)$ هو نفسه العزم المركزي العادي عندما تكون r عدد زوجي وبالتالي تكون قيمته هي الموجودة في العلاقة (18 .5 .3) السابقة حيث $\nu_r = \mu_r$. وعندما تكون r عدد فردي – يمكن بنفس الأسلوب السابق الوصول إلى ما يلي:

$$\nu_r = E\left(|X-\mu|^r\right) = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^r e^{-z^2/2}\, dz$$

وهنا الدالة المكاملة زوجية

$$\therefore \nu_r = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty z^r e^{-z^2/2}\, dz = \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \sigma^r$$

وبذلك يمكن كتابة العزوم المطلقة المركزية للتوزيع المعتاد فى الصورة التالية:

عندما r عدد زوجى

$$(3.5.19):\ \nu_r = \frac{r!}{2^{r/2}\left(\frac{r}{2}\right)!}\sigma^r$$

عندما r عدد فردى

$$= \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\sigma^r$$

وعزوم أى متغير عشوائى ليست مجرد كميات اعتباطية Arbitrary Quantities لا رابـــط بينها وإنما هى كميات يوجد بينها علاقات معينة نقدم بعض من هذه العلاقات فيما يلى:

لأى مجموعة من الثوابت $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ يكون مقدار الدرجة الثانية:

$$(3.5.20):\ Q_n = \int \left[\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k\right]^2 dF(x) \geq 0$$

فـــإذا كـــان العزم $\mu'_{2n}(a)$ موجود ــ تكون كل العزوم العادية والمطلقة التى من الدرجة 2n فأقل موجودة وبالتالى يمكن كتابة Q_n فى الصورة التالية:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{J=0}^{n} c_k\, c_J\, \mu'_{k+J}(a) \geq 0$$

حيث $\mu'_{k+J}(a)$ هو العزم ذو الدرجة (k + J) حول a.

ويمكن كتابة Q_n فى شكل مصفوفى كما يلى:

$$Q_n = \underline{c}' M \underline{c} \geq 0$$

حيث

$$\underline{c}' = [c_0\, c_1\, c_2 \,.......\, c_n]$$

والمصـــفوفة M عناصرها العزوم μ'_{k+J} ومادامت $Q_n \geq 0$ فإن $|M| \geq 0$ وهذا يوصلنا إلى نتيجة معينة هى أن:

العزوم الأولى $\mu'_J(a)$ تحقق المتباينات التالية:

$$\begin{vmatrix} \mu'_0(a) & \mu'_1(a) & \dots & \mu'_k(a) \\ \mu'_1(a) & \mu'_2(a) & \dots & \mu'_{k+1}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu'_k(a) & \mu'_{k+1}(a) & \dots & \mu'_{2k}(a) \end{vmatrix} \geq 0 \quad , \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

وإذا وضعنا $|x-a|^k$ في العلاقة (3. 5. 20) بدلاً من $(x-a)^k$ نحصل على صيغة مشابهة للعزوم المطلقة حول a.

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

إذا كانت عزوم أى توزيع حتى الدرجة 2n موجودة فإنها تحقق المتباينات التالية:

$$(3.\ 5.\ 21a): \begin{cases} |\mu'_{i+J}(a)| \geq 0 \\ |\nu'_{i+J}(a)| \geq 0 \end{cases} \qquad i, J = 0,1,2,\dots,k \quad , \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

حيث $\mu'_{i+J}(a)$ هو العزم العادى من الدرجة (i + J) حول النقطة (a) ويمثل العنصر الموجود فى الصف (i) والعمود (J) من المحدد $|\mu'_{i+J}(a)|$ ــ والعزم المطلق $\nu'_{i+J}(a)$ يعرف بنفس الطريقة. وعندما $\mu = a$ نحصل على نفس المتباينات السابقة للعزوم المركزية ــ العادية منها والمطلقة ــ فى الصورة التالية:

$$(3.\ 5.\ 21b): \begin{cases} |\mu_{i+J}| \geq 0 \\ |\nu_{i+J}| \geq 0 \end{cases} \qquad i, J = 0,1,2,\dots,k \quad , \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

و μ_{i+J} هو العزم المركزى من الدرجة $(i+J)$ ويمثل العنصر الموجود فى الصف i والعمود J من المحدد $|\mu_{i+J}|$ وبالمثل نعرف العزم المركزى المطلق ν_{i+J}.

ومن العلاقة (3. 5. 21b) عندما $k = 2$ نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \geq 0$$

إذن العزوم المركزية الأربعة الأولى تحقق العلاقة التالية:

(3. 5. 22a): $\mu_2\mu_4 - \mu_3^2 - \mu_2^3 \geq 0$

ونقـدم فـيما يلي بعض الكميات التي يتم حسابها من العزوم المركزية ولها أهمية خاصة في الدراسات الإحصائية كما سيتضح فيما بعد ــ ونعرفها كما يلي:

(3. 5. 22b): $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3 \quad ;\ ; \quad \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2 \quad ;; \ \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} \ ; \ \gamma_2 = \beta_2 - 3$

وبقسمة طرفي العلاقة (3. 5. 22a) على μ_2^3 نحصل على العلاقة التالية بين β_1، β_2:

(3. 5. 22c): $\beta_2 \geq \beta_1 + 1$

نعــرف من نظرية (3 ــ 5 ــ 2) أن العزم الرائي μ'_r عندما يكون موجود تكون كــل العزوم المطلقة والعادية من الدرجة k كلها موجودة لجميع قيم $0 \leq k \leq r$ ــ ونحن الآن ســنقدم نظــرية هامــة خاصــة بالعــزوم المطلقــة تســمى "متبايــنة لابونوف" "Lapunov's Inequality".

نظرية (3 ــ 5 ــ 3 أ):

إذا كان العزم المطلق من الدرجة n للمتغير العشوائي X موجود فإن المتباينة:

(3. 5. 23): $\nu_k^{\frac{1}{k}} \leq \nu_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$

تكون صحيحة لجميع قيم $k \ ; \ k = 1, 2, ..., n-1$ **. حيث** $\nu_k = E|X-a|^k$ **و a أي عدد حقيقي.**

(الإثبات)

أي مقدار من الدرجة الثانية في u، z على الصورة:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u|x-a|^{\frac{k-1}{2}} + z|x-a|^{\frac{k+1}{2}} \right]^2 dF(x)$$

يكون دائماً غير سالب ــ إذن:

$$Q = \nu_{k-1} u^2 + 2\nu_k u z + \nu_{k+1} z^2 \geq 0$$

وحيــث أن الشــرط اللازم لكي يكون مقدار الدرجة الثانية $Q \geq 0$ هو أن يكون محدد هذا المقدار غير سالب أي أن:

$$\begin{vmatrix} \nu_{k-1} & \nu_k \\ \nu_k & \nu_{k+1} \end{vmatrix} \geq 0$$

إذن

$$\nu_k^2 \le \nu_{k-1} \cdot \nu_{k+1}$$

وبرفع طرفى المتباينة السابقة إلى القوة k

$$\therefore \nu_k^{2k} \le \nu_{k-1}^k \, \nu_{k+1}^k$$

وبمـــا أن ν_n موجود إذن ν_k موجود لجميع قيم $k = 1,2,\ldots,n-1$ وعلى ذلك إذا وضعنا $k = 1,2,\ldots,n-1$ فى المتباينة السابقة نحصل على المتباينات التالية:

$$\nu_1^2 \le \nu_0 \, \nu_2$$
$$\nu_2^4 \le \nu_1^2 \, \nu_3^2$$
$$\nu_3^6 \le \nu_2^3 \, \nu_4^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu_{n-1}^{2(n-1)} \le \nu_{n-2}^{n-1} \, \nu_n^{n-1}$$

وبضرب المتباينات السابقة فى بعضها علماً بأن $\nu_0 = 1$ نحصل على المتباينة التالية:

$$(3.\ 5.\ 24):\ \nu_k^{k+1} \le \nu_{k+1}^k$$

وبـــرفع طرفى المتباينة السابقة إلى القوة $\frac{1}{k(k+1)}$ نصل إلى المتباينة (3. 5. 23)

وهذا يثبت النظرية.

هـ. ط. ث.

والعلاقـــة (3. 5. 23) يمكـــن كتابتها فى الصورة التالية عندما يكون العزم المطلق ν_n موجود:

$$(3.\ 5.\ 25):\ \nu_1 \le \nu_2^{\frac{1}{2}} \le \nu_3^{\frac{1}{3}} \le \cdots \le \nu_n^{\frac{1}{n}}$$

(3 ـ 5 ـ 4) العزوم العاملية The Factorial Moments:

ســنقدم الآن نـــوع مـــن العزوم يسمى بالعزوم العاملية، وهى قليلة الاستخدام فى الـــنظرية الإحصـــائية لكـــنها ذات فـــائدة كبيرة فى الحصول على العزوم العادية لبعض التوزيعات المتقطعة والتى من نوع التوزيع ذو الحدين والتوزيع البواسونى وغير ذلك من التوزيعات التى تحتوى على علامة المضروب (The Factorial Sign (.)!) فى صيغة دوال

توزيعهـا الاحـتمالى. ولعـدم استخدام العزوم العاملية فى التوزيعات المستمرة سنكتفى بتعريفها بالنسبة للتوزيعات المتقطعة فقط.

وقبل تعريف العزوم العاملية نقدم التعبير التالى:

$$(3.\ 5.\ 25'):\ x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$$

ونطلق على التعبير السابق لفظ "التعبير العاملى" "Factorial Expression" حيث أنه حاصـل ضـرب عـدة عوامـل. وقيم العوامل المتتالية بينها فرق ثابت يساوى الواحد الصحيح.

تعريف (3 ـ 5 ـ 4 أ) العزم العاملى من الدرجة r حول النقطة (a):

The r^th^ Factorial Moment About A Point (a):

التعبير:

$$(3.\ 5.\ 26):\ \mu'_{[r]}(a) = \sum_{J=-\infty}^{\infty} (x-a)^{[r]} P(x_J)$$

يسمى العزم العاملى من الدرجة r للمتغير العشوائى X حول النقطة (a) ـ حيث $P(x_J) = Pr[X = x_J]$ هـى دالة احتمال X عند نقطة الاحتمال x_J و a نقطة ثابتة و $(x-a)^{[r]}$ معرفة بالعلاقة (3. 5. 25).

ويمكن استخدام تعريف العزم العاملى حول النقطة a كما فى العلاقة (3. 5. 26) فى إيجاد العزوم العاملية بدلالة العزوم العادية وبعملية الرجوع العكسى يمكن الحصول على العـزوم العادية بدلالة العزوم العاملية ـ وهذا هو المهم. وفيما يلى العزوم العاملية الستة الأولى بدلالة العزوم العادية ثم العزوم العادية بدلالة العزوم العاملية.

أولاً: بالاسـتخدام المباشـر للعلاقة (3. 5. 26) يمكن إيجاد العزوم العاملية حول a بدلالة العـزوم العاديـة حول نفس النقطة a. وسنكتب العزوم $\mu'_{[r]}(a)$ على الشكل $\mu'_{[r]}$ وكذلك العزوم $\mu'_r(a)$ على الشكل μ'_r وذلك لتبسيط شكل الصيغة المستخدمة علماً بأن العلاقات التالية صحيحة لجميع قيم a. فعندما $a = 0$ يكون $\mu'_{[r]}$ و μ'_r هما العزم العاملى من الدرجة r حول الصفر والعزم العادى من الدرجة r حول الصفر وعندما a تساوى التوقع μ تكون $\mu'_{[r]}$ و μ'_r هى العزوم العاملية والعادية المركزية.

$$(3.5.27):\ \mu'_{[1]} = \mu'_1$$

$$\mu'_{[2]} = \mu'_2 - \mu'_1$$
$$\mu'_{[3]} = \mu'_3 - 3\mu'_2 + 2\mu'_1$$
$$\mu'_{[4]} = \mu'_4 - 6\mu'_3 + 11\mu'_2 - 6\mu'_1$$
$$\mu'_{[5]} = \mu'_5 - 10\mu'_4 + 35\mu'_3 - 50\mu'_2 + 24\mu'_1$$
$$\mu'_{[6]} = \mu'_6 - 15\mu'_5 + 85\mu'_4 - 225\mu'_3 + 274\mu'_2 - 120\mu'_1$$

....

ثانــياً: بعملــية الرجوع العكسى فى المعادلات السابقة نحصل على العزوم العادية بدلالة العزوم العاملية ــ وهذا هو المهم كما ذكرنا سابقاً.

$$(3.5.28):\ \mu'_1 = \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_2 = \mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$
$$\mu'_3 = \mu'_{[3]} + 3\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$
$$\mu'_4 = \mu'_{[4]} + 6\mu'_{[3]} + 7\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$
$$\mu'_5 = \mu'_{[5]} + 10\mu'_{[4]} + 25\mu'_{[3]} + 15\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$
$$\mu'_6 = \mu'_{[6]} + 15\mu'_{[5]} + 65\mu'_{[4]} + 90\mu'_{[3]} + 31\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

....

وبمــا أن $\mu'_{[1]} = \mu'_1$ إذن العلاقــات (3. 5. 27) و(3. 5. 28) تظل صحيحة عندما تكون $\mu = a$ ولذلك نهمل الشرطة الموضوعة على كل عزم وتعتبر كل العزوم مركزية مــع الأخذ فى الاعتبار أن $\mu_1 = \mu_{[1]} =$ صفر ــ حيث أن العزم المركزى الأول يساوى الصفر.

مثال (3 ــ 5 ــ 5): إذا كان X متغير عشوائى متقطع له توزيع بواسونى دالة احتماله:

$$P(x) = \tfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; x = 0,1,2,...$$

أوجد العزوم المركزية الأربعة الأولى لهذا التوزيع.

(الحل)

نبدأ أولا بالحصول على العزوم حول الصفر ومنها نحصل على العزوم المركزية. ولــو حاولنا الحصول على العزوم العادية حول الصفر سنجد أن العملية الحسابية صعبة جـداً لوجـود مضروب x ــ لذلك نحصل أولاً على العزوم العاملية حول الصفر ومنها نحصل على العزوم العادية:

العزم العاملى من الدرجة r حول الصفر هو:

$$\mu'_{[r]} = \sum_{x=0}^{\infty} x^{[r]} \tfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{x=r}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-r)}}{(x-r)!} = \lambda^r$$

إذن العزوم العاملية الأربعة الأولى حول الصفر هى:

$$\mu'_{[r]} = \lambda^r \qquad ; \; r = 1,2,3,4$$

$$\mu'_{[1]} = \lambda \,,\, \mu'_{[2]} = \lambda^2 \,,\, \mu'_{[3]} = \lambda^3 \,,\, \mu'_{[4]} = \lambda^4$$

وباستخدام العلاقات (28 .5 .3) نجد أن العزوم العادية الأربعة الأولى حول الصفر هى:

$$\mu'_1 = \mu'_{[1]} = \lambda$$
$$\mu'_2 = \mu'_{[2]} + \mu'_{[1]} = \lambda^2 + \lambda$$

وبالمثل:

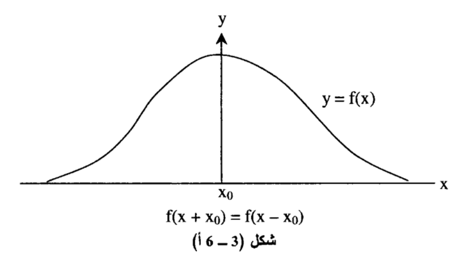
$$\mu'_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$
$$\mu'_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

وباستخدام العلاقات (16 .5 .3) نحصل من العزوم حول الصفر السابقة على العزوم المركزية:

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$
$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu_1'^3$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda$$
$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu_1'^2\mu'_2 - 3\mu_1'^4$$
$$= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4\lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) + 6\lambda^2(\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda^4$$
$$= 3\lambda^2 + \lambda$$

(3 ـ 6) الالتواء The Skewness:

فـــى التطبــيقات الإحصــــائية كثـــيراً ما تواجهنا توزيعات مستمرة وحيدة المنوال ومتماثلة Symmetric ـ مثل التوزيع المعتاد ـ الذى سنقدمه فى الباب الثامن ـ وهو أهم توزيع إحصائى على الإطلاق لأهمية الدور الذى يلعبه فى الدراسات الإحصائية، وتتميز الـــتوزيعات الـــتى مـــن هـــذا النوع بأن التوزيع يكون وحيد المنوال ومتماثل حول نقطة المنوال. فلو رمزنا لدالة كثافة احتمال التوزيع بالرمز $f(x)$ ولمنواله بالرمز x_0 فإن الدالة $f(x)$ تكـــون متماثلة حول الخط الرأسى $x = x_0$. والنقطة $x = x_0$ تسمى مركز التماثل وفى هذا التوزيع يكون الوسط مساوياً للوسيط مساوياً للمنوال والجميع يساوى قيمة واحدة هى مركز التماثل. والشكل التالى يبين منحنى توزيع من هذا النوع:

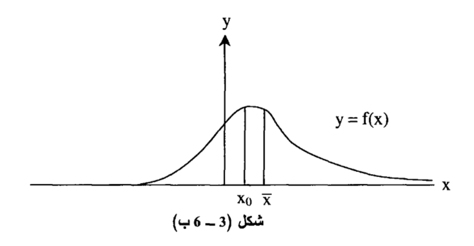


$$f(x + x_0) = f(x - x_0)$$

شكل (3 ـ 6 أ)

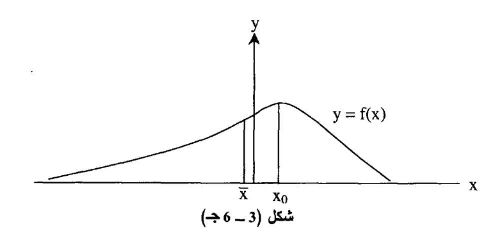
توزيع متماثل حول المنوال x_0

كمـــا تواجهـــنا أيضاً توزيعات مستمرة وحيدة المنوال لها ذيل طويل (Long Tail) علـــى إحدى جانبى المنوال وذيل قصير (Short Tail) على الجانب الآخر كما فى الشكل التالى:



شكل (3 ـ 6 ب)

منحنى وحيد المنوال x_0 ذيله الأطول ناحية اليمين (الوسط $x_0 < \bar{x}$)



شكل (3 ـ 6 جـ)

منحنى وحيد المنوال ذيله الأطول ناحية اليسار (الوسط $x_0 > \bar{x}$)

عــندما يكون الذيل الأطول ناحية اليمين من المنوال نقول أن التوزيع "ملتو ناحية اليميــن" أو "موجب الالتواء" كما فى الشكل الســابق (3 ـ 6 ب). وإذا كان الذيل الأطول ناحية اليسار من المنوال نقول أن التوزيع "ملتو ناحية اليسار" أو "سالب الالتواء" كما فى الشكل السابق (3 ـ 6 جــ). والتوزيعات المتماثلة تتميز بأن:

الوسط $\overline{x}$ = الوسيط $x_{\frac{1}{2}}$ = المنوال x_0 ومركز التماثل هو المنوال x_0 ــ فى حين أن هذه القيم تختلف فى التوزيعات غير المتماثلة (Asymmetric Distributions) ــ حيث أنها تــتأثر بالقيم المتطرفة للمتغير Extreme Values ولكن كما نعلم أن المنوال لا يتأثر بالقيم المتطرفة فى حين أن الوسيط يتأثر بموضع (أو ترتيب) هذه القيم فقط أما الوسط الحسابى فإنــه يتأثر بحجم هذه القيم المتطرفة، لذلك يمكن استخدام المنوال والوسط الحسابى لقياس الالتواء مستخدمين فكرة معينة هى أن فى التوزيعات المتماثلة يكون $\overline{x}-x_0=0$ أما فى الــتوزيعات البعــيدة عــن التماثل (الملتوية) يكون $\overline{x}-x_0\neq 0$ لذا قد يتجه التفكير إلى اســتخدام العلاقة $\overline{x}-x_0$ لقياس الالتواء ولكن هذه العلاقة يوجه لها انتقادين، أولهما أن الالــتواء فـــى هذه الحالة يقاس بنفس وحدات المتغير وبالتالى لا يصلح فى المقارنة بين توزيعــات المتغيرات ذات وحدات القياس المختلفة، وثانيهما أن هذا المقياس يعطى دلالة مخــتلفة عند مقارنة توزيع صغير التشتت بتوزيع آخر أكبر منه تشتتا، لذلك من الأفضل أن ننسب هذا المقياس إلى تشتت كلٍ منهما لتكون المقارنة فعالة. ولهذا قدم كارل بيرسون K. Pearson مقياس للالتواء تغلب به على هذه الصعوبات ــ هو:

$$(3.6.1):\ Sk(1)=\frac{\overline{x}-x_0}{\sigma}$$

حيــث $\overline{x}$ هــو الوســط و x_0 المنوال و σ الانحراف المعيارى. ويسمى "معامل الــتواء بيرســون". والمقــياس السابق مقياس نسبى ليس له وحدات قياس وإشارته تكون موجــبة عندما يكون $\overline{x}>x_0$ وفى هذه الحالة يكون الذيل الأطول فى اتجاه القيم الكبرى للمتغــير أى أن الذيل الأيمن أطول من الذيل الأيسر كما فى الشكل السابق (3 ــ 6 ب) ــ ونقــول أن الــتوزيع ملــتو ناحية اليمين أو موجب الالتواء. وبالمثل تكون إشارة معامل الالــتواء ســالبة إذا كانت $\overline{x}<x_0$ وفى هذه الحالة يكون الذيل الأيسر أطول من الذيل الأيمن كما فى الشكل السابق (3 ــ 6 جـ) ونقول أن التوزيع ملتو ناحية اليسار أو سالب الالــتواء. وعلى هذا إذا كان معامل الالتواء $Sk(1)$ موجب نقول أن التوزيع ملتوٍ ناحية اليميــن أو موجــب الالتواء وإذا كان سالباً نقول أن التوزيع ملتوٍ ناحية اليسار أو سالب الالــتواء وإذا كان يساوى صفر نقول أن التوزيع متماثل حول المنوال. وكلما زادت قيمة $Sk(1)$ كلمــا زادت شدة الالتواء سواء كان سالباً أو موجباً، كما أن وحدات قياسه مطلقة لا تمييز لها. ولكن توجد صعوبة خطيرة فى استخدام هذا المقياس وهى أننا فى كثير من الــتوزيعات لا نســتطيع الحصول على المنوال إما لعدم وجوده كما فى بعض التوزيعات المتقطعة أو المستمرة عندما تكون دالة كثافة الاحتمال كمية ثابتة أو لعدم إمكانية الحصول عليه إلا بصورة تقريبية كما فى التوزيعات المحددة عدديا مثل التوزيعات التكرارية. لذلك

يمكن استخدام العلاقة (32 .2 .3) لتقديم مقياس آخر للالتواء فى حالة التوزيعات القريبة من التماثل باستخدام الوسيط $x_{\frac{1}{2}}$ بدلاً من المنوال، هذا المقياس هو:

$$(3.6.2):\ Sk(2)=\frac{3\left(\bar{x}-x_{\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}$$

وتوجد مجموعة كبيرة من التوزيعات تسمى توزيعات بيرسون Pearson's Distributions حيث يمكن ــ بالنسبة لهذه التوزيعات ــ إثبات أن معامل التواء بيرسون $Sk(1)$ يأخذ الصيغة التالية:

$$(3.6.3):\ Sk(1)=\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

حيث β_1 ، β_2 كما فى العلاقات (3.5.22b).

والصيغة السابقة تقدم لنا القيمة المضبوطة Exact Value لمعامل التواء بيرسون $Sk(1)$ بدلاً من الصيغة (1 .6 .3) التى تعتمد على المنوال والذى قد لا يمكن الحصول عليه إلا فى صورة تقريبية.

وتوجد أيضاً مقاييس أخرى للالتواء مبنية على الكميات الترتيبية التى أشرنا إليها فى بند (3 ــ 2 ــ 4) حيث يمكن تقديم مقياس للالتواء يعتمد على الربيعين الأدنى $x_{\frac{1}{4}}$ والأعلى $x_{\frac{3}{4}}$ والوسيط $x_{\frac{1}{2}}$ وتقوم فكرة هذا المقياس على أن الربيعين $x_{\frac{1}{4}}$ و $x_{\frac{3}{4}}$ فى التوزيع المتماثل متساويا البعد عن الوسيط أى أن:

$$(3.6.4):\ (a)\ \left(x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{2}}\right)=\left(x_{\frac{1}{2}}-x_{\frac{1}{4}}\right)$$

$$(b)\ \left(x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{2}}\right)-\left(x_{\frac{1}{2}}-x_{\frac{1}{4}}\right)=0$$

وعلى هذا فإن الفرق الموجود فى العلاقة السابقة (b) يساوى الصفر فى المنحنيات المتماثلة وقريب من الصفر فى المنحنيات القريبة من التماثل ويختلف عن الصفر فى المنحنيات الملتوية وكلما زاد الفرق كلما كان الالتواء كبيراً. لذلك يمكن أن ننسب هذه الكمية إلى الفرق بين الربيعين $\left(x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{4}}\right)$ الذى يعتبر مقياساً للتشتت ونستخدم هذه النسبة للحصول على مقياس مطلق للالتواء (وحدات قياسه مطلقة ليس لها تمييز) فى الصورة التالية:

$$(3.6.5):\ Sk(3)=\frac{\left(x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{2}}\right)-\left(x_{\frac{1}{2}}-x_{\frac{1}{4}}\right)}{x_{\frac{3}{4}}-x_{\frac{1}{4}}}$$

ويمكن إثبات أن:

$$(3.6.6):\ -1<Sk(3)<1$$

فـــإذا كـــان $Sk(3)$ موجب نقول أن التوزيع موجب الالتواء وذيله الأطول ناحية اليمين وإذا كان سالب نقول أن التوزيع سالب الالتواء أى الذيل الأطول ناحية اليسار وإذا كـــان صــــفر نقول أن التوزيع متماثل. ومازال هناك عيب يمكن توجيهه لمعامل الالتواء السابق $Sk(3)$ وهو أنه يهمل نصف قيم المتغير إذ لا يدخل فى حسابه القيم التى أقل من $x_{\frac{1}{4}}$ والـــتى أكبر من $x_{\frac{3}{4}}$ وهو نفس العيب الذى يوجه إلى أى مقياس للتشتت أو للالتواء محسوب من الإحصاءات (أو الكميات) الترتيبية.

ملاحظة (3 ــ 6 أ): فى المقياس السابق إذا استبدلنا الكميات الترتيبية $x_{\frac{1}{4}}$ ، $x_{\frac{3}{4}}$ بالكمـــيات الترتيبية x_p ، x_{1-p} حيث $0<p<1$ سنحصل على مقياس آخر للالتواء وتظل قيمة المقياس الجديد منحصرة بين 1 –، 1.

ويوجـــد مقـــياس آخر للالتواء يعتمد على العزم المركزى الثالث μ_3 والانحراف المعـــيارى σ. إذ من المعروف أن العزوم المركزية الفردية لأى توزيع متماثل جميعها تســـاوى الصــــفر (عــــندما تكون موجودة) لذلك فإن أى عزم مركزى فردى يختلف عن الصــــفر (فى حالة وجوده) يمكن أن يستخدم كمقياس للالتواء ــ أى لقياس درجة الابتعاد عـــن الـــتماثل ــ وأبسط هذه العزوم هو العزم المركزى الثالث μ_3. وحيث أن وحدات قـــياس μ_3 هـــى مكعـــب وحدات قياس المتغير ــ إذن للحصول على مقياس مطلق ــ وحدات قياسه أعداد مطلقة (Pure Numbers) نقسم μ_3 على مكعب الانحراف المعيارى σ^3 (الذى يقاس أيضاً بمكعب وحدات قياس المتغير) ونستخدم النسبة $\left(\mu_3/\sigma^3\right)$ كمقياس للالتواء فنحصل على معامل الالتواء التالى:

$$(3.6.7):\ Sk(4)=\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

فـــى التوزيعات غير المتماثلة "Asymmetric Distributions" إذا كان الذيل الأطول للـــتوزيع على يمين قمة المنحنى (أى على يمين المنوال) فى الجانب الموجب ــ كما فى الشـــكل (3 ــ 6 ب) ــ ســـنجد عند حساب μ_3 أن مكعبات الانحرافات الموجبة تكون ــ

بصـــفة عامة ــ أكثر وزناً من مكعبات الانحرافات السالبة، ولهذا فإن γ_1 تكون موجبة. إذن عـــندما تكـــون γ_1 موجبة نقول أن التوزيع موجب الالتواء وذيله الأطول على يمين القمة. وبالمثل يكون التوزيع سالب الالتواء (وذيله الأطول على يسار القمة) عندما تكون γ_1 سالبة وتزداد شدة الالتواء (سواء كان موجباً أو سالبا) كلما كانت القيمة العددية للكمية γ_1 كبـــيرة. أما إذا كانت γ_1 تساوى الصفر نقول أن التوزيع متماثل. وفى بعض الكتب والدراســـات الإحصائية تستخدم الكمية $\beta_1 = \gamma_1^2$ بدلاً من γ_1 ويكون معامل الالتواء فى هذه الحالة هو:

$$(3.6.8):\ Sk(5) = \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad ; \left(\beta_1 = \gamma_1^2\right)$$

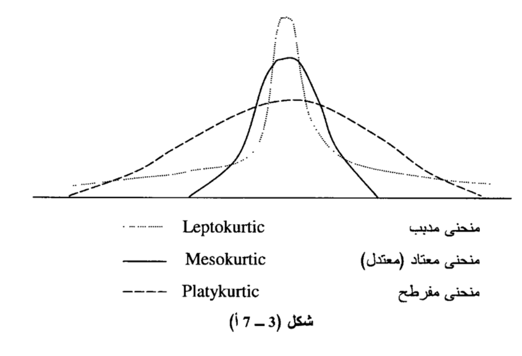
والمقياس السابق دائماً موجب فهو يقيس شدة الالتواء دون تحديد اتجاهه.

وعلـــى أى حـــال فقـــد قدم "أورد" (1968) "Ord" بعض التوزيعات غير المتماثلة Asymmetric Distributions والتى يمكن أن يكون لها عزوم فردية تساوى الصفر من أى درجة نحددها ــ وفى مثل هذه التوزيعات لا يمكن استخدام β_1 أو γ_1 فى قياس الالتواء ــ لذلك يجب استخدام معاملى الالتواء β_1 أو γ_1 بشىء من الحذر.

(3 ــ 7) التفرطح (Kurtosis) والتحدب:

باعتـــبار أن الـــتوزيع الموجود فى شكل (3 ــ 6أ) توزيع معتاد أو معتدل فإن أى توزيع تكون قمته أعلى ارتفاعاً وأكثر تدبباً أو تحدباً (more sharply peaked) من التوزيع المعـــتاد يســـمى "توزيـــع محدب أو مدبب" (Leptokurtic) ــ وإذا كانت قمة التوزيع أقل ارتفاعـــا وأكثر تسطحاً (more flattening) من التوزيع المعتاد فإنه يسمى "توزيع مفرطح" (Platykurtic) ــ فـــى حين أن التوزيع المعتاد يعتبر وسطاً بين التوزيع المحدب والتوزيع المفرطح ونقول أنه "توزيع متوسط التفرطح" (mesokurtic).

والشكل التالى يوضح هذه الأنواع الثلاثة فى رسم واحد.



شكل (3 ـ 7 أ)

ونقـــدم فـــيما يلى مقياس لدرجة التفرطح (أو التسطح حول القمة) فى التوزيعات الاحتمالـــية وحـــيدة المـــنوال. ودرجة التفرطح فى التوزيع يمكن قياسها باستخدام العزم المركزى الرابع بعد تخليصه من وحدات القياس بقسمته على σ^4. ويمكن تعريف مقياس للتفرطح ــ نسميه معامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis) ــ كما فى العلاقة التالية:

$$(3.7.1):\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

وهـــو يســـتخدم لقـــياس درجـــة تفرطح التوزيع فى جوار ما حول قمتـــه. وفى التوزيـــع المعتاد ــ الذى نقيس التفرطح بالمقارنة له ــ نجد أن $\beta_2 = 3$ كما يتضح من مثال (3 ــ 5 ــ 4) ــ وحيث أننا نقيس درجة التفرطح عن التوزيع المعتاد لذلك فإننا عادة نستخدم الكمية $(\beta_2 - 3)$ لقياس التفرطح بدلاً من β_2 ــ ويكون معامل التفرطح هو:

$$(3.7.2):\ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

وعندما تكون γ_2 موجبة فإن ذلك يدل على أن منحنى التوزيع أكثر تحدباً وأعلى قمة من التوزيع المعتاد فى جوار ما حول المنوال (حول القمة) ــ أى أن منحنى التوزيع

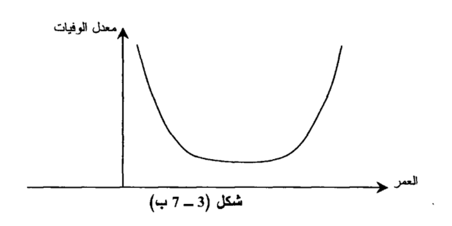
أقـل تفرطحاً من التوزيع المعتاد ــ والعكس عندما تكون γ_2 سالبة يكون منحنى التوزيع أكـثر تفـرطحاً من التوزيع المعتاد. وتفسير ذلك أن الانحرافات عن الوسط عندما تكون مـرفوعة إلـى القوة الرابعة أو الثانية فإنها تكون موجبة فى الحالتين، فى حين أن القوة الـرابعة تـزيد الانحـرافات الكبيرة بصورة أكثر تضخماً من القوة الثانية ــ وحيث أن الـتفرطح يـنظر له حول المنوال (القمة) ــ فإذا كانت القمة مرتفعة والمنحنى عند القمة رفيع Slim ومدبب Sharply Peaked كان معنى ذلك أن مجموعة قيم المتغير الموجودة فى جـوار حول المنوال (حول هذه القمة) أقل (عدداً) من بقية قيم المتغير ــ وبالتالى تكون غالبية قيم المتغير (The Bulk) متطرفة إلى حد ما عن القمة ومنتشرة عند طرفى التوزيع ممـا ينـتج عـنه تضخم النسبة μ_4/μ_2^2. وبناء على ذلك كلما كان التوزيع أكثر تدبباً وارتفاعـاً عـند القمـة ونيلاه أكثر طولاً كلما كان العزم المركزى الرابع أكثر تضخماً بالمقارنة بالعزم المركزى الثانى أى كلما كانت النسبة μ_4/μ_2^2 كبيرة.

ومن الناحية النظرية قدم كارل بيرسون (K. Pearson) الكميتان التاليتان:

$$(3.\ 7.\ 3):\ \beta_{2n}=\frac{\mu_{2n+2}}{\mu_2^{n+1}}\ \ ;;\ \ \beta_{2n+1}=\frac{\mu_3\,\mu_{2n+3}}{\mu_2^{n+3}}$$

بوضع $n=0$ فى β_{2n+1} نحصل على β_1 كما فى (3. 6. 8) وبوضع $n=1$ فى β_{2n} نحصـل علـى β_2 كما فى (3. 7. 1) والكميتان β_{2n} و β_{2n+1} إن كانتا لا تستخدمان بصـفة عامة إلا أنهما قد تصادفا القارئ فى بعض الدراسات الإحصائية. والكميتان β_1، β_2 تربط بينهما العلاقة (3. 5. 22c).

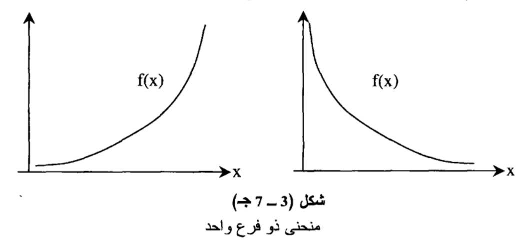
ملاحظـة (3 ــ 7 أ): تعرفنا على المنحنيات المتماثلة فى ملاحظة (2 ــ 12 ــ 4) والشكل (3 ــ 6 أ) الذى يمثل منحنى متماثل، كما تعرفنا فى البند الحالى على المنحنيـات وحيدة المنوال ذات الالتواء الموجب وذات الالتواء السالـب كما فى شـكلى (3 ــ 6 ب) و(3 ــ 6 جـــ). وتعرفنا كذلك على المنحنيات وحيدة المنوال المفرطحة والمدببة، ولكن هـناك منحنيات كثيرة أخرى منها المنحنى الذى على شكل حرف U ويسمى المنحنى ذو الشكل "U" U- Shaped Curve كما يسمى أيضاً المنحنى ذو المنوال المعكوس حيث أن له نهايـة صـغرى واحدة (وليس له قمة) ومن أمثلة ذلك المنحنى الذى يمثل معدل الوفيات حيـث يكون مرتفعاً فى فئات العمر الصغيرة ثم يأخذ فى الانخفاض مع زيادة العمر حتى يصل نهايته الصغرى فى سن الشباب ثم يأخذ فى التزايد مرة أخرى مع زيادة العمر.



شكل (3 ــ 7 ب)

منحنى ذو شكل U (U - Shaped Curve)

كما توجد منحنيات متعددة المنوال ويوجد كذلك منحنيات أخرى مثل منحنى الفرع الواحد كما فى الظواهر التى تكون تكراراتها كبيرة عند القيم الصغرى للظاهرة وصغيرة عند القيم الكبرى أو العكس كما فى الشكل التالى:



شكل (3 ــ 7 جـ)

منحنى ذو فرع واحد

ويوجــد الكثير غير ذلك من المنحنيات ولكن نلفت النظر إلى أن دراستنا للالتواء والتفرطح تناولت المنحنيات وحيدة المنوال فقط سواء كانت متماثلة أو بعيدة عن التماثل.

مثال (3 ــ 7 أ): X متغير له توزيع جاما دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = x e^{-x} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

أوجد درجة التواء هذا التوزيع.

(الحل)

العزم الرائى حول الصفر للمتغير X هو:

$$\mu'_r = \int_0^\infty x^{r+1} e^{-x} dx = \Gamma(r+2)$$

إذن:

$$\mu'_1 = \Gamma(3) = 2 \quad ; \ \mu'_2 = 6 \ ; \ \mu'_3 = 24$$

ومنها نحصل على العزوم المركزية باستخدام العلاقة (3. 5. 15) حيث نجد أن:

$$\mu_2 = 2 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{2} \quad ; \ \mu_3 = 4$$

ومن العلاقة (3. 6. 7) نجد أن معامل الالتواء

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = 1.414$$

وحيـــث أن γ_1 موجبة ــ إذن التوزيع موجب الالتواء ــ وهذا يدل على أن ذيله الأطول ناحية اليمين من المنوال ومنوال هذا التوزيع يمكن إثبات أنه $x_0 = 1$.

مـــثال (3 ــ 7 ب): X متغير عشوائى له توزيع "ت" "t" بدرجات حرية n = 5 ودالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}\,\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)} \ \frac{1}{\left[1 + \frac{x^2}{5}\right]^3} \qquad ; \ -\infty \le x \le \infty$$

أوجد معامل التفرطح لهذا التوزيع.

(الحل)

يمكن إثبات أن العزم الرائى حول الصفر لهذا التوزيع هو:

$\mu'_r = 0$ عندما r عدد فردى أقل من 5

$= \dfrac{5^{\frac{r}{2}}\,\beta\left[\frac{5-r}{2}, \frac{r+1}{2}\right]}{\beta\left[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]}$ عندما r عدد زوجى أقل من 5

ولكـــن عندما $r \geq 5$ فإن μ'_r يكون غير موجود. أنظر العزم الرائى لتوزيع "ت" فى باب التوزيعات المستمرة. إذن العزوم الأربعة الأولى حول الصفر هى:

$$\mu'_1 = 0 \quad , \quad \mu'_2 = \tfrac{5}{3} \quad , \quad \mu'_3 = 0 \quad , \quad \mu'_4 = 25$$

وهى نفسها العزوم المركزية لأن التوقع $\mu'_1 = 0$. ومن العلاقة (2 .7 .3) نجد أن معامل التفرطح

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{25}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} - 3 = 6$$

وبمـــا أن γ_2 موجـــبة إذن الـــتوزيع أقل تفرطحاً حول المنوال (أكثر تحدبا) من التوزيع المعتاد.

(3 ـ 8) عـــزوم المتغـــيرات العشـــوائية الثنائية المشتركة (العزوم الثنائية المشتركة) :

Moments of Two-dimensional Random Variables (Joint Moments):

يمكـــن تعميم النتائج السابقة الخاصة بالمتغير المفرد إلى حالة المتغيرات المتعددة المشـــتركة، ولسهولة العرض نبدأ بحالة متغيران عشوائيان مشتركان. وعزوم المتغيرات العشـــوائية الثنائية المشتركة تسمى بالعزوم الثنائية المشتركة، أو بالعزوم الثنائية. بفرض أن (X, Y) متغـــير عشوائى ثنائى مشترك دالة توزيعه الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ و $g(x, y)$ دالة وحيدة القيمة فى x, y فإن توقع المتغير $g(X, Y)$ يعرف بأنه:

$$(3.8.1): \quad E[g(X, Y)] = \int_{R_2} g(x, y)\, dF(x, y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

إذا كان (X, Y) متغير مستمر ودالة كثافة احتماله المشتركة $f(x, y)$.

$$= \sum_{i} \sum_{k} g(x_i, y_k)\, P(x_i, y_k)$$

إذا كان (X,Y) متغير متقطع ودالة احتماله المشتركة $P_{ik}=P(x_i,y_k)$ عندما $X=x_i$, $Y=y_k$. وذلك بشرط أن يكون التكامل (أو المجموع) السابق متقارب تقارب مطلق كما سبق بيان ذلك فى حالة المتغير المفرد. وإذا وضعنا:

$$g(X,Y)=(X-a)^r\ (Y-b)^s$$

فـــى العلاقة (3. 8. 1) فإن القيمة المتوقعة التى نحصل عليها تسمى بالعزم الثنائى المشـــترك من الدرجة $r+s$ حول النقطة a للمتغير X والنقطة b للمتغير Y، كما تسمى أيضـــاً "بالعزم المتقاطع" "The Product Moment" من الدرجة $r+s$ حول النقطة (a,b) ونرمز له بالرمز $\mu'_{rs}(a,b)$ إذن:

$$(3.\ 8.\ 2):\ \mu'_{rs}(a,b)=E\left[(X-a)^r\ (Y-b)^s\right]$$

$$=\int_{R_2}(x-a)^r\ (y-b)^s\ dF(x,y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^r\ (y-b)^s\ f(x,y)\,dx\ dy$$

إذا كان (X,Y) متغير مستمر.

$$=\sum_{i}\sum_{j}(x_i-a)^r\ (y_k-b)^s\ P_{ik}$$

إذا كان (X,Y) متغير متقطع.

فـــإذا كانـــت $E(X)=a$ و $E(Y)=b$ فـــى العلاقة السابقة نحصل على العزم الثنـــائى المركزى من الدرجة $(r+s)$ ونرمز له بالرمز μ_{rs} (بدون وضع شرطة على الحـــرف μ) وبذلك يكون:

$$(3.\ 8.\ 3):\ \mu_{rs}=E\left\{[X-E(X)]^r\ [Y-E(Y)]^s\right\}$$

$$=\int_{R_2}[x-E(X)]^r\ [y-E(Y)]^s\ dF(x,y)$$

$$=\int_x\int_y[x-E(X)]^r\ [y-E(Y)]^s\ f(x,y)\,dx\ dy$$

إذا كان (X,Y) متغير مستمر.

$$= \sum_i \sum_k [x_i - E(X)]^r \; [y_k - E(Y)]^s \; P_{ik}$$

إذا كان (X,Y) متغير متقطع.

والــنقطة الــتى إحداثــيها $X = E(X) = m_1$ و $Y = E(Y) = m_2$ أى النقطة $[E(X), E(Y)]$ تكــون هــى مركز الثقل للتوزيع الثنائى. والعزوم المركزية μ_{rs} هى العزوم حول مركز الثقل.

أمــا إذا كانت $a = b = 0$ فى العلاقة (3. 8. 2) أو $E(X) = E(Y) = 0$ فى العلاقة (3. 8. 3) فإننا نحصل على العزم الثنائى المشترك حول الصفر من الدرجة $r+s$ ونرمز له بالرمز μ'_{rs} (بوضع شرطة فوق الحرف μ) وبذلك يكون:

$$(3.8.4): \mu'_{rs} = E(X^r \; Y^s) = \int_{R_2} x^r \; y^s \; dF(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r \; y^s \; f(x,y)\, dx\, dy$$

إذا كان (X,Y) متغير مستمر

$$= \sum_i \sum_k x_i^r \; y_k^s \; P_{ik}$$

إذا كان (X,Y) متغير متقطع.

من (2. 21. 1)

$$= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} x_i^r \; y^s \; P_1(x_i)\, f_{21}(y \mid x_i)\, dy$$

إذا كان (X,Y) متغير مختلط من النوع الأول

ومن (2. 21. 18a)

$$= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} x_i^r \; y^s \; f_2(y)\, P_{12}(x_i \mid y)\, dy$$

إذا كان (X,Y) متغير مختلط من النوع الثانى.

إذا كان (X,Y) متغير مشترك دالة توزيعه الاحتمالى $F(x,y)$ قد يكون مطلوب معـــرفة توقع مجموع المتغيرين (أو المركبتين) X و Y وكذلك توقع حاصل ضرب هذين المتغيريـــن وذلك إذا كان X و Y مستقلان أو غير مستقلان. فإذا فرضنا أن القيم المتوقعة $E(X^r)$ و $E(Y^s)$ قـــيم موجـــودة (أى محدودة)، سنحاول إيجاد توقع المتغير العشوائى $Z = X^r + Y^s$ وكذلـــك توقـــع المتغير العشوائى $U = X^r Y^s$ وذلك دون افتراض أن المتغيران X و Y مستقلان.

إذن بوضع:

$$g(X,Y) = X^r + Y^s$$

فـــى العلاقة (3. 8. 1) لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة s, r التى يكون عندها $E(X^r)$ و $E(Y^s)$ موجودة نحصل على:

$$(3.8.5):\ E(Z) = E(X^r + Y^s) = \int_x x^r \int_y d\,F(x,y) + \int_y y^s \int_x d\,F(x,y)$$

$$= \int_x x^r\, d\,F_1(x) + \int_y y^s\, d\,F_2(y) = E(X^r) + E(Y^s)$$

وكما نعلم تتحول علامات التكامل إلى المجموع فى حالة المتغير المتقطع.

من العلاقة السابقة يتضح أن:

$$E(X^r + Y^s) = E(X^r) + E(Y^s)$$

وذلـــك إذا كان المتغيران X و Y مستقلان أو غير مستقلان. ولكن الوضع يختلف فـــى حالـــة توقع المتغير $U = X^r Y^s$، إذ أن توقع حاصل الضرب $X^r Y^s$ ليس من الضـــرورى أن يساوى حاصل ضرب التوقعين $E(X^r)$ و $E(Y^s)$ إلا إذا كان المتغيران X و Y مستقلان. فإذا كان X و Y مستقلان فيمكن إثبات أن:

$$(3.8.6):\ E(U) = E(X^r Y^s) = E(X^r)\cdot E(Y^s)$$

وذلك بوضع:

$$g(X,Y) = X^r Y^s$$

فـــى العلاقة (3. 8. 1) لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة s, r التى يكون عندها التوقعات $E(X^r)$ و $E(Y^s)$ موجودة ــ نحصل على:

$$E(X^r Y^s) = \int_x \int_y x^r y^s \, dF(x,y)$$

فـــإذا كان المتغيران X و Y مستقلان فإن $F(x,y) = F_1(x)\, F_2(y)$ وبالتالى فإن العلاقة السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$E(X^r Y^s) = \int_x x^r \, dF_1(x) \int_y y^s \, dF_2(y) = E(X^r) \cdot E(Y^s)$$

ممـــا ســـبق يتضـــح أنه إذا كان المتغيران X و Y مستقلان فإن العزم الثنائى ذو الدرجـــة $r+s$ حـــول الصفر μ'_{rs} يمكن وضعه فى صورة حاصل ضرب عاملين على النحو التالى:

$$(3.\ 8.\ 7):\ \mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = E(X^r) \cdot E(Y^s) = \mu'_{r0} \cdot \mu'_{0s}$$

حيث μ'_{r0} هو العزم الرائى حول الصفر للمتغير X و μ'_{0s} هو العزم من الدرجة s حول الصفر للمتغير Y.

من العلاقة (3. 8. 4) نجد أن:

$$(3.\ 8.\ 8):\ \begin{cases} \mu'_{10} = E(X) = m_1 \\ \mu'_{01} = E(Y) = m_2 \end{cases}$$

وهما عزمان من الدرجة الأولى حول الصفر ــ ويمكن كتابتهما فى الصورة μ_{10} و μ_{01} بـــدون شرطة ــ حيث أن العزوم المركزية التى من الدرجة الأولى المناظرة لهما تســـاوى الصـــفر كمـــا يتضح من المعادلات (3. 8. 10) التالية ــ كما يستحسن أحياناً أن نكتبهما مستخدمين الرمزين m_1 و m_2 على الترتيب كما فى العلاقات (3. 8. 8) السابقة.

ومن العلاقة (3. 8. 4) أيضاً نجد أن:

$$(3.\ 8.\ 9):\ \begin{cases} \mu'_{20} = E(X^2) \\ \mu'_{02} = E(Y^2) \end{cases}$$

وهما عزمان من عزوم الدرجة الثانية حول الصفر.

ومن العلاقة (3.8.3) نجد أن:

$$(3.8.10):\begin{cases}\mu_{10}=E(X-\mu'_{10})=0\\ \mu_{01}=E(Y-\mu'_{01})=0\end{cases}$$

وهما عزمان مركزيان من الدرجة الأولى ـــ كما نجد من عزوم الدرجة الثانية من العلاقة (3.8.3) أن:

$$(3.8.11):\begin{cases}\mu_{20}=E(X-\mu'_{10})^2=\mu'_{20}-\mu'^2_{10}=\sigma_1^2\\ \mu_{02}=E(Y-\mu'_{01})^2=\mu'_{02}-\mu'^2_{01}=\sigma_2^2\end{cases}$$

حيـــث μ_{20} هو تباين X ـــ أو العزم المركزى الثانى للمتغير X ـــ وبالمثل μ_{02} هـــو تبايـــن Y. ونرمـــز لهمـــا كذلـــك بالرمزيـــن $V(x)$ و $V(y)$ علـــى الترتيب و $\sigma_1=\sqrt{V(x)}$ و $\sigma_2=\sqrt{V(y)}$ هما الانحراف المعيارى لكل من X و Y.

كمـــا أن تغاير X و Y (Covariance of X and Y) يعتبر من العزوم المركزية من الدرجـــة الثانية التى يمكن الحصول عليها من العلاقة (3.8.3) بوضع $r = s = 1$ فنحصل على تغاير X و Y فى الصورة التالية:

$$(3.8.12):\ Cov(X,Y)=\mu_{11}=E[X-E(x)]\,[Y-E(y)]$$
$$=E(XY)-E(X)\,E(Y)$$

ومن علاقة (3.8.4)

$$=\mu'_{11}-\mu'_{10}\,\mu'_{01}$$

وأحـــياناً نســـتخدم الرمـــز V_{12} للإشارة إلى تغاير X و Y. وباستخدام العلاقة (3.8.12) السابقة كتعريف للتغاير نلاحظ أن:

$$(3.8.13):\ Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$$
$$V_{12}=V_{21}$$

فإذا كان المتغيران X و Y مستقلان فنرى من العلاقة (3.8.7) أن:

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

وبناء على ذلك نستنتج من العلاقة (3. 8. 12) النتيجة التالية:

إذا كان X و Y متغيران مستقلان فإن:

$$(3.\,8.\,14):\ \mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

ملاحظـــة (3 ــ 8 أ): العلاقة (3. 8. 14) توضح أنه إذا كان X و Y مستقلان يكون $Cov(X,Y)=0$ ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً إذ أن الشرط $Cov(X,Y)=0$ لا يترتــب علــيه ضرورة أن يكون المتغيرانX و Y مستقلان. والمثال التالى يوضح حالة متغيران X و Y غير مستقلان بالرغم من أن تغايرهما يساوى الصفر.

مــثال (3 ــ 8أ): نفــرض أن (X,Y) متغــير عشــوائى يحقــق العلاقة الدالية $Y=X^2$ باحتمال يساوى الواحد الصحيح. فإذا كان المتغير X له توزيع احتمالى متماثل حــول النقطة $x=0$ وعزومه الثلاثة الأولى حول هذه النقطة $(x=0)$ موجودة، سنجد مــن ملاحظــة (3 ــ 5 ــ 3 ب) أن: $E(XY)=E(X^3)=0\quad;\quad E(X)=0$ وبناء على ذلك نجد من (3. 8. 12) أن:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X\,Y)-E(X)E(Y)=0$$

بيــنما Y يمكن تحديدها تماماً من X باحتمال واحد صحيح ــ أى أن Y و X غير مستقلان بالرغم من أن تغايرهما يساوى الصفر.

نفــرض أن X و Y متغــيران عشــوائيان تباينهما موجود ولنرمز لهما بالرمزين $V(X)$ و $V(Y)$ والمتغير العشوائى: $Z=X+Y$ إذن من العلاقة (3. 3. 2) نجد أن:

$$\begin{aligned}V(Z)=V(X+Y)&=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2\\&=E(X^2)+2E(X\,Y)+E(Y^2)-[E(X)]^2-[E(Y)]^2-2E(X)E(Y)\\&=E(X^2)-[E(X)]^2+E(Y^2)-[E(Y)]^2+2E(X\,Y)-2E(X)E(Y)\end{aligned}$$

إذن نصل إلى العلاقة التالية:

$$(3.\,8.\,15):\ V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

فإذا كان X و Y مستقلان نجد باستخدام العلاقة (3. 8. 14) أن:

$$(3.\,8.\,16):\ V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

وبنفس الإثبات السابق ــ إذا كان a و b مقداران ثابتان يمكن إثبات أن:

$$(3.\,8.\,17):\ V(a\,X+b\,Y)=a^2\,V(X)+b^2\,V(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

إذا كـــان الانحرافان المعياريان σ_1 و σ_2 للمتغيرين العشوائيين X و Y موجودان ومختلفان عن الصفر فيمكن تعريف ثابت (أو بارامتر) من أهم الثوابت التى تميز المتغير الثنائى (X, Y) هو "معامل الارتباط" "Coefficient of Correlation" بين X و Y ونرمز له بالرمز $\rho(x, y)$ أو مجرد الحرف ρ عندما يكون من الواضح أن المتغيران هما X و Y وأحياناً نستخدم الرمز ρ_{xy} أو ρ_{12} حيث يشير الدليل 1 إلى المتغير الأول X والدليل 2 إلى المتغير الثانى Y. ويعرف معامل الارتباط ρ_{xy} بين المتغيرين X و Y بالعلاقة (3. 8. 18) التالـــية ويسمى بـــ "معامل ارتباط بيرسون" أو "معامل الارتباط ذو العزم التضريبى" نسبة لوجود العزم $\mu_{11} = \mathrm{Cov}(X, Y)$ فى بسط معامل الارتباط كما يلى:

$$(3.\ 8.\ 18):\ \rho_{xy} = \frac{E[X - m_1][Y - m_2]}{\sqrt{E(X - m_1)^2 \cdot E(Y - m_2)^2}} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x\, \sigma_y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

حيث $E(X) = m_1$ و $E(Y) = m_2$.

ملاحظـــــة (3 ـ 8 ب): إذا كـــان المتغــــيران X و Y مســــتقلان يكـــــون $\mu_{11} = \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ وبالـــتالى يكون $\rho = 0$ ولكن العكس غير صحيح ــ كما سبق بـــيان ذلك فى ملاحظة (3 ــ 8 أ) ــ لذلك عندما يكون $\rho = 0$ نقول أن المتغيران X و Y غـــير مرتـــبطان Uncorrelated (لنفرق بين عدم الارتباط والاستقلال)، وهذا يوضح أن الاستقلال أقوى من عدم الارتباط. ومعامل الارتباط يحقق الخاصية الأساسية التالية:

$$(3.\ 8.\ 19):\ \begin{cases} -1 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \rho^2 \le 1 \end{cases}$$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة كما يلى:

لأى عددين حقيقيين t و u نجد أن:

$$E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2 \ge 0$$

حيث $E(X) = m_1$ و $E(Y) = m_2$.

$$\therefore t^2 E(X - m_1)^2 + 2tu\, E(X - m_1)(Y - m_2) + u^2 E(Y - m_2)^2 \ge 0$$

$$\therefore t^2 \sigma_1^2 + 2tu\mu_{11} + u^2 \sigma_2^2 \ge 0$$

وهذا يترتب عليه أن

$$(3.8.20):\ \sigma_1^2\sigma_2^2-\mu_{11}^2\geq 0$$

أو

$$-\sigma_1\sigma_2\leq\mu_{11}\leq\sigma_1\sigma_2$$

أى أن:

$$-1\leq\frac{\mu_{11}}{\sigma_1\,\sigma_2}\leq 1$$

وهذا يثبت صحة المتباينة (3.8.19).

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 (تباينى X و Y) موجودان وموجبان، حيث:

$$\text{Cov}(X,Y)=\mu_{11}=v_{12}=v_{21}$$

$$\sigma_1^2=V(X)=v_{11}\quad;\quad\sigma_2^2=V(Y)=v_{22}$$

إذن يمكـــن أن نضـــع عزوم الدرجة الثانية للمتغير الثنائى المشترك (X,Y) فى شـــكل مصفوفة تسمى "مصفوفة التغاير" للمتغير الثنائى المشترك (X,Y)، أو "مصفوفة عـــزوم الدرجـــة الثانية" للمتغير (X,Y) The Covariance Matrix or The Matrix of Second-order Moments ونرمـــز لهـــا بالرمـــز $V_2(X,Y)$ أو مجرد V_2 ـ إذا كان واضحاً من سياق العرض أن مصفوفة التغاير للمتغيرين X, Y ـ وذلك كما يلى:

$$(3.8.21a):\ V_2(X,Y)=V_2=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}$$

وهـــى مصفوفة متماثلة عناصر قطرها الرئيسى تباينى X و Y وكل من العنصرين الآخريـــن هو تغاير X و Y. فإذا كان المتغيران X و Y مستقلان تكون $V_{12}=V_{21}=0$ وتكـــون مصـــفوفة التغاير مصفوفة قطرية. ويمكن إثبات أن محدد مصفوفة التغاير دائماً يساوى كمية غير سالبة، إذ نجد من علاقة (3.8.21a) أن محدد مصفوفة التغاير هو:

$$(3.8.21b):\ |V_2|=v_{11}\,v_{22}-v_{12}^2=\sigma_1^2\sigma_2^2-\mu_{11}^2\geq 0$$

وهـــذه كمـــية غير سالبة كما يتضح من العلاقة (3.8.20) ولذا نقول أن مصفوفة التغاير مصفوفة غير سالبة.

وكمـــا قدمـــنا العـــزوم المشتركة العادية μ'_{rs} و μ_{rs} نقدم أيضاً العزوم المشتركة المطلقـــة والعاملـــية. يعرف العزم المشترك المطلق $\nu'_{rs}(a,b)$ من الدرجة $r+s$ حول النقطة (a,b) فى المستوى R_2 بأنه:

$$(3.8.22):\ \nu'_{rs}(a,b)=E\left(|X-a|^{r}\cdot|Y-b|^{s}\right)$$

والعزم المشترك المطلق ν'_{rs} من الدرجة $r+s$ حول النقطة $(0,0)$:

$$(3.8.23):\ \nu'_{rs}=E\left(|X|^{r}\cdot|Y|^{s}\right)$$

والعزم المشترك المركزى المطلق ν_{rs} من الدرجة $r+s$:

$$(3.8.24):\ \nu_{rs}=E\left(|X-m_1|^{r}\cdot|Y-m_2|^{s}\right)$$

حيث $E(X)=m_1$ و $E(Y)=m_2$.

كما أن العزم العاملى المشترك من الدرجة $r+s$ حول النقطة (a,b) يعرف بالعلاقة:

$$(3.8.25):\ \mu'_{[r][s]}(a,b)=E\left[(X-a)^{[r]}\cdot(Y-b)^{[s]}\right]$$

$$;\ [r]=r(r-1)\ldots\times2\times1\ ,\ [s]=s(s-1)\times\ldots\times2\times1$$

والعزم المشترك العاملى من الدرجة $r+s$ حول النقطة $(0,0)$:

$$(3.8.26):\ \mu'_{[r][s]}=E\left\{(X)^{[r]}(Y)^{[s]}\right\}$$

والعزم المركزى العاملى المشترك من الدرجة $r+s$:

$$(3.8.27):\ \mu_{[r][s]}=E\left\{(X-m_1)^{[r]}\cdot(Y-m_2)^{[s]}\right\}$$

حيـــــث $E(X)=m_1$ و $E(Y)=m_2$ والقـــــوى $[r]$ و $[s]$ همـــــا $[r]=r(r-1)\ldots\times2\times1\ ,\ [s]=s(s-1)\times\ldots\times2\times1$.

(3 ـ 9) عزوم المتغيرات العشوائية الشرطية (العزوم الشرطية):

Moments of Conditional Random Variables (Conditional Moments):

إذا كـــان (X,Y) متغـــير ثنائى مشترك دالة توزيعه الاحتمالى $F(x,y)$ فيمكن تقديـــم العـــزوم الشرطية لأحد المتغيرين X (أو Y) عندما يأخذ المتغير الآخر قيمة ثابتة وذلك فى الحالات التالية:

أولاً: إذا كان (X,Y) من النوع المتقطع.

ثانياً: إذا كان (X,Y) من النوع المستمر.

ثالثاً: إذا كان (X,Y) من النوع المختلط فيه المتغير المستقل متقطع والتابع مستمر.

رابعاً: إذا كان (X,Y) من النوع المختلط فيه المتغير المستقل مستمر والتابع متقطع.

وسنعرض كل حالة من هذه الحالات على التوالى.

أولاً: العزوم الشرطية عندما يكون (X,Y) من النوع المتقطع:

بفـــرض أن المتغـــير العشـــوائى الثنائى (X,Y) من النوع المتقطع، ويأخذ القيم (x_i,y_k) باحتمالات P_{ik}، إذن من (2 .17 .2) و(3 .2 .7b) يمكن تعريف التوقع الشرطى للدالة $g(X,Y)$ عندما $X=x_i$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.1):\ E[g(X,Y)\,|\,X=x_i]=\sum_k g(x_i,y_k)\ P(y_k\,|\,x_i)$$

$$=\sum_k g(x_i,y_k)\frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

حيـــث $P_{i.}=\sum_k P_{ik}$ هـــى احـــتمال أن $X=x_i$، وذلك طبعاً بشرط أن يكون المجمـــوع الســـابق مـــتقارب تقارب مطلق ــ (والتقارب المطلق الذى يعتبر شرط لازم لـــتعريف الـــتوقع ســـنعتبر دائمـــا أنـــه مفترض دون الحاجة إلى ذكر ذلك) ــ وبوضع $g(X,Y)=Y$ فـــى العلاقـــة (3 .9 .1) نحصـــل على التوقع الشرطى للمتغير Y عندما $X=x_i$:

$$(3.9.2):\ E[Y\,|\,X=x_i]=E(Y\,|\,x_i)=\sum_k y_k\frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

والمتغــير Y عندما $X = x_i$ يمكن أن نرمز له بالرمز $Y | x_i$ ويسمى بالمتغير الشرطى أو المتغير التابع أما المتغير X فيسمى بالمتغير المستقل. كما أن التوقع الشرطى $E(Y | x_i)$ هــو توقــع الــتوزيع الاحتمالى الشرطى $P(y | x_i)$ وبالتالى فهو الإحداثى الرأسى للنقطة التى تمثل مركز ثقل هذا التوزيع الاحتمالى بينما x_i هو الإحداثى الأفقى. أى أن النقطة $[x_i ; E(Y | x_i)]$ هى مركز ثقل التوزيع الاحتمالى الشرطى $P(y | x_i)$. وعــندما تــأخذ X كــل قــيمها الممكــنة $x_1, x_2, ...$ نحصل على مجموعة من النقط $[x_i , E(Y | x_i)]$ لجمــيع قيم $i = 1,2, ...$ تمثل المحل الهندسى لخط فى المستوى R_2 يســمى خط انحدار Y على X أو خط انحدار متوسطات Y على X وهو ما سوف نقدمه فــى الــباب الــرابع. وبوضع $g(X, Y) = Y^r$ فى العلاقة (3. 9. 1) حيث $r = 1,2, ...$ نحصــل علــى الــتوقع الشرطى للمتغير Y^r عندما $X = x_i$ (أى للمتغير الشــرطى $Y^r | x_i$) وهو العزم الشرطى من الدرجة r وذلك فى الصورة التالية:

$$(3.\ 9.\ 3):\ E\left[Y^r \mid X = x_i\right] = E\left(Y^r \mid x_i\right) = \sum_k y_k^r \frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

ويمكــن الحصول على العزوم الشرطية حول التوقع الشرطى للمتغير Y^r عندما $X = x_i$ وذلك بوضع $g(X, Y) = [Y - E(Y | x_i)]^r$ فى (3. 9. 1) فنحصل على:

$$(3.\ 9.\ 4):\ E\left\{\left[Y - E(Y \mid x_i)\right]^r \mid X = x_i\right\} = \sum_k \left[y_k - E(Y \mid x_i)\right]^r \frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

وعلــى ذلــك فإن التباين الشرطى للمتغير Y عندما $X = x_i$; $V(Y | x_i)$ يمكن الحصول عليه من العلاقة السابقة عندما $r = 2$:

$$(3.\ 9.\ 5):\ V(Y \mid x_i) = E\left\{\left[Y - E(Y \mid x_i)\right]^2 \mid x_i\right\}$$

$$= \sum_k \left[y_k - E(Y \mid x_i)\right]^2 \frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

والتبايــن الشــرطى $V(Y | x_i)$ يســمى أحــياناً بتباين الباقى للمتغير Y عندما $X = x_i$ Residual Variance of Y given $X = x_i$ ـــ أنظر الباب الرابع "الانحدار" ـــ كما يســمى أيضاً بالعزم الثانى الشرطى حول التوقع الشرطى. وتوجد علاقة هامة بين التوقع والتباين الشرطيين نقدمها فى الملاحظة التالية.

ملاحظـــة (3 ــ 9 أ): العزم الشرطى الثانى يكون أصغر ما يمكن إذا كان محسوباً حـــول الـــتوقع الشرطى. أى أن التباين الشرطى $V(Y \mid x_i)$ هو النهاية الصغرى للعزم الشرطى الثانى.

ويمكن إثبات أن الملاحظة السابقة صحيحة سواء كان المتغيران X وY من النوع المتقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه وإثبات ذلك متروك للطالب. ومما هو جدير بالذكر أن العـــزوم الشرطية للمتغير الشرطى $Y \mid x_i$ كل منها يعتبر كمية ثابتة عندما $X = x_i$ ــ فمـــثلاً الـــتوقع الشرطى $E(Y^r \mid x_1)$ يعتبر كمية ثابتة عندما $X = x_1$ ــ وحيث أن المتغير العشوائى X يأخذ القيم .... $x_1, x_2, ..., x_1, ...$ إذن يمكن النظر إلى الكميات الثابتة:

$$E(Y^r \mid x_1)\ ,\ E(Y^r \mid x_2), ...$$

علـــى أنهـــا متغـــير عشـــوائى فـــى x (أو كمية تتغير بتغير x) نرمز له بالرمز $\varphi(x) = E(Y^r \mid x)$ وأن هـــذا المتغـــير يـــأخذ القيم $\varphi(x_1) = E(Y^r \mid x_i)$ لجميع قيم $i = 1, 2, ...$ باحتمالات $P_{i.} = P(x_i) = \Pr[X = x_1]$ فيكون توقع هذا المتغير هو:

$$E[\varphi(x)] = E[E(Y^r \mid x)] = \sum_i [E(Y^r \mid x_i)] P_{i.}$$

ومن (3. 9. 3)

$$= \sum_i \left[\sum_k y_k^r P(y_k \mid x_i) \right] P_{i.}$$

حيث $P_{i.} = P(x_i)$ إذن من (2. 17. 7)

$$= \sum_i \sum_k y_k^r P(x_i, y_k) = \sum_k y_k^r P(y_k) = E(Y^r)$$

وهـــذا يثبت أن توقع العزم الشرطى $[E(Y^r \mid x)]$ يساوى العزم العادى $E(Y^r)$ ويمكن صياغة ذلك فى العلاقة التالية:

$$(3.9.6):\ E[E(Y^r \mid x)] = E(Y^r)$$

العلاقة (3. 9. 3) تعطى عزوم المتغير الشرطى Y^r لجميع قيم $r = 1, 2, ...$ عندما يـــأخذ المتغـــير المســـتقل X قيمة ثابتة معينة x_i، ونقدم فيما يلى صيغة لعزوم المتغير الشرطى Y^r لجميع قيم $r = 1, 2, ...$ عندما يأخذ المتغير المستقل X أى قيمة ثابتة معينة تمثل إحدى عناصر المجموعة A (أى عندما $X \in A$) حيث A مجموعة جزئية من فراغ

المتغير X. فإذا كانت A مجموعة جزئية من نقط الاحتمال ...$x_1, x_2,$ للمتغير X فإن من (3. 9. 3) نجد أن:

$$E\left[Y^r \mid X\in A\right]=\sum_k y_k^r \Pr\left[Y=y_k \mid X\in A\right]$$

$$=\sum_k y_k^r \frac{\Pr\left[Y=y_k\ ;\ X\in A\right]}{\Pr\left[X\in A\right]}$$

ومن (2. 14. 4)

$$=\sum_k y_k^r \frac{\sum_{i\,x_i\in A} P_{ik}}{\sum_{J:x_J\in A} P_{J.}}$$

$$=\sum_{i\,x_i\in A}\left[\sum_k y_k^r\left(\frac{P_{ik}}{P_i}\right)\right]\cdot\left(\frac{P_i}{\sum_{J:x_J\in A} P_{J.}}\right)$$

ومن علاقة (3. 9. 3)

$$=\sum_{i:x_i\in A}\left[E\left(Y^r \mid x\right)\right]\frac{P_{i.}}{\sum_{J.x_J\in A} P_{J.}}$$

الدالة $\left(\frac{P_{i.}}{\sum_{J:x_J\in A} P_J}\right)$ تعتبر دالة احتمال لتوزيع مبتور فى المدى A. إذن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة هو:

$$E\left[E\left(Y^r \mid x\right) \mid X\in A\right]$$

وهذا يمكن صياغته فى العلاقة التالية:

$$(3.9.7):\ E\left[E\left(Y^r \mid x\right) \mid X\in A\right]=E\left(Y^r \mid X\in A\right)$$

سبق تعريف التباين الشرطى بالعلاقة (5 .9 .3) وهو من أهم العزوم الشرطية ويمكن وضعه فى الصورة التالية:

$$(3.9.8):\ V\left(Y \mid x_i\right)=E\left(Y^2 \mid x_i\right)-\left[E\left(Y \mid x_i\right)\right]^2$$

وإذا كان $V(Y)$ هو التباين الكلى للمتغير Y فيمكن إثبات أن:

$$(3.9.9):\ V(Y)=E[V(Y|x)]+V[E(Y|x)]$$

(الإثبات)

من علاقة (3.9.8) نجد أن:

$$E[V(Y|x)]=E\{E(Y^2|x)\}-E[E(Y|x)]^2$$

ومن علاقة (3.9.6)

$$=E(Y^2)-E[E(Y|x)]^2$$

إذن:

$$(3.9.9a):\ E[V(Y|x)]=\left\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\right\}-\left\{E[E(Y|x)]^2-[E(Y)]^2\right\}$$

ومن (3.9.6) نعلم أن:

$$E[E(Y|x)]=E(Y)$$

$$\therefore [E(Y)]^2=\{E[E(Y|x)]\}^2$$

وبالتعويض عن ذلك فى (3.9.9a) نجد أن

$$E[V(Y|x)]=\{V(Y)\}-\left\{E[E(Y|x)]^2-(E[E(Y|x)])^2\right\}$$

$$=V(Y)-V[E(Y|x)]$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (3.9.9).

هـ. ط. ث.

إذا كانــت $g_1(Y)$ دالة فى المتغير Y و $g_2(X)$ دالة فى المتغير X فيمكن من العلاقة (3.9.9) إثبات أن:

$$(3.9.10):\ E[g_1(Y)+g_2(X)|X=x_i]$$

$$=E[g_1(Y)|X=x_i]+E[g_2(X)|X=x_i]$$

$$=E[g_1(Y)|X=x_i]+g_2(x_i)$$

وكذلك:

$$(3.9.11):\ E[g_1(Y)g_2(X)|X=x_i]=g_2(x_i)E[g_1(Y)|X=x_i]$$

ويمكــن الحصــول على الصيغ المقابلة لكل الصيغ السابقة عندما يكون X هــو المتغــير الــتابع أو الشرطى وY هو المتغير المستقل وذلك بكتابة X بدلاً من Y وY بدلاً مــن X.

ثانياً: العزوم الشرطية عندما يكون (X,Y) من النوع المستمر:

إذا كــان المتغــير العشــوائى المشترك (X,Y) من النوع المستمر ودالة كثافة احــتماله المشتركة $f(x,y)$ فيمكن من (2. 17. 10a) و(3. 2. 7c) تعريف التوقع الشرطى للدالة $g(X,Y)$ عندما $X=x$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.12):\ E[g(X,Y)|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\ f(y|x)dy$$

$$=\frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f(x,y)\,dy$$

حيث $f_1(x)>0$.

عــندما نضــع $g(X,Y)=Y$ فى العلاقة السابقة نحصل على التوقع الشرطى للمتغير Y عندما $X=x$ كما يلى:

$$(3.9.13):\ E(Y|X=x)=E(Y|x)=\frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)\,dy$$

والــتوقع الســابق هــو الإحداثى الرأسى لمركز الثقل لكمية الاحتمال الناتجة عن الــتوزيع الاحتمالى $f(y|x)$ المنتشرة فى الشريط المحدد بالعلاقة $x<X<x+h$ فى المستوى R_2 عندما $h\to 0$، ومركز الثقل فى هذه الحالة هو النقطة $[x\ ;\ E(Y|x)]$، كما أن مجموعة النقط $[x\ ;\ E(Y|x)]$ فى المستوى R_2 لجميع قيم x الممكنة على كل مــدى المتغير X تشكل المحل الهندسى لخط فى المستوى R_2 هو خط انحدار Y على X ــ أو خط انحدار متوسطات Y على X ــ ومعادلة هذا الخط هى:

$$(3.9.14a):\ Y=E(Y|x)$$

والتوقع $E(Y|x)$ ما هو إلا دالة فى x تسمى دالة انحدار Y على X، فلو كانت هذه الدالة تأخذ الصورة التالية:

$$(3.9.14b):\ E(Y|x) = a + bx$$

يكـــون معـــنى ذلك أن دالة انحدار Y على X تمثل معادلة خط مستقيم ونقول أن انحـــدار Y على X انحدار خطى مستقيم والثابتان a وb يسميان ثابتى الانحدار، كما أن a يســـمى ثابت الانحدار وb يسمى معامل انحدار Y على X. وبوضع $g(X,Y) = Y^r$ فى معادلـــة (3.9.12) نحصل على العزم الشرطى من الدرجة r للمتغير Y عندما X = x فى الصورة التالية:

$$(3.9.15):\ E(Y^r|X=x) = E(Y^r|x) = \frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty} y^r f(x,y)dy$$

وبأسلوب مماثل لحالة المتغير المتقطع يمكن الحصول على العزوم الشرطية حول الـــتوقع الشرطى (أى العزوم الشرطية المركزية) للمتغير المستمر Y عندما X = x وذلك بوضـع $g(X,Y) = [Y - E(Y|x)]^r$ فى العلاقة (3.9.12) فنحصل على:

$$(3.9.16):\ E[Y - E(Y|x)]^r = \frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty}[Y - E(Y|x)]^r\ f(x,y)\ dy$$

ويكـــون التبايـــن الشرطى للمتغير Y عندما X = x هو ما نحصل عليه بوضع r = 2 فى العلاقة السابقة ونرمز له بالرمز $V(Y|x)$ حيث:

$$(3.9.17):\ V(Y|x) = E\{[Y - E(Y|x)]^2\ |x\}$$

$$= \frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty}[y - E(Y|x)]^2\ f(x,y)\ dy$$

كمـــا أنـــه بضرب طرفى العلاقة (3.9.12) فى $f_1(x)$ ومكاملة الطرفين بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[g(X,Y)|X=x]\ f_1(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ f(x,y)\ dx\ dy$$

أى أن:

$$(3.9.18):\ E\{E[g(X,Y)|X=x]\} = E\{g(X,Y)\}$$

وعندما $g(X,Y)=Y^r$ فى العلاقة السابقة نحصل على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 6) وللحصول على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 7) نفرض أن A مجموعة جزئية بورالـــيه من خط الأعداد الحقيقية R_1 $(A \subset R_1)$ حيث $\Pr(X \in A) > 0$ إذن بأسلوب ممـــاثل للحصـــول علـــى العلاقة (3. 9. 7) ولكن باستخدام علامة التكامل بدلاً من علامة المجموع نجد أن:

$$(3.9.19):\ E\left[Y^r \mid X \in A\right] = \frac{1}{\Pr(X \in A)} \int_{-\infty}^{\infty} y^r \int_{x \in A} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x \in A} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y^r \frac{f(x,y)}{f_1(x)}\,dy \right\} \frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)}\,dx$$

$$= \int_{x \in A} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y^r\, f(y \mid x)\,dy \right\} \left[\frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)} \right] dx$$

الدالة $\dfrac{f_1(x)}{\Pr[X \in A]}$ تعتبر دالة كثافة احتمال لتوزيع مبتور فى المدى A إذن:

$$E\left[Y^r \mid X \in A\right] = \int_{x \in A} \left\{E\left(Y^r \mid x\right)\right\} \frac{f_1(x)}{\Pr[X \in A]}\,dx$$

إذن:

$$(3.9.20):\ E\left[Y^r \mid X \in A\right] = E\left\{E\left(Y^r \mid x\right) \mid X \in A\right\}$$

وعندما تكون $A = R_1$ (أو عندما تكون A هى كل فراغ المتغير X) نحصل من العلاقة السابقة على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 6) حيث نجد من (3. 9. 19) أن:

$$E\left(Y^r \mid X \in R_1\right) = E\left(Y^r\right)$$

$$= \frac{1}{\Pr[X \in R_1]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^r f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^r f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} y^r\, f(y\,|\,x)\, dy\right\} f_1(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(Y^r\,|\,x\right) f_1(x)\, dx$$

إذن:

$$(3.9.21):\ E\left(Y^r\right) = E\left\{E\left(Y^r\,|\,x\right)\right\}$$

وبالمثل يمكن الحصول على العلاقة المقابلة للمعادلة (3.9.9) في الصورة التالية:

$$(3.9.22):\ V(Y) = E\{V(Y\,|\,x)\} + V\{E(Y\,|\,x)\}$$

وكذلك العلاقة المقابلة للعلاقة (3.9.10) في الصورة:

$$(3.9.23):\ E\{[g_1(Y) + g_2(X)]\,|\,X = x\} = E[g_1(Y)\,|\,x] + g_2(x)$$

والعلاقة المقابلة للعلاقة (3.9.11) في الصورة:

$$(3.9.24):\ E\{g_1(Y)g_2(X)\,|\,X = x\} = g_2(x)E[g_1(Y)\,|\,x]$$

ثالثاً: العزوم الشرطية عندما يكون (X, Y) متغير مختلط من النوع الأول:

في هذه الحالة يكون المتغير المستقل X من النوع المتقطع والمتغير التابع Y من النوع المستمر. إذن من (2.21.1) و(3.2.7c) يمكن تعريف التوقع الشرطي للدالة $g(X, Y)$ عندما $X = x_i$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.25):\ E[g(X, Y)\,|\,X = x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_i, y)\, f_{21}(y\,|\,x_i)\ dy$$

وبوضع $g(X, Y) = Y$ يمكن تعريف التوقع الشرطي للمتغير Y عندما $X = x_i$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.26):\ E(Y\,|\,X = x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{21}(y\,|\,x_i)\, dy$$

وبوضع $g(X, Y) = Y^r$ في (3.9.25) نحصل على العزم الشرطي من الدرجة r للمتغير Y عندما $X = x_i$:

$$(3.9.27):\ E\left[Y^r\,|\,X = x_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y^r\, f_{21}(y\,|\,x_i)\, dy$$

ويمكـــن الحصول على العزوم الشرطية حول التوقع الشرطى للمتغير Y^r عندما $X = x_i$ وذلك بوضع $g(X, Y) = [Y - E(Y \mid x_i)]^r$ فى (3. 9. 25) فنحصل على:

$$(3.\,9.\,28):\; E\left\{[Y - E(Y \mid x_i)]^r \mid X = x_i\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [Y - E(Y \mid x_i)]^r f_{21}(y \mid x_i)\, dy$$

ويكون التباين الشرطى للمتغير Y عندما $X = x_i$ هو:

$$(3.\,9.\,29):\; V(Y \mid x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y \mid x_i)]^2\; f_{21}(y \mid x_i)\, dy$$

حيث $E(Y \mid x_i)$ كما فى العلاقة (3. 9. 26).

ويعتـــبر المتغـــير العشـــوائى $E(Y^r \mid x_i)$ دالة فى x لذلك يمكن استخدام الرمز التالى:

$$\varphi(x) = E(Y^r \mid x)$$

وتوقع المتغير $\varphi(x)$ هو:

$$E[\varphi(x)] = \sum_i \varphi(x_i) P_{i.}$$

ومن (3. 9. 27)

$$E[E(Y^r \mid x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^r\; f_{21}(y \mid x_i)\, dy\right] P_1(x_i)$$

ومن (2. 21. 4b)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^r\; f_2(y)\, dy = E(Y^r)$$

إذن:

$$(3.\,9.\,30):\; E[E(Y^r \mid x)] = E(Y^r)$$

ويمكـــن كذلك إثبات أن العلاقة (3. 9. 7) [وكذلك العلاقة (3. 9. 20)] تظل صحيحة فى حالة المتغير المختلط من النوع الأول وذلك بأسلوب مشابه لما اتبع فى الإثبات السابق

لكـــل مـــن العلاقتيـــن المشار إليهما مع استخدام الدالة $f(y,x_i)=f_{21}(y\,|\,x_i)\,P_1(x_i)$ المعطاة بالعلاقة (2. 21. 7) بدلاً من الدالة P_{ik} المعطاة بالعلاقة (2. 17. 2).

ويمكن إثبات أن العلاقات (3. 9. 9) و(3. 9. 10) و(3. 9. 11) تظل صحيحة فى حالة المتغير المختلط من النوع الأول وذلك بأسلوب مماثل لما سبق اتباعه.

رابعاً: العزوم الشرطية عندما يكون (X,Y) متغير مختلط من النوع الثانى:

فـــى هـــذه الحالـــة يكـــون المتغـــير المســـتقل (ليكـــن Y) مـــن النوع المستمر $(-\infty \le Y \le \infty)$ والمتغـــير الـــتابع (ليكـــن X) مـــن الـــنوع المـــتقطع (حيـــث $X = x_1, x_2, ..., x_i, ...$). إذن من (2. 21. 19) و(3. 2. 7b) يمكن تعريف التوقع الشرطى للمتغير $g(X,Y)$ عندما $Y=y$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.31):\ E[g(X,Y)\,|\,Y=y]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y)\,P_{12}(x_i\,|\,y)$$

وبأســـلوب مشابه لما هو متبع فى الحالة السابقة (حالة المتغير المختلط من النوع الأول) ــ يمكـــن بوضع $g(X,Y)=X$ فى العلاقة (3. 9. 31)، تعريف التوقع الشرطى للمتغير X عندما $Y=y$ بالعلاقة التالية:

$$(3.9.32):\ E[X\,|\,Y=y]=\sum_{i}x_i\ P_{12}(x_i\,|\,y)$$

وبوضـــع $g(X,Y)=X^r$ فـــى العلاقة (3. 9. 31) نحصل على التوقع الشرطى للمتغير X^r عندما $Y=y$ فى الصورة التالية:

$$(3.9.33):\ E(X^r\,|\,y)=\sum_{i}x_i^r\ P_{12}(x_i\,|\,y)$$

كما يمكن الحصول على العزوم الشرطية حول التوقع الشرطى للمتغير X^r عندما $Y=y$ بوضع $g(X,Y)=[X-E(X\,|\,y)]^r$ فى العلاقة (3.9.31) فنحصل على:

$$(3.9.34):\ E\{[X-E(X\,|\,y)]^r\ |\ Y=y\}=\sum_{i}[x_i-E(X\,|\,y)]^r\ P_{12}(x_i\,|\,y)$$

وعـــندما $r=2$ فـــى العلاقـــة السابقة نحصل على التباين الشرطى $V(X\,|\,y)$ للمتغير المتقطع X عندما $Y=y$ فى الصورة التالية:

$$(3.9.35):\ V(X\,|\,y)=\sum_{i}\left[x_i-E(X\,|\,y)\right]^2\ P_{12}(x_i\,|\,y)$$

حيث $E(X\,|\,y)$ كما فى العلاقة (3.9.32). كما يمكن إثبات أن:

$$(3.9.36):\ E\left[E(X^r\,|\,y)\right]=E(X^r)$$

أى أن توقـــع الـــتوقع الشرطى للمتغير X^r عندما $Y=y$ يساوى توقع المتغير المطلـــق (غير الشرطى) X^r وإثبات ذلك متروك للطالب [أنظر تمرين (3 ــ 61)]. كما يمكن أيضاً إثبات أن:

$$(3.9.37):\ E(X^r\,|\,Y\in A)=E\left[E(X^r\,|\,Y=y)\,|\,Y\in A\right]$$

وهى العلاقة المقابلة للعلاقة (3. 9. 7) ــ وإثبات هذه العلاقة متروك أيضاً للطالب [أنظر تمرين (3 ــ 62)].

خامساً: ملخص لأهم نتائج الحالات الأربع السابقة:

يمكـــن تلخـــيص أهـــم نـــتائج الحالات الأربع السابقة (من أولاً حتى رابعا) فى المعادلات التالية:

مـــن العلاقات (3. 9. 6) و (3. 9. 7) فى الحالة أولاً ومن العلاقة (3. 9. 30) عندما $X=x$ وعندما $X\in A$ فى ثالثاً نجد أن:

$$(3.9.38a):\ E\left[E(Y^r\,|\,X=x_i)\right]=E(Y^r)$$

$$(3.9.38b):\ E\left[E(Y^r\,|\,X=x_i)\,|\,X\in A\right]=E(Y^r\,|\,X\in A)$$

$$(3.9.38c):\ V(Y)=E\left[V(Y\,|\,x)\right]+V\left[E(Y\,|\,x)\right]$$

وذلـــك إذا كـــان X متغـــير مـــتقطع يأخذ القيم $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots$ و Y أى متغير عشوائى مستمر أو متقطع.

وكذلك من العلاقة (3. 9. 18) عندما $g(X,Y)=Y^r$ والعلاقة (3. 9. 20) فى البند ثانياً والعلاقتين (3. 9. 36) و(3. 9. 37) فى البند رابعاً نجد أن:

$$(3.9.39a):\ E\left[E(X^r\,|\,Y=y)\right]=E(X^r)$$

$$(3.9.39b):\ E\left[E(X^r\,|\,Y=y)\,|\,Y\in A\right]=E(X^r\,|\,Y\in A)$$

$$(3.9.39c):\ V(X)=E\left[V(X\,|\,y)\right]+V\left[E(X\,|\,y)\right]$$

وذلك إذا كان Y متغير مستمر و X أى متغير عشوائى مستمر أو متقطع.

ملاحظـــة (3 ــ 9 ب): إذا كـــان (X, Y) متغـــير عشوائى ثنائى مشترك له دالة الـــتوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x, y)$ والدالة $g(x, y)$ دالة وحيدة القيمة فى x و y نجد من العلاقة (3. 8. 1) أن:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, d\, F(x, y)$$

والتكامل السابق يمكن إيجاده بأسلوب التكامل المتتالى، أى بإجراء التكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم مكاملة الناتج مرة أخرى بالنسبة للمتغير الآخر وذلك لتبسيط عملية الـــتكامل، وفـــى هـــذه الحالة تلعب التوزيعات الشرطية (أو العزوم الشرطية) دوراً هاماً وأساسياً حيث يمكن إثبات أن:

$$(3.\,9.\,40a):\quad E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, d\, F(x, y)$$

$$(3.\,9.\,40b):\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, d\, F(x \mid y) \right] d\, F_2(y)$$

$$(3.\,9.\,40c):\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, d\, F(y \mid x) \right] d\, F_1(x)$$

أى أن:

$$(3.\,9.\,40d):\quad E_{xy}[g(X, Y)] = E_y[E_x g(X, Y) \mid y] = E_x[E_y g(X, Y) \mid x]$$

فـــإذا كان (X, Y) متغير ثنائى متقطع يكون التكامل الداخلى داخل القوس المربع فى العلاقة (3. 9. 40c) هو نفسه التوقع الموجود فى العلاقة (3. 9. 1)، وإذا كان (X, Y) متغير ثنائى مستمر يكون هذا التكامل هو التوقع المعطى بالعلاقة (3. 9. 12)، أما إذا كان (X, Y) متغـــير مخـــتلط فيه X متغير متقطع و Y متغير مستمر (سواء كان مختلط من الـــنوع الأول أو الـــثانى) يكـــون الـــتكامل الموجـــود داخـــل القوس المربع فى العلاقة (3. 9. 40b) هو نفسه التوقع المعطى بالعلاقة (3. 9. 31) أما التكامل الموجود داخل القوس المربع فى العلاقة (3. 9. 40c) هو نفسه التوقع المعطى بالعلاقة (3. 9. 25).

مثال (3 ـ 9 أ): (X,Y) متغير عشوائى له دالة الاحتمال المشتركة التالية:

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
P(x, y)	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

أوجد:

(1) $E(XY)$

(2) $V(X)$ (2.a) $V(Y)$ (2.b) ρ_{xy} (2.c)

(3) $E(X|y)$ (3.a) ; $V(X|y)$ (3.b)

(4) هل تتحقق العلاقتين التاليتين:

(4.a) $E[E(X|y)] = E(X)$

(4.b) $V(X) = E[V(X|y)] + V[E(X|y)]$

(الحل)

من الجدول التالى يمكن إيجاد $V(Y), V(X), E(Y), E(X), E(XY)$ وذلك كما يلى:

X \ Y	1	2	3	$P_1(x)$	$xP_1(x)$	$x^2P_1(x)$	$xyP(x,y)$
1	2/15	4/15	3/15	9/15	9/15	9/15	19/15
2	1/15	1/15	4/15	6/15	12/15	24/15	30/15
$P_2(y)$	3/15	5/15	7/15	1	21/15	33/15	
$yP_2(y)$	3/15	10/15	21/15	34/15			
$y^2P_2(y)$	3/15	20/15	63/15	86/15			
$xyP(x,y)$	4/15	12/15	33/15				49/15

(1)

$$E(XY) = \sum_x \sum_y x\,y\,P(x,y) = \frac{49}{15}$$

(2)

$$E(X)=\sum_{x} x\,P_1(x)=\frac{21}{15}\ ;;\ E(X^2)=\sum_{x} x^2\,P_1(x)=\frac{33}{15}$$

$$E(Y)=\sum_{y} y\,P_2(y)=\frac{34}{15}\ ;;\ E(Y^2)=\sum_{y} y^2\,P_2(y)=\frac{86}{15}$$

$$\text{(2.a)}\quad V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{33}{15}-\left(\frac{21}{15}\right)^2=0.24$$

$$\text{(2.b)}\quad V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{86}{15}-\left(\frac{34}{15}\right)^2=0.5956$$

$$\sigma_x=0.4899\quad ;;\quad \sigma_y=0.7718$$

$$Cov(x,y)=E(X\,Y)-E(X)\,E(Y)$$

$$=\frac{49}{15}-\frac{21}{15}\cdot\frac{34}{15}=0.0933$$

ومن (3. 8. 18):

$$\text{(2.c)}\quad \rho_{xy}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\ \sigma_y}=0.2468$$

(3) بما أن:

$$P(x\,|\,Y=i)=\frac{P(x,i)}{P_2(i)}$$

إذن يمكن تكوين الجدول التالى:

x	P(x | 1)	P(x | 2)	P(x | 3)	xP(x | 1)	xP(x | 2)	xP(x | 3)
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{7}$
Σ	1	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{7}$

x	$x^2 P(x \mid 1)$	$x^2 P(x \mid 2)$	$x^2 P(x \mid 3)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{7}$
Σ	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{19}{7}$

(3.a) $E(X \mid Y=1) = \sum_x x\, P(x \mid 1) = \frac{4}{3}$

وبالمثل

$$E(X \mid 2) = \tfrac{6}{5} \quad , \quad E(X \mid 3) = \tfrac{11}{7}$$

$$E(X^2 \mid 1) = \sum x^2 P(x \mid 1) = \tfrac{6}{3} = 2$$

وبالمثل:

$$E(X^2 \mid 2) = \tfrac{8}{5} \quad , \quad E(X^2 \mid 3) = \tfrac{19}{7}$$

إذن:

(3.b) $V(X \mid 1) = E(X^2 \mid 1) - E^2(X \mid 1) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

وبالمثل:

$$V(X \mid 2) = \tfrac{4}{25} \quad , \quad V(X \mid 3) = \tfrac{12}{49}$$

(4) $E(X \mid y)$ تعتبر دالة فى y ـ يمكن أن نرمز لها بالرمز $\varphi(y)$ ـ حيث أنها تساوى $\frac{4}{3}$ عـندما $Y=1$ وتسـاوى $\frac{6}{5}$ عندما $Y=2$ وتساوى $\frac{11}{7}$ عندما $Y=3$. إذن يمكن الحصول على:

$$E[E(X \mid y)] = E[\varphi(y)] = \sum_y \varphi(y)\, f_2(y)$$

بتكوين الجدول التالى:

$f_2(y)$	$\frac{3}{15}$	5/15	7/15	1
$\varphi(y)$	4/3	6/5	11/7	
$E[E(X\mid y)]=\sum_y \varphi(y) f_2(y)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{21}{15}$
$\sum \varphi^2(y)\, f_2(y)$	$\frac{16}{45}$	$\frac{36}{75}$	$\frac{121}{105}$	

إذن:

$$E[E(X\mid y)]=\sum_y \varphi(y)\, f_2(y)=\tfrac{21}{15}$$

ومن (2) نعلم أن $E(X)=\frac{21}{15}$

وهذا يثبت صحة العلاقة:

$$\text{(4.a)}\quad E[E(X\mid y)]=E(X)$$

ولإثبات صحة العلاقة (4.b) نجد أن:

$$\text{(4.c)}\quad E[E(X\mid y)]^2=\sum_y \varphi^2(y)\, f_2(y)=\tfrac{16}{45}+\tfrac{36}{75}+\tfrac{121}{105}$$

$$=0.3\dot{5}+0.48+1.15238=1.98794$$

كذلك نجد من (3) أن $V(X\mid y)$ تعتبر دالة فى y ــ يمكن أن نرمز لها بالرمز $\varphi_2(y)$ ــ حيــث أن $V(X\mid y)$ تساوى $\frac{2}{9}$ عندما $Y=1$ وتساوى $\frac{4}{25}$ عندما $Y=2$ وتساوى $\frac{12}{49}$ عندما $Y=3$.

$\varphi_2(y)=V(X\mid y)$	2/9	4/25	12/49
$f_2(y)$	3/15	5/15	7/15
$E[V(X\mid y)]=\sum_y \varphi_2(y)\, f_2(y)$	2/45	4/75	$\frac{12}{105}$

$$\therefore E[V(X \mid y)] = \tfrac{2}{45} + \tfrac{4}{75} + \tfrac{12}{105}$$

$$= 0.0\dot{4} + 0.05\dot{3} + 0.114287 = 0.21206$$

كذلك من (4.a) و(4.c) يمكن إيجاد $V[E(X \mid y)]$ حيث:

$$V[E(X \mid y)] = E[E(X \mid y)]^2 + E^2[E(X \mid y)]$$

$$= 1.987936507 - \left[\tfrac{21}{15}\right]^2 = 0.0279365$$

إذن:

$$\text{(4.b)} \quad V[E(X \mid y)] + E[V(X \mid y)] = 0.0279 + 0.2121 = 0.24 = V(X)$$

مثال (3 ـ 9 ب): (X,Y) متغير عشوائي مستمر دالة كثافة احتماله:

$$f(x,y) = x + y \;;\; 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le 1$$

أوجد:

(1)

$(1.a)\ E(X)\ ,\ (1.b)\ E(Y)$

$(1.c)\ V(X)\ ,\ (1.d)\ V(Y)$

(2)

$(2.a)\ E(XY)$

$(2.b)\ \rho_{xy}$ معامل الارتباط بين X وY.

(3)

$(3.a)\ E(Y \mid x) \quad (3.b)\ V(Y \mid x) \quad (3.c)\ E[E(Y \mid x)]$

وبين أن: $E[E(Y \mid x)] = E(Y)$.

(الحل)

(1)

$$E(Y)=E(X)=\int_0^1\int_0^1 x\,f(x,y)dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\,dx\,dy=\tfrac{7}{12}$$

$$E(Y^2)=E(X^2)=\int_0^1\int_0^1 x^2\,(x+y)dx\,dy=\tfrac{5}{12}$$

$$V(Y)=V(X)=E(X^2)-E^2(x)=\tfrac{5}{12}-\left(\tfrac{7}{12}\right)^2=\tfrac{11}{144}$$

(2)

$$(2.a)\quad E(X\,Y)=\int_0^1\int_0^1 x\,y(x+y)\,dx\,dy=\tfrac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y)=E(X\,Y)-E(X)\,E(Y)=\tfrac{1}{3}-\tfrac{7}{12}\cdot\tfrac{7}{12}$$

إذن:

$$(2.b)\quad \rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}=\frac{\tfrac{1}{3}-\tfrac{7}{12}\cdot\tfrac{7}{12}}{\sqrt{\tfrac{11}{144}}\sqrt{\tfrac{11}{144}}}=-\tfrac{1}{11}$$

(3)

$$(2.b')\,f_1(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+y)\,dy=x+\tfrac{1}{2}\;;0\le x\le 1$$

$$(2.b'')\,f_{12}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\quad ,\;0\le x\le 1\;;0\le y\le 1$$

إذن من $(2.b'')$ نجد أن:

$$(3.a)\quad E(Y\,|\,x)=\int_0^1 y\cdot\frac{(x+y)}{(x+\frac{1}{2})}\,dy=\frac{1}{(x+\frac{1}{2})}\left[\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{3}\right]=\frac{3x+2}{6x+3}\;,0\le x\le 1$$

كما أن:

$$E\left(Y^2 \mid x\right)=\int_0^1 y^2 \frac{(x+y)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} dy=\frac{4x+3}{12x+6}$$

إذن:

$$\text{(3.b)}\quad V(Y \mid x)=E\left(Y^2 \mid x\right)-E^2(Y \mid x)=\frac{4x+3}{12x+6}-\left(\frac{3x+2}{6x+3}\right)^2$$

$$=\frac{6x^2+6x+1}{18(2x+1)^2}$$

ومن $(3.a)$ و $(2.b')$ نجد أن:

$$\text{(3.c)}\quad E[E(Y \mid x)]=\int_0^1\left(\frac{3x+2}{6x+3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) dx=\frac{7}{12}=E(Y)$$

مثال (3 ــ 9 جــ): من تمرين (2 ــ 32) نجد أن (X, Y) متغير ثنائى مختلط فيه X متغير متقطع وYمتغير مستمر ــ حيث دالة احتمال X هى:

$$P_1(x)=\frac{1}{6} \quad ; \quad x=1,2,3,4,5,6$$

ودالة كثافة احتمال Y عندما $X=x$ هى:

$$f_{21}(y \mid x)=x \quad ; \quad 0<y<\frac{1}{x} \; ; \; x=1,2,3,4,5,6$$

كما أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) هى:

$$f(x, y)=P_1(x) f_{21}(y \mid x)=\frac{x}{6} \quad , \quad x=1,2,3,4,5,6 \; ; ; \; 0 \leq y \leq \frac{1}{x}$$

كما أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة للمتغير Y هى:

$$
\begin{aligned}
f_2(y) &= 21/6 \quad , \quad 0 \le y \le 1/6 \\
&= 15/6 \quad , \quad 1/6 \le y \le 1/5 \\
&= 10/6 \quad , \quad 1/5 \le y \le 1/4 \\
&= 6/6 \quad , \quad 1/4 \le y \le 1/3 \\
&= 3/6 \quad , \quad 1/3 \le y \le 1/2 \\
&= 1/6 \quad , \quad 1/2 \le y \le 1
\end{aligned}
$$

ودالة احتمال X عندما $Y = y$ هى:

$$
\begin{aligned}
P_{12}(x \mid y) &= x/21 \quad , \quad 0 \le y \le 1/6 \quad , \quad x \le 6 \\
&= x/15 \quad , \quad 1/6 < y \le 1/5 \quad , \quad x \le 5 \\
&= x/10 \quad , \quad 1/5 < y \le 1/4 \quad , \quad x \le 4 \\
&= x/6 \quad , \quad 1/4 < y \le 1/3 \quad , \quad x \le 3 \\
&= x/3 \quad , \quad 1/3 < y \le 1/2 \quad , \quad x \le 2 \\
&= 1 \quad , \quad 1/2 < y \le 1 \quad , \quad x = 1
\end{aligned}
$$

(1) أوجد:

$$E(X\,Y) \; ; \; E(X) \; ; \; V(X) \;\; , \; E(Y) \;\; , \; V(Y)$$

وأوجد معامل الارتباط: ρ_{xy}

وبين أن:

$$E[E(X \mid y)] = E(X)$$

(2) أوجد كذلك:

$$E[Y \mid x]$$

وبين أن:

$$E[E(Y \mid x)] = E(Y)$$

(الحل)

$$E(XY)=\sum_{x=1}^{6}\int_{y=0}^{\frac{1}{x}} x\,y\,f(x,y)\,dy=\sum_{x=1}^{6}\int_{0}^{\frac{1}{x}} x\,y\,\tfrac{x}{6}\,dy$$

$$=\sum_{x=1}^{6}\tfrac{x^2}{6}\left[\tfrac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{x}}=\sum_{x=1}^{6}\tfrac{x^2}{6}\left[\tfrac{1}{2x^2}\right]=\tfrac{6}{12}=\tfrac{1}{2}$$

$$E(X)=\tfrac{1}{6}\sum_{x=1}^{6}x=3.5$$

$$E(X^2)=\tfrac{1}{6}\sum_{1}^{6}x^2=\tfrac{91}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\tfrac{91}{6}-\left(\tfrac{7}{2}\right)^2=\tfrac{35}{12}=2.91\dot{6}$$

$$\sigma_x=1.7078$$

$$E(Y)=\int_y y f_2(y)dy$$

$$=\tfrac{21}{6}\int_0^{1/6}y\,dy+\tfrac{15}{6}\int_{1/6}^{1/5}y\,dy+\tfrac{10}{6}\int_{1/5}^{1/4}y\,dy+\int_{1/4}^{1/3}y\,dy+\tfrac{3}{6}\int_{1/3}^{1/2}y\,dy+\tfrac{1}{6}\int_{1/2}^{1}y\,dy$$

$$=\tfrac{21}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2+\tfrac{15}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{5}\right)^2-\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\right]+\tfrac{10}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^2-\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^2-\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right]+\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right]+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=0.2041\dot{6}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_{y} y f_2(y)\,dy$$

$$=\tfrac{21}{6}\int_0^{1/6} y^2\,dy+\tfrac{15}{6}\int_{1/6}^{1/5} y^2\,dy+\tfrac{10}{6}\int_{1/5}^{1/4} y^2\,dy+\int_{1/4}^{1/3} y^2\,dy$$

$$+\tfrac{3}{6}\int_{1/3}^{1/2} y^2\,dy+\tfrac{1}{6}\int_{1/2}^{1} y^2\,dy$$

$$=0.0828549$$

$$V(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)$$

$$=0.082854938-\left(0.2041\dot{6}\right)^2=0.04117091$$

$$\sigma_y=0.202906161$$

$$\rho_{xy}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}=\frac{0.5-(3.5)\left(0.2041\dot{6}\right)}{(1.707825127)(0.20296161)}$$

$$=-0.619068468$$

$$E(X\,|\,y)=\sum_x x\,P_{12}(x\,|\,y)$$

عندما $0\le Y\le 1/6$

$$=\sum_{x=1}^{6} x\cdot\tfrac{x}{21}=\tfrac{1}{21}\frac{6(7)13}{6}=\tfrac{13}{3}$$

وعندما $1/6<Y\le 1/5$

$$=\sum_{x=1}^{5} x\cdot\tfrac{x}{15}=\tfrac{1}{15}\cdot\frac{5(6)11}{6}=\tfrac{11}{3}$$

وعندما $1/5<Y\le 1/4$

$$=\sum_{x=1}^{4} x\cdot\tfrac{x}{10}=\tfrac{1}{10}\cdot\frac{4(5)9}{6}=3$$

وعندما $1/4 < Y \le 1/3$

$$= \sum_{x=1}^{3} x \cdot \tfrac{x}{6} = \tfrac{7}{3}$$

وعندما $1/3 < Y \le 1/2$

$$= \sum_{x=1}^{2} x \cdot \tfrac{x}{3} = \tfrac{5}{3}$$

وعندما $1/2 < Y \le 1$

$$= \sum_{x=1}^{1} x \cdot 1 = 1$$

وهذا يوضح أن $E(X \mid y)$ يعتبر دالة فى Y حيث:

$$\begin{aligned} E(X \mid y) &= 13/3 \quad , \quad 0 < y \le 1/6 \\ &= 11/3 \quad , \quad 1/6 < y \le 1/5 \\ &= 9/3 \quad , \quad 1/5 < y \le 1/4 \\ &= 7/3 \quad , \quad 1/4 < y \le 1/3 \\ &= 5/3 \quad , \quad 1/3 < y \le 1/2 \\ &= 1 \quad , \quad 1/2 < y \le 1 \end{aligned}$$

وبما أن $E(X \mid y)$ يعتبر دالة فى Y إذن:

$$E[E(X \mid y)] = \int_0^1 E(X \mid y)\, f_2(y)\, dy$$

$$= \int_0^{1/6} \tfrac{13}{3} \cdot \tfrac{21}{6}\, dy + \int_{1/6}^{1/5} \tfrac{11}{3} \cdot \tfrac{15}{6}\, dy + \int_{1/5}^{1/4} \tfrac{9}{3} \cdot \tfrac{10}{6}\, dy$$

$$+ \int_{1/4}^{1/3} \tfrac{7}{3} \cdot 1\, dy + \int_{1/3}^{1/2} \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{3}{6}\, dy + \int_{1/2}^{1} 1 \cdot \tfrac{1}{6}\, dy$$

$$= \tfrac{91}{36} + \tfrac{11}{3} \cdot \tfrac{15}{6} \cdot \tfrac{1}{30} + \tfrac{9}{3} \cdot \tfrac{10}{6} \cdot \tfrac{1}{20} + \tfrac{7}{36} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{3}{36}$$

$$= \tfrac{126}{36} = 3.5 = E(X)$$

$$\therefore E[E(X \mid y)] = E(X)$$

(2)

$$E(Y|x)=\int_y y\,f_{21}(y|x)\,dy=\int_0^{\frac{1}{x}} y\,x\,dy=\tfrac{1}{2x}$$

أى أن $E(Y|x)$ يعتبر دالة فى x:

$$E(Y|x)=\tfrac{1}{2x}\quad;\quad x=1,2,3,4,5,6$$

$$\therefore E[E(Y|x)]=\sum_{x=1}^{6}E(Y|x)\,P_1(x)=\sum_{x=1}^{6}\left(\tfrac{1}{2x}\right)\cdot\tfrac{1}{6}$$

$$=\tfrac{1}{12}\left[1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\right]=\tfrac{1}{12}\left[\tfrac{37.5}{30}\right]=0.2041\dot{6}=E(Y)$$

ملاحظة (3 ــ 9 جــ): نقدم فيما يلى معلومة هامة عن العلاقة بين التوقع الشرطى $E(Y|x)$ والتبايــن الشرطى $V(Y|x)$ لأى متغير مشترك (X, Y) سواء من النوع المتقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه هذه المعلومة هى:

إذا كــان Y (أو $Y|x$) متغــير عشــوائى شرطى ــ كما هو معرف فى البندين (2 ــ 17) و (3 ــ 9) ــ و $\varphi(x)$ دالــة حقيقية وحيدة القيمة فى x فيمكن إثبات أن العزم الشــرطى مــن الدرجــة الثانية للمتغير الشرطى $Y|x$ حول الدالة $\varphi(x)$ يكون نهاية صغرى عندما $\varphi(x)=E(Y|x)$ أى أن:

$$E\left\{[Y-\varphi(x)]^2\,|\,X=x\right\}$$

يكون نهاية صغرى عندما تكون:

$$\varphi(x)=E(Y|x)$$

كما أن هذه النهاية الصغرى تكون هى التباين الشرطى للمتغير Y عندما $X=x$ وهذا نعبر عنه رمزيا بالعلاقة التالية:

$$(3.9.41):\ \min E\left\{[Y-\varphi(x)]^2\,|\,x\right\}=V(Y|x)=\sigma^2_{Y\,x}$$

$$=E\left\{[Y-E(Y|x)]^2\,|\,x\right\}$$

انظر تمرين (3 ــ 63).

ومـــن المعروف من العلاقة السابقة أن $V(Y|x)\geq 0$ فإذا كان $V(Y|x)=0$ عـــند جمـــيع قيم x التى يكون عندها المتغير الشرطى $Y|x$ معرفاً يكون معنى ذلك أن المتغـــير الشرطى $Y|x$ متغير مدمج degenerate وبالتالى يكون الاحتمال الكلى لتوزيع هذا المتغير الشرطى متركزاً عند نقطة واحدة هى توقعه أى عند النقطة $Y=E(Y|x)$ ــ كما يتضح من ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 هــ) ــ وفى هذه الحالة يكون:

$$(3.9.42):\ Pr\{[Y=E(Y|x)]|x\}=1$$

كذلـــك كلمـــا كان $V(Y|x)$ كمية صغيرة قريبة من الصفر كلما كان الاحتمال السابق قريب من الواحد الصحيح وكلما زاد اقتراب قيمة $V(Y|x)$ من الصفر كلما زاد اقـــتراب الاحـــتمال الموجود فى الطرف الأيسر بالعلاقة (3. 9. 42) من الواحد الصحيح. ومعـــنى هذا أنه إذا كانت قيمة المتغير X معلومة (فى حالة معينة) ــ لتكن $X=x$ مثلاً ــ فـــإن قيمة المتغير Y (فى هذه الحالة) تساوى $E(Y|x)$ وذلك باحتمال كبير يساوى الواحـــد الصـــحيح أو قريـــب جداً من الواحد الصحيح وذلك تبعاً لكون التباين الشرطى $V(Y|x)$ يساوى الصفر أو يساوى كمية صغيرة قريبة من الصفر. لذلك يمكن استخدام خـــط الانحـــدار المتمثل بالعلاقة $Y=E(Y|x)$ لتقدير قيم المتغير Y بمعلومية قيم X وذلك باحتمال كبير أى بدرجة عالية من الثقة. وعلى ذلك يمكن اعتبار $V(Y|x)$ مقياساً (أو مؤشـــراً) يوضـــح لـــنا درجة جودة استخدام $E(Y|x)$ لتحديد قيمة Y عندما يكون معلوماً لدينا أن $X=x$.

(3 ــ 10) المتغيرات المعتمدة على بعضها اعتماداً خطياً (حالة متغيرين):

Linearly Dependent Random Variables (Two Variables):

تعريف (3 ــ 10 أ) المتغيران المعتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً:

فى المتغير المشترك (X,Y) نقول أن المتغيران Y وX معتمدان على بعضهما اعـــتماداً خطـــياً إذا كـــان هناك عددان حقيقيان c_1 و c_2 أحدهما على الأقل لا يساوى الصـــفر بحيث يكون المتغير العشوائى $Z=c_1X+c_2Y$ متغيراً مدمجاً Degenerate. ومـــن (2 ــ 6 ــ 4) نرى أن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المدمج Z يكون متركزاً عند نقطة واحدة (c_0 مثلاً) هى مركز الثقل لهذا التوزيع ويكون:

$$(3.10.1a):\ Pr[c_1X+c_2Y=c_0]=1$$

حيث الثابت c_0 عدد حقيقى هو توقع المتغير المدمج Z، وطبعاً الحالة التى يكون فيها $c_1 = 0$ و $c_2 \neq 0$ أو $c_1 \neq 0$ و $c_2 = 0$ تكون قليلة الأهمية لأن أحد المتغيرين (المتغير المتبقى) فى هذه الحالة يكون أصلاً متغيراً مدمجاً.

تعريف (3 ـ 10 ب) المتغيران المعتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً:

إذا كان المتغير $Z = c_1X + c_2Y$ متغيراً مدمجاً بينما $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ نقول أن المتغيران Y وX معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً Properly Linearly Dependent وهذا يعنى أن:

$$(3.10.1b): \ Pr(c_1X + c_2Y = c_0) = 1$$

حيث أن الثابت c_0 عدد حقيقى (هو توقع المتغير المدمج $Z = c_1X + c_2Y$) وأن الخط المستقيم $c_1X + c_2Y = c_0$ ليس موازياً لمحور X (لأن $c_1 \neq 0$) كما أنه ليس موازياً لمحور Y (لأن $c_2 \neq 0$). وعندما تكون $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$ و $c_0 = 0$ يكون المتغير $Z = X - Y$ مدمجاً حيث: $Pr[X - Y = 0] = 1$ أى: $Pr[X = Y] = 1$ وفى هذه الحالة نقول أن المتغيران Y وX متطابقان (Identical)، وعلى هذا يمكن تقديم التعريف التالى:

تعريف (3 ـ 10 جـ) المتغيرات المتطابقة Identical Variables:

نقول أن المتغيران Y وX متطابقان إذا كان:

$$(3.10.2): \ Pr[X = Y] = 1$$

وإذا كانت $F(x,y)$ دالة توزيع احتمالى مشتركة لمتغيرين متطابقين Y وX فإننا نقول أن دالتى التوزيع الاحتمالى الهامشيتين $F_1(x)$ و $F_2(y)$ دالتان متطابقتان وفى هذه الحالة تكون:

$$(3.10.3): \ F_1(x) = F_2(y) = F(x) = F(y)$$

ولكن العكس غير صحيح، أى أنه إذا كانت الدالتان $F_1(x)$ و $F_2(y)$ متطابقتان فليس من الضرورى أن يكون المتغيران Y وX متطابقان كذلك.

كما أن المتغيرين المشتركين (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) يكونا متطابقان إذا كان كلٍ من المتغيران X_2 و X_1 متطابقان والمتغيران Y_2 و Y_1 متطابقان أيضاً.

ملاحظة (3 ـ 10 أ): العلاقة (3. 10. 1) والتى نكتبها فى الصورة: $Pr[c_1X + c_2Y = c_0] = 1$ معناها الآتى:

احتمال أن المتغير المشترك (X, Y) يأخذ قيم تقع على الخط المستقيم $c_1X + c_2Y = c_0$ في المستوى R_2 يساوى الواحد الصحيح، ومعنى هذا أن المتغير (X, Y) تقع كل قيمه على هذا الخط باحتمال واحد صحيح وطبقاً لبند (2 ـ 6 ـ 4) يكون المتغير المفرد $Z = c_1X + c_2Y$ متغيراً مدمجاً يتركز احتماله الكلى عند النقطة $Z = c_0$ وهى نقطة احتماله الوحيدة وطبقاً لملاحظتى (3 ـ 2 ـ 2 هـ) و(3 ـ 3 ـ 1 ب) يكون $E(Z) = c_0$ و $V(Z) = 0$ ـ أى أن "الاحتمال الكلى" لتوزيع المتغير المشترك (X , Y) يتركز على خط مستقيم (هو $c_1X + c_2Y = c_0$) بينما الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المفرد $Z = c_1X + c_2Y$ يتركز عند نقطة واحدة هى $Z = c_0$.

بعد أن عرفنا المتغير المدمج يمكن الآن تقديم النظرية التالية التى توضح أن بعض خصائص التوزيع المشترك لأى متغير (X, Y) متصلة مباشرة برتبة مصفوفة تغايره V_2.

نظرية (3 ـ 10 أ):

إذا كان المتغير المشترك (X, Y) له مصفوفة التغاير التالية:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & v_{12} \\ v_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

التى رتبتها $2 \geq r$ حيث:

$$\sigma_1^2 = V(X) \;\; , \;\; \sigma_2^2 = V(Y) \;\; ; \; v_{12} = v_{21} = Cov(X,Y) = \mu_{11}$$

فإن:

(1) توزيع المتغير (X, Y) يكون مدمجاً Degenerate عند نقطة واحدة، إذا وفقط إذا كانت، $r = 0$ ـ هذه النقطة هى مركز ثقل التوزيع المشترك للمتغير (X, Y) ـ أى النقطة (m_1, m_2) حيث $m_1 = E(X) \; ; \; m_2 = E(Y)$.

(2) يكون التوزيع مدمجاً فى خط مستقيم ـ أى الاحتمال الكلى للتوزيع متركزاً على خط مستقيم فى المستوى R_2 وليس فى نقطة مفردة ـ إذا وفقط إذا كانت $r = 1$ ـ هذا الخط المستقيم هو:

$$(3.10.4): \; t_0(x - m_1) + u_0(y - m_2) = 0$$

حيث t_0 **و** u_0 **عددان حقيقيان معينان.**

(3) يكون التوزيع غير مدمج إذا وفقط إذا كانت $r = 2$.

(الإثبات)

يكفى إثبات (1) و (2) وعليه تكون (3) نتيجة مباشرة.

(1)

(أ) شـــرط الكفايـــة: يكفـــى أن تكـــون $r = 0$ فـــى هذه الحالة يكون كل محيدد رئيسى للمصـــفوفـــة V_2 يســـاوى الصـــفر أى أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$ وهذا معناه أن التوزيع الهامشـــى لكـــل مـــن X و Y متركزاً عند نقطة واحدة هى مركز التوزيع الهامشى – أنظـــر ملاحظة (3 – 2 – 2 هـ) – فيكون توزيع X متركزاً عند النقطة $X = m_1$ وتوزيـــع Y متركزاً عند النقطة $Y = m_2$ وعلى ذلك يكون الاحتمال الكلى للتوزيع المشـــترك للمتغير (X, Y) متركزاً عند النقطة (m_1, m_2) وهى مركز ثقل التوزيع المشترك.

(ب) شرط اللزوم: وعلى العكس من (أ) إذا كان الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك متركزاً عند نقطة واحدة يكون معنى ذلك أن المتغير (X, Y) متغيراً مدمجاً ومركز ثقله عند الـــنقطة (m_1, m_2) وهـــذا يترتـــب علـــيه أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$ – وبمـــا أن $\sigma_1^2\sigma_2^2 - v_{12}^2 \geq 0$ (كما فى (3. 8. 20)) إذن $v_{12}^2 = 0$ أى أن $v_{12} = 0$ وبذلك تكون جميع عناصر مصفوفة التغاير V_2 أصفار وهذا يترتب عليه أن $r = 0$.

(2) نعلم أنه لأى عددين حقيقيين t, u تكون:

$$(3.10.5):\ Q(t, u) = E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2$$

$$= t^2\ \sigma_1^2 + 2tu\, v_{12} + u^2\, \sigma_2^2$$

$$= (t \quad u)\, V_2 \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \geq 0$$

(أ) شـــرط الكفايـــة: إذا كانت $r = 1$ كان معنى ذلك أن مقدار الدرجة الثانية $Q(t, u)$ مقـــدار غـــير ســـالب شبه محدد Positive Semi-definite وهذا يترتب عليه أنه يوجد قيمـــتان معينـــتان $t = t_0$ ، $u = u_0$ إحداهمـــا على الأقل لا تساوى الصفر ويكون

عـندهما: $Q(t_0, u_0)=0$ وهذا ممكن فقط إذا كان الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك متركزاً على الخط المستقيم

$$(3.10.6):\ t_0(X-m_1)+u_0(Y-m_2)=0$$

طبقاً للملاحظة (3 ـ 10 أ).

(ب) شرط اللزوم: وعلى عكس شرط الكفاية ـ إذا كان من المعروف أن الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك متركزاً على خط مستقيم (وليس فى نقطة واحدة) فإن هذا الخط لابد أن يمر بمركز ثقل التوزيع ـ أى بالنقطة (m_1, m_2) ومعادلته تأخذ الصيغة التالية:

$$(3.10.6a):\ t_0(X-m_1)+u_0(Y-m_2)=0$$

حيـث t_0 و u_0 عـددان حقيقـيان أحدهما على الأقل لا يساوى الصفر ـ إذن $E[t_0(X-m_1)+u_0(Y-m_2)]=0$ كذلك بتربيع طرفى المعادلة (3.10.6a) نجد أن:

$$[t_0(X-m_1)+u_0(Y-m_2)]^2=0$$

إذن:

$$E[t_0(X-m_1)+u_0(Y-m_2)]^2=0$$

أى أن مقـدار الدرجة الثانية $Q(t, u)$ المعطى بالعلاقة (3.10.5) يساوى الصفر عـند القيمتان $t=t_0$ ، $u=u_0$ ـ وإحداهما على الأقل لا تساوى الصفر ـ وهذا معناه أن مقـدار الدرجة الثانية $Q(t, u)$ غير سالب شبه محدد Positive Semi-definite وعلى هذا فإن رتبة المصفوفة V_2 تساوى الواحد الصحيح $(r=1)$.

هـ. ط. ث.

نعلـم أنه إذا كان المتغيران X و Y مرتبطان يكون معامل الارتباط بينهما $\rho\neq 0$ وتكون $\sigma_1^2\neq 0$ و $\sigma_2^2\neq 0$ وتصل ρ إلى نهايتها القصوى ± 1 (أى $\rho^2=1$) إذا كان $\frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=\frac{v_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=1$ أى $\sigma_1^2\sigma_2^2-v_{12}^2=0$ وهذا معناه أن محدد مصفوفة التغاير V_2 للمتغيران Y و X يساوى الصفر وفى هذه الحالة تكون مصفوفة التغاير V_2 من الرتبة $r\leq 1$ ـ ولكن بما أن $\sigma_1^2\neq 0$ و $\sigma_2^2\neq 0$ فإن V_2 تكون من الرتبة $r=1$ وهذا يترتب عليه حسب نظرية (3 ـ 10 أ) أن هذا يحدث إذا وفقط إذا كان الاحتمال الكلى

لــتوزيع المتغير المشترك (X, Y) متركزاً على خط مستقيم وبالتالى يمكن تقديم النظرية التالية.

نظرية (3 ــ 10 ب):

إذا كـــان المتغيران العشوائيان X و Y غير مدمجان non degenerate وتباين كل مـــنهما محدود، فإنهما يكونا معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً، إذا وفقط إذا كان مربع معامل الارتباط بينهما يساوى الواحد الصحيح (أى $\rho^2 = 1$).

(الإثبات)

(أ) شـــرط اللـــزوم: نفـــرض أن المتغيران X و Y معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً ــ إذن من تعريف (3 ــ 10ب)

$$\Pr(c_1X + c_2Y = c_0) = 1$$

حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان كل منهما لا يساوى الصفر و c_0 عدد حقيقى. وبما أن $c_2 \neq 0$ يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$\Pr(Y + \beta_1X = \beta_0) = 1$$

حيـــث β_1 عـــدد حقـــيقى لا يســـاوى الصـــفر و β_0 عدد حقيقى أى أن المتغير $(Y + \beta_1 X)$ متغـــيراً مدمجـــاً ــ كما فى (2 ــ 6 ــ 4) ــ والاحتمال الكلى لتوزيع هذا المتغـــير متركزاً عند النقطة β_0 التى تمثل توقعه [أنظر ملاحظة (3 ــ 2 ــ 2 هـ)] كما أن تباين هذا المتغير المدمج يساوى الصفر [أنظر ملاحظة (3 ــ 3 ــ 1 ب)] ــ إذن:

$$V(Y + \beta_1 X) = 0$$

$$\therefore V(Y) + \beta_1^2 V(X) + 2\beta_1 \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\sigma_2^2 + \beta_1^2\sigma_1^2 + 2\beta_1\rho\,\sigma_1\sigma_2 = 0$$

$$\therefore \sigma_2 = -\beta_1\rho\sigma_1 \pm \beta_1\sigma_1\sqrt{\rho^2 - 1}$$

نعلـــم من (3. 8. 19) أن $\rho^2 \leq 1$ لذلك لابد أن تكون $\rho^2 = 1$ فى العلاقة السابقة لأن σ_2 عـــدد حقـــيقى. إذن $\rho = \pm 1$ وحيث أن $\sigma_2 > 0$ إذن $\rho = +1$ إذا كانت β_1 سالبة و $\rho = -1$ إذا كانت β_1 موجبة.

(ب) شرط الكفاية: نفرض أن $\rho^2 = 1$ إذن من تعريف (3. 8. 18) لمعامل الارتباط عندما $\rho^2 = 1$ نجد أن:

$$(3.\ 10.\ 7):\ \sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_{11}^2 = 0$$

ومن العلاقة (3. 10. 5) نعلم أن:

$$(3.\ 10.\ 7a):\ Q = E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2 = (t \quad u)\ V_2 \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \geq 0$$

حيث أن V_2 هى مصفوفة التغاير المعطاة بالعلاقة (3. 8. 21a) ومحددها $|V_2|$ المعطى بالعلاقة (3. 8. 21b) إذن عند تحقق العلاقة (3. 10. 7) السابقة يكون $|V_2| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_{11}^2 = 0$ وهذا معناه أن رتبة المصفوفة V_2 أقل من 2 وحيث أن σ_1^2 و σ_2^2 كميتان محدودتان موجبتان (لأن $\rho^2 = 1$) إذن رتبة هذه المصفوفة تساوى الواحد الصحيح وعلى ذلك فإن مقدار الدرجة الثانية Q فى (3. 10. 8) مقدار غير سالب شبه محدد Positive Semi-definite ومعنى هذا أنه يوجد قيمتان معينتان $t = t_0$ و $u = u_0$ إحداهما على الأقل لا تساوى الصفر ــ ليكن $u_0 \neq 0$ ــ يكون عندهما:

$$(3.\ 10.\ 7b):\ E[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)]^2 = 0$$

إذن العلاقة (3. 10. 7b) السابقة تدل على أن تباين المتغير $Z = t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)$ يساوى الصفر. وهذا معناه ــ طبقاً لملاحظة (3 ــ 3 ــ 1 ب) ــ أن المتغير Z متغير مدمج والاحتمال الكلى لتوزيعه يتركز عند النقطة $Z = 0$ التى تمثل توقعه. وعلى ذلك ــ طبقاً لبند (2 ــ 6 ــ 4) وللعلاقة (2. 6. 6c) ــ يكون:

$$\Pr[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2) = 0] = 1$$
$$\Pr[t_0X + u_0Y = t_0m_1 + u_0m_2] = 1$$

وحيث أن $u_0 \neq 0$ إذن X و Y معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً كما يتضح من تعريف (3 ــ 10 أ) ويكون هذا الاعتماد خطياً صحيحاً إذا كانت $t_0 \neq 0$. وحيث أن افتراضنا أن $\rho^2 = 1$ يترتب عليه أن $\sigma_1^2 > 0$ و $\sigma_2^2 > 0$ إذن كلٍ من المتغيرين X و Y متغير غير مدمج وبما أن Y متغير غير مدمج إذن $t_0 \neq 0$ وحيث أن $u_0 \neq 0$ إذن المتغيران X و Y معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً كما يتضح من تعريف (3 ــ 10 ب).

هـ. ط. ث.

ويمكن صياغة النظرية السابقة فى الصورة المختصرة التالية:

[المتساوية $\rho^2 = 1$ تعتبر شرطا لازما وكافيا لتحقيق العلاقة $\Pr(c_1X + c_2Y = c_0) = 1$ طبقا لتعريف (3 ــ 10 ب)].

وطبقا لهذه النظرية إذا كان $\rho^2 = 1$ يكون معنى ذلك أن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المشترك (X, Y) يقع على خط مستقيم أى أن المتغيران يكونا معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً. ومن ناحية أخرى إذا كان المتغيران X و Y معتمدان على بعضهما اعتماداً خطيا صحيحا ــ أى أن جميع قيم (X, Y) تقع على خط مستقيم ــ يكون الارتباط بينهما ارتباطاً تاماً أى $\rho^2 = 1$.

(3 ــ 11) عزوم المتغيرات العشوائية المتعددة المشتركة (حالة n من المتغيرات عندما $n > 2$) ــ أو العزوم المشتركة The Joint Moments:

(3 ــ 11 ــ 1): يمكن تعميم النتائج السابقة من (3 ــ 8) إلى (3 ــ 10) إلى حالة n من المتغيرات العشوائية المشتركة وذلك بفرض أن $g(X_1,...,X_n)$ دالة فى المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ وأن المتغير المشترك $(X_1,...,X_n)$ له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1,...,x_n)$ فإذا كانت الدالة $g(X_1,...,X_n)$ دالة تكاملية Integrable بالنسبة للتوزيع $F(x_1,...,x_n)$ فى الفراغ R_n فإن توقع الدالة $g(X_1,...,X_n)$ يمكن تعريفه بالعلاقة التالية:

$$(3.11.1):\ E[g(X_1,...,X_n)] = \int_{R_n} g(x_1,...,x_n)\,dF(x_1,..,x_n)$$

بوضع:

$$g(x_1,...,x_n) = X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}$$

فى المعادلة السابقة نحصل على العزم المشترك حول الصفر $\mu'_{r_1...r_n}$ من الدرجة $r_1 + \cdots + r_n$ فى الصورة التالية:

$$(3.11.2):\ \mu'_{r_1...r_n} = \int_{R_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}\, d\,F(x_1,..,x_n)$$

وعزوم الدرجة الأولى (عندما $r_1 + \cdots + r_n = 1$) نرمز لها عادة برموز خاصة بدلاً من استخدام $\mu'_{r_1 \ldots r_n}$ وذلك لتبسيط الكتابة إذ أنه في عزوم الدرجة الأولى تكون إحدى قيم الدليل $r_1 \ldots r_n$ تساوى الواحد والباقى أصفار فإذا كان r_i يساوى الواحد والباقى أصفار نستخدم الرمز m_i بدلاً من $\mu_{00..010\,0}$ وبذلك تكون القيمة المتوقعة m_i للمتغير X_i هي:

$$(3.11.3):\ m_i = \int_{R_n} x_i \, dF(x_1, \ldots, x_n)$$

والنقطة $\underline{m}' = (m_1, \ldots, m_n)$ التى إحداثياتها القيم المتوقعة للمتغيرات $X_1, \ldots, X_n$ فى الفراغ R_n هى مركز الثقل للتوزيع المشترك للمتغير $(X_1, \ldots, X_n)$ فى الفراغ R_n. أما العزوم المركزية $\mu_{r_1 \ldots r_n}$ فيمكن الحصول عليها من العلاقة (3.11.2) بوضع $(X_i - m_i)^{r_i}$ بدلاً من $X_i^{r_i}$ في الصورة:

$$(3.11.4):\mu_{r_1 \ldots r_n} = E\left[(X_1 - m_1)^{r_1} \ldots (X_n - m_n)^{r_n}\right]$$

$$= \int_{R_n} (x_1 - m_1)^{r_1} \ldots (x_n - m_n)^{r_n} \, dF(x_1, \ldots, x_n).$$

والعزوم المركزية من الدرجة الثانية (عندما $r_1 + \cdots + r_n = 2$) تحتل دوراً هاماً فى دراسة التوزيعات الاحتمالية لذلك سوف نستخدم لها ترميزاً خاصاً بدلا من استخدام $\mu_{r_1 \ldots r_n}$ وذلك لتبسيط الكتابة حيث أنه فى عزوم الدرجة الثانية تكون إما قيمة واحدة من قيم الدليل $r_1 \ldots r_n$ تساوى 2 والباقى أصفار أو قيمتين كل منهما تساوى واحد والباقى أصفار. فإذا كان $r_i = 2$ والباقى أصفار نستخدم الرمز $\sigma_i^2 = v_{ii}$، كذلك إذا كان $r_i = 1$ و $r_j = 1$ $(i \neq J)$ نستخدم الرمز v_{ij} وواضح أن استخدام الترميز $\mu_{r_1 \ldots r_n}$ يكون مربكاً لكثرة الرموز المذيلة للحرف μ، والترميز الذى سوف نستخدمه لعزوم الدرجة الثانية هو:

$$(3.11.5):\ \begin{cases} (a)\ E(X_i - m_i)^2 = V(X_i) = \sigma_i^2 = v_{ii} \\ (b)\ E(X_i - m_i)(X_k - m_k) = Cov(X_i, X_k) \\ (c)\ \qquad = \rho_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k = v_{ik} = v_{ki} \end{cases}$$

وكما نعلم $\rho_{ik} = \rho_{ki}$.

أى أن v_{ii} هو تباين X_i كما أن σ_i هو الانحراف المعيارى لـ X_i و v_{ik} هو تغاير X_i و X_k.

ومن (3. 11. 5) و(3. 8. 19) نجد أن:

$$(3.\ 11.\ 6):\ v_{ij}^2 \le v_{ii}\ v_{jj}$$

والتغاير كما نعلم هو حاصل ضرب معامل الارتباط بين المتغيرين فى الانحراف المعـــيارى لكل منهما. ومعامل الارتباط $\rho_{ik} = \dfrac{v_{ik}}{\sigma_i\ \sigma_k}$ كما فى علاقة (3. 8. 18) يكون معـــرفا فقــط عندما تكون $\sigma_i > 0$ و $\sigma_k > 0$ ويترك بدون تعريف إذا كان واحد على الأقـــل مـــن الانحرافيـــن المعيارييـــن σ_k و σ_i يساوى الصفر. كما أن $v_{ik} = v_{ki}$ و $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ و $\rho_{ii} = 1$. وفى الحالة الخاصة عندما يكون عدد المتغيرات $n = 2$ (حالة متغيرين) يكون:

$$(3.\ 11.\ 6'):\ v_{11} = \mu_{20}\ ,\ v_{12} = \mu_{11}\ \ ,\ \ v_{22} = \mu_{02}$$

وعزوم الدرجة الثانية للمتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ يمكن أن توضع فى شكل مصفوفة متماثلة تسمى مصفوفة التغاير أو مصفوفة عزوم الدرجة الثانية للمتغير المشترك $\underline{X}' = (X_1, ..., X_n)$ ونرمز لها بالرمز V_n وتأخذ الشكل التالى:

$$(3.\ 11.\ 7a):\ V_n = V_n(\underline{X}) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_{ik}]_n$$

حيث $v_{ii} = v(x_i)$ و $v_{iJ} = Cov(x_i, x_J)$ عندما $i \ne J$.

ويمكن كتابة V_n فى الصورة التالية:

$$(3.\ 11.\ 7b):\ V_n(\underline{X}) = E\left[\ (\underline{x} - \underline{\mu})\ (\underline{x} - \underline{\mu})'\ \right]$$

$$= \left[\ E(x_i - \mu_i)\ (x_k - \mu_k)\ \right] = [v_{ik}]_{n\times n}$$

والمصفوفة V_n مصفوفة غير سالبة non – negative matrix أى أن:

$$(3.11.8):\ |V_n| \geq 0$$

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها كما يلى:

$$(3.11.9):\ 0 \leq E\left[\sum_{i=1}^{n} t_i (X_i - m_i)\right]^2 = \sum_{i,k=1}^{n} t_i\, t_k\, E(X_i - m_i)(X_k - m_k)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} t_i\, t_k\, v_{ik} = \underline{t}'\, V_n\, \underline{t} \geq 0$$

ومـــادام مقدار الدرجة الثانية $\underline{t}'\, V_n\, \underline{t} \geq 0$ إذن المقدار $\underline{t}'\, V_n\, \underline{t}$ يكون غير سالب محدد Non – negative definite وبالتالى يكون $|V_n| \geq 0$ وهذا يحقق العلاقة (3.11.8).

(3 – 11 – 2) رتبة التوزيع Rank of The Distribution:

تُعَـرَّفُ رتبة توزيع المتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ فى الفراغ R_n بأنها هى نفـس رتـبة مصـفوفة الـتغاير (أو مصفوفة عزوم الدرجة الثانية) للمتغير المشترك $\underline{X}' = (X_1, ..., X_n)$ ونرمـز لرتـبة المصفوفة V بالرمز $R(V) = r$. فإذا كانت $r < n$ نقـول أن التوزيع شاذ Singular وإذا كانت $r = n$ نقول أن التوزيع غير شاذ Non – Singular، حيث n هى عدد المتغيرات $X_1, ..., X_n$.

وقـد رأيـنا فى نظرية (3 – 10 أ) أن رتبة المصفوفة V_2 – $R(V_2)$ – ذات علاقـة وثـيقة بخاصية الاعتماد الخطى الصحيح فى حالة متغيرين ونحاول الآن إيجاد مقـياس للاعـتماد الخطى الصحيح فى حالة $2 < n$ من المتغيرات العشوائية باستخدام مصفوفة التغاير V_n.

(3 – 11 – 3) الاعتماد الخطى الصحيح فى حالة n من المتغيرات $(2 < n)$:

نقدم النظرية التالية

نظرية (3 – 11 – 3 أ):

إذا كـان كل من المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ غير مدمجة وتباين كل منها محـدود، فإن هذه المتغيرات تكون بينها علاقة خطية صحيحة واحدة على الأقل باحتمال

يساوى الواحد الصحيح (أى تكون معتمدة على بعضها اعتماداً خطياً صحيحاً) إذا وفقط إذا كان $|V_n| = 0$ حيث V_n هى مصفوفة التغاير للمتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$.

(الإثبات)

(أولا) الشرط الكافى «الشرط (إذا)»

نفـرض أن $|V_n| = 0$ وبفرض أن $t_1, ..., t_n$ أعداد حقيقية تختلف عن الصفر.
إذن يمكـن الوصـول إلـى العلاقة (3. 11. 9) السابقة. وبما أن $|V_n| = 0$ إذن المقدار $\underline{t}' V \underline{t}$ المعطى بالعلاقة (3. 11. 9) يكون موجب شبه محدد Positive Semi-definite وهذا يدل على أنه يمكن إيجاد مجموعة خاصة من القيم $t_1, ..., t_n$ تختلف كلها عن الصفر ومع ذلك يكون

$$(3.\ 11.\ 10):\ \underline{t}' V_n \underline{t} = 0$$

حيث $\underline{t}' = (t_1, ..., t_n)$.

فإذا كان Z متغير عشوائى معطى بالعلاقة $Z = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ فإن:

$$v(Z) = v\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 v_{ii} + \sum_{i=k}^{n} t_i t_k v_{ik}$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} t_i t_k v_{ik} = \underline{t}' V_n \underline{t}\ .$$

إذن

$$(3.\ 11.\ 11):\ \underline{t}' V_n \underline{t} = v\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$$

من (3. 11. 10) و(3. 11. 11) يمكن أن يكون

$$(3.\ 11.\ 12):\ v\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = 0$$

حيث $t_i = 0$ لجميع قيم $i = 1, 2, ..., n$

إذن المتغير العشوائى $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ متغير مدمج توقعه هو:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i E(x_i) = C$$

ومن علاقة (2. 6. 6c) نجد أن:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = C\right] = 1$$

إذن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ معتمدة على بعضها اعتمادا خطيا صحيحا.

(ثانيا) الشرط اللازم «الشرط (وفقط إذا)»

نفرض أن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ معتمدة على بعضها اعتمادا خطيا صحيحا أى أن:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = C\right] = 1$$

إذن العلاقة $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ تمثل متغيرا عشوائيا مدمجا أى أن تباينه يساوى الصفر.

فإذا كانت $t_1, ..., t_n$ أعداد حقيقية تختلف عن الصفر فإننا نجد من العلاقة (3. 11. 11) أن

$$v\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \underline{t}' V_n \underline{t} = 0$$

إذن $|V_n| = 0$.

هـ. ط. ث

والنظرية السابقة توضح أنه إذا كان $|V_n| = 0$ فإن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المشترك $(X_1, ..., X_n)$ يكون متركزا على مستوى زائد hyper plane ذو أبعاد أقل من n وبناء على ذلك يمكن تقديم التعريف التالى للتوزيع المشترك المدمج.

تعريف (3 ـ 11 ـ 3) التوزيع المشترك المدمج:

إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ التى تمثل مركبات المتغير العشوائى المشترك $\left(X_1,...,X_n\right)$ تحقق علاقة خطية (مستقيمة) واحدة على الأقل باحتمال واحد صــحيح فإن توزيع المتغير المشترك $\left(X_1,...,X_n\right)$ يسمى توزيعاً مدمجاً degenerate وإذا كان $|V_n| \neq 0$ فإن التوزيع يكون غير مدمج Non – degenerate.

(3 ـ 11 ـ 4) بعض خصائص مصفوفة التغاير V_n :

(1) مصفوفة التغاير V_n متماثلة و $|V_n| \geq 0$ ـ كما ذكرنا فى العلاقة (3. 11. 8) ـ وهذا يترتب عليه أن:

$$(3.\ 11.\ 13):\ |V_n| \leq \sigma_1^2\,\sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2$$

(2) إذا كانـــت $V_{ik} = 0$ لجميع قيم $i \neq k$ تكون المتغيرات $X_1,...,X_n$ غير مرتبطة Uncorrelated وتكون مصفوفة التغاير V_n فى هذه الحالة مصفوفة قطرية ويكون:

$$(3.\ 11.\ 14):\ |V_n| = \sigma_1^2\,\sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2$$

عندما $v_{ik} = 0$ لجميع قيم $i \neq k$.

(3) مـــن العلاقتيـــن (3. 11. 13) و (3. 11. 14) نرى أن قيمة المحدد $|V_n|$ تصل نهايتها العظمى $\left(\sigma_1^2\,\sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2\right)$ عندما تكون المتغيرات $X_1,...,X_n$ غير مرتبطة.

(4) من العلاقة (3. 11. 13) نرى أنه كلما صغرت σ_i^2 ـ أى كلما كان التوزيع الهامشى للمتغـــير X_i مـــتركزاً حـــول توقعه ـ كلما صغرت قيمة المحدد $|V_n|$ وفى النهاية عندما تؤول واحدة من التباينات σ_i^2 إلى الصفر فإن $|V_n| = 0$ وبالتالى يصبح توزيع المتغـــير $\left(X_1,...,X_n\right)$ متلاشـــياً degenerate كمـــا يتضح من النظرية السابقة، أى يصبح متغيراً عشوائياً عدد مركباته أقل من n.

لكـــل هـــذه الخصـــائص السابقة أطلق "ولكس" "Wilks" على المحدد $|V_n|$ تسمية خاصة إذ أسماه بـــ "التباين العام" "Generalized Variance".

(3 ـ 11 ـ 5) استخدام المصفوفات فى التعبير عن توقع وتباين وتغاير متجهات المتغيرات العشوائية:

إذا كان: $\underline{Y}' = (Y_1, ..., Y_p)$, $\underline{X}' = (X_1, ..., X_n)$ متجهان عشوائيان فإن:

$$(3.11.15):\ (a)\ E\left(\underline{X}'\right) = [E(X_1), ..., E(X_n)]$$

هو توقع المتجه العشوائى $\underline{X}'$

$$(b)\ V\left(\underline{X}'\right) = \begin{bmatrix} v(X_1) & ... & c(X_1, X_n) \\ & .... & \\ c(X_n, X_1) & ... & v(X_n) \end{bmatrix} = [v_{ik}]_{n \times n}$$

هى مصفوفة التغاير للمتجه العشوائى $\underline{X}'$ المعطاة بالعلاقة (3.11.7a)

$$(c)\ C(\underline{X}, \underline{Y}) = Cov(\underline{X}, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} c(X_1, Y_1) ... c(X_1, Y_p) \\ .... \\ c(X_n, Y_1) ... c(X_n, Y_p) \end{bmatrix}$$

هى مصفوفة تغاير المتجهان العشوائيان $\underline{X}'$ و $\underline{Y}'$. حيث:

$$C(\underline{X}, \underline{Y}) = [C(\underline{X}, \underline{Y})]'$$

$$(d)\ V\left(\underline{L}'\,\underline{X}\right) = \underline{L}'\,V(\underline{X})\underline{L}\ ,\ C\left(\underline{L}'\,\underline{X}, \underline{M}'\,\underline{Y}\right) = \underline{L}'\,C(\underline{X}, \underline{Y})\underline{M}$$

حيث $\underline{L}$ و $\underline{M}$ متجهان عموديان.

إذا كان: $\underline{L}' = (l_1, ..., l_n)$ نجد من العلاقات (b) و(d) السابقة أن:

$$(3.11.16):\ V\left(\underline{L}'\,\underline{X}\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\, x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_i^2\, V(x_i) + 2\sum\sum_{i<j} l_i\, l_j\, Cov(x_i, x_j).$$

وإذا كان: $\underline{L}' = (l_1,\dots,l_n)$; $\underline{M}' = (m_1,\dots,m_p)$ نجد من العلاقات (c) و(d) السابقة أن:

$$(3.\,11.\,17):\ \mathrm{Cov}\left(\underline{L}'\,\underline{X},\underline{M}'\,\underline{Y}\right)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\,x_i\,,\sum_{J=1}^{p} m_J\,Y_J\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{p} l_i\,m_J\,\mathrm{Cov}\left(x_i,Y_J\right)\cdot$$

وعندما تكون $p > n$ نجد أن:

$$(3.\,11.\,18):\ \mathrm{Cov}\left(\underline{L}'\,\underline{X},\underline{M}'\,\underline{X}\right)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\,x_i\,,\sum_{J=1}^{p} m_J\,x_J\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} l_i\,m_i\,v(x_i)+\sum_{i\neq J=1}^{n}\sum l_i\,m_J\,\mathrm{Cov}(x_i,x_J)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{J=n+1}^{p} l_i\,m_J\,\mathrm{Cov}(x_i,x_J).$$

أما عندما $p = n$ فإن:

$$(3.\,11.\,19):\ \mathrm{Cov}\left(\underline{L}'\,\underline{X},\underline{M}'\,\underline{X}\right)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\,x_i\,,\sum_{J=1}^{n} m_J\,x_J\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} l_i\,m_i\,V(x_i)+\sum_{i\neq J=1}^{n}\sum l_i\,m_J\,\mathrm{Cov}(x_i,x_J).$$

إذا كانت $\underline{X}_1,\dots,\underline{X}_p$ متجهات عشوائية حيث $\underline{X}_i' = \left(X_{i_1},\dots,X_{i_n}\right)$ و $l_1,\dots,l_p$ كميات ثابتة فإن:

$$(3.11.20):V\left(l_1\,\underline{X}_1+\cdots+l_p\,\underline{X}_p\right)=\sum l_i^2\,V(\underline{X}_i)+2\sum_{i<J}\sum l_i\,l_J\,C(\underline{X}_i,\underline{X}_J)$$

وإذا كانت المتغيرات $\underline{X}_i$ غير مرتبطة

$$=\sum l_i^2\,V(\underline{X}_i)$$

وإذا كانت المتجهات العشوائية $\underline{X}_i$ غير مرتبطة ولها نفس التباين

$$= \left(\sum l_i^2\right) V(\underline{X}_i)$$

وإذا كـــان: $\underline{X}' = (X_1,...,X_n)$ متغير عشوائى متجه وB مصفوفة من الدرجة $(m \times n)$ فإن $B\underline{x}$ يكون متجه عشوائى عدد مركباته (متغيراته) m ويكون:

$$(3.\ 11.\ 21): E(B\,\underline{x}) = B\,E(\underline{X})$$

$$V(B\,\underline{x}) = B\,V(\underline{x})B'$$

عندما تكون B متجه صفى: $\underline{B} = (l_1,...,l_n)$ نجد من العلاقة السابقة أن:

$$E(\underline{B}\,\underline{x}) = E\left(\sum l_i\, x_i\right) = \sum l_i\, E(x_i)$$

والتباين $v(B\underline{x})$ كما هو فى العلاقة (3. 11. 16) السابقة.

(3 ـ 11 ـ 6) مصفوفة معاملات الارتباط:

نقـــدم فيما يلى مصفوفة شديدة الصلة بمصفوفة التغاير V_n المقدمة فى (3. 11. 7) هى مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ ونرمز لها بالرمز $P_n = [\rho_{ik}]$ حيـــث ρ_{ik} هـــو معامل الارتباط بين المتغيرين X_i و X_k وتأخذ الشكل التالى:

$$(3.\ 11.\ 22): P_n = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & ..... & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & .... & \\ & .... & & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & .... & 1 \end{bmatrix}$$

(حيث $\rho_{ii} = 1$)

والمصفوفة P_n متماثلة ــ لأن: $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ ــ وغير سالبة أى أن:

$$(3.\ 11.\ 23): \left|P_n\right| \geq 0$$

وذلــك لأنـــه بالتعويض فى المصفوفة V_n ــ فى العلاقـــة (3. 11. 7) ــ عن $v_{ik} = \rho_{ik}\,\sigma_i\,\sigma_k$ نحصل على العلاقة التالية بين محدد V_n ومحدد P_n:

$$(3.\ 11.\ 24): \left|V_n\right| = \sigma_1^2\,\sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2 \left|P_n\right|.$$

وبالتعويض فى العلاقة السابقة بالعلاقة (3. 11. 13) نجد أن:

$$(3.\ 11.\ 25):\ |P_n| \leq 1$$

ولكـــن مـــن (3. 11. 22) نـــرى أن $|P_n| = 0$ عندما تكون كل معاملات الارتباط $\rho_{ik} = 0$ أى أن قيمة المحدد $|P_n|$ تصل نهايتها العظمى عندما تكون كل المتغيرات غير مرتبطة وفى هذه الحالة تصبح المصفوفة P_n هى مصفوفة الوحدة I_n. أما إذا كان واحد علـــى الأقـــل مـــن معاملات الارتباط ρ_{ik} يساوى الواحد الصحيح يكون معنى ذلك أن المتغـــير $\underline{X}' = (X_1, ..., X_n)$ متلاشياً ــ طبقاً لنظرية (3 ــ 11 ــ 3 أ) السابقة ــ وفى هـــذه الحالة يكون $|V_n| = 0$ وكذلك $|P_n| = 0$ ــ أى أن $|P_n|$ يصل نهايته الصغرى 0 عندما يكون التوزيع متلاشياً ــ ومن هذا نرى أن $|P_n|$ يصلح مقياساً لدرجة اضمحلال أو تلاشى التوزيع.

(3 ــ 12) التوقع الشرطى فى حالة n ($2 <$) من المتغيرات العشوائية:

إذا رمزنا لدالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X_1 عندما $X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ بالرمـــز $F(x_1 | x_2, ..., x_n)$ حيث أنها دالة فى متغير واحد (x_1) والباقى ثوابت، فإن الـــتوقع الشـــرطى للمتغـــير $g(X_1)$ عـــندما $X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ يمكن تعريفه بالعلاقة:

$$(3.\ 12.\ 1):\ E[g(X_1) | x_2, ..., x_n] = \int g(x_1)\, d\, F(x_1 | x_2, ..., x_n)$$

وبوضع $g(x_1) = x_1$ فى العلاقة السابقة نحصل على التوقع الشرطى:

$$(3.\ 12.\ 2):\ E[X_1 | x_2, ..., x_n] = \int x_1\, d\, F(x_1 | x_2, ..., x_n)$$

فـــإذا كانت المتغيرات من النوع المتقطع فإن علامات التكامل فى العلاقات السابقة تـــتحول إلى علامات المجموع. كذلك بوضع: $g(X_1) = [X_1 - E(X_1 | x_2, ..., x_n)]^2$ فـــى معادلة (1 .12 .3) السابقة نحصل على التباين الشرطى للمتغير X_1 عند ثبات باقى المتغيرات عند القيم $x_2, ..., x_n$ فى الصورة التالية:

$$(3.12.3):\ V\left[X_1 \mid x_2,\ldots,x_n\right]$$

$$= \int\left[X_1 - E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n)\right]^2 d\,F(x_1 \mid x_2,\ldots,x).$$

$$= E\left\{\left[X_1 - E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n)\right]^2 \mid x_2,\ldots,x_n\right\}$$

والـــتوقع الشرطى $E[X_1 \mid x_2,\ldots,x_n]$ كدالة فى $x_2,\ldots,x_n$ يسمى دالة انحدار X_1 على $X_2,\ldots,X_n$ فإذا كانت هذه الدالة فى الصورة التالية:

$$(3.12.4):\ E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

نقــول أن X_1 يرتبط بالمتغيرات $X_2,\ldots,X_n$ فى شكل علاقة انحدار خطى من الدرجـــة الأولى فى $X_2,\ldots,X_n$. وإذا كان التباين الشرطى $V(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n) = 0$ لجمـــيع قيم $x_2,\ldots,x_n$ التى يكون عندها التوقع الشرطى $E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n)$ موجود يكون من الواضح أن:

$$\Pr\{X_1 = E[\,(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n) \mid x_2,\ldots,x_n\,]\} = 1$$

أى أنـــه عند معرفة قيم $x_2,\ldots,x_n$ يمكن استخدام التوقع $E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n)$ لـــتقدير قيمة X_1 وذلك باحتمال يساوى الواحد الصحيح أى بدرجة عالية جداً من الثقة. وبصـــفة عامـــة إذا كـــان $X_{m+1} = x_{m+1},\ldots,X_n = x_n$ فـــإن المتغـــير المشـــترك $(X_1, X_2,\ldots,X_m)$ عـــندما $X_{m+1} = x_{m+1},\ldots,X_n = x_n$ يعتبر متغيراً شرطياً ذو m مركـــبَّة وله دالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1,\ldots,x_m \mid x_{m+1},\ldots,x_n)$ ويكون توقع المتغير الشرطى $g[(X_1,\ldots,X_m) \mid x_{m+1},\ldots,x_n]$ معرفاً (فى حالة وجوده) بالعلاقة التالية:

$$(3.12.5):\ E[g(X_1,\ldots,X_m) \mid x_{m+1},\ldots,x_n]$$

$$= \int_{R_m} g(x_1,\ldots,x_m)\,d\,F(x_1,\ldots,x_m \mid x_{m+1},\ldots,x_n).$$

(حيث R_m هو الفراغ الاقليدى ذو الـــ m بعداً)

ويمكن باختيارات مناسبة للدالة $g(X_1,\ldots,X_m)$ أن نحصل على العزوم الشرطية المشـــتركة لأى عدد من المتغيرات. فمثلاً التوقع الشرطى المشترك للمتغيرين الشرطيين

X_1، X_2 عــندما $X_3 = x_3,..., X_n = x_n$ يمكــن الحصول عليه بوضع $m = 2$ و $g(x_1,..., x_m) = X_1 X_2$ ويكون التوقع الشرطى للمتغيرين X_1 و X_2 هو:

$$(3.12.6):\ E[X_1 X_2 | x_3,..., x_n] = \int_{R_2} x_1 x_2 \, d F(x_1, x_2 | x_3,..., x_n).$$

كما أن تغاير المتغيرين الشرطيين السابقين يمكن الحصول عليه بوضع:

$$\begin{aligned} g(X_1,..., X_m) &= g(X_1, X_2) \\ &= [X_1 - E(X_1 | x_3,..., x_n)]\,[X_2 - E(X_1 | x_3,..., x_n)] \end{aligned}$$

ويكون:

$$\begin{aligned} (3.12.7):\ &\mathrm{Cov}[X_1, X_2 | x_3,..., x_n] \\ &= \int_{R_2} [X_1 - E(X_1 | x_3,..., x_n)] \\ &\quad [X_2 - E(X_2 | x_3,..., x_n)]\, d F(x_1, x_2 | x_3,..., x_n). \end{aligned}$$

وهكذا بالنسبة لباقى العزوم الشرطية لأى عدد من المتغيرات عند ثبات باقى المتغيرات.

تمارين الباب الثالث

(3 ـ 1): أوجد $E(X)$ (توقع X) و $V(X)$ (تباين X) فى تمرين (2 ـ 1) (23).

(3 ـ 2): أوجد $E(X)$ و $V(X)$ فى تمرين (2 ـ 27).

(3 ـ 3): أوجد $E(X)$ و $V(X)$ ووسيط المتغير X فى كلٍ من التمارين التالية:

(أ) (2 ـ 5) (ب) (2 ـ 6) (جـ) (2 ـ 7)

(3 ـ 4): أوجد $E(X)$ ووسيط ومنوال المتغير X فى تمرين (2 ـ 29).

(3 ـ 5): أوجد العزم الرائى $\mu'_r = E(X^r)$ فى كل من:

(أ) تمرين (2 ـ 1) (24) (ب) تمرين (2 ـ 1) (26).

(3 ـ 6): فى تمرين (2 ـ 13) أوجد:

$$E(X_2 \mid x_1) \quad , \quad V(X_2 \mid x_1).$$

(3 ـ 7): فى تمرين (2 ـ 14) أوجد:

$$E(X_1 \mid x_2) \quad , \quad V(X_1 \mid x_2)$$

(3 ـ 8): فى تمرين (2 ـ 31) أوجد:

$E(XY)\,,\, E(Y \mid x)\,,\, V(Y \mid x)\,,\, E(Y)\,,\, E[E(Y \mid x)]\,,\, \rho_{xy}$ معامل الارتباط

(3 ـ 9): أوجد توقع مربع المسافة بين نقطتين اختيرتا عشوائيا داخل مربع طول ضلعه a.

(3 ـ 10): إذا كانت معادلة الدرجة الثانية $a^2 - b\,a + x = 0$ لها جذور حقيقية. و x متغير عشوائى موجب دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{d-c} \;;\; 0 < c < x < d$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد القيمة المتوقعة لكل من جذرى معادلة الدرجة الثانية السابقة.

(3 ـ 11) إذا كان:

$$P(x,y)=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{y}\binom{N-N_1-N_2}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}.$$

حيث x و y أعداد صحيحة موجبة تتراوح بين صفر و n، أوجد:

$$V(x)\ ,\ V(y)\ ,\ Cov(x,y).$$

(3 ـ 12): X و Y متغيران مستقلان كثافة احتمالهما:

$$f_1(x)=12x^2(1-x)\ \ ;;\ \ 0\le x\le 1$$

$$f_2(y)=2y\ \ ;;\ \ 0\le y\le 1$$

أوجد توقع المقدار $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{X^2}$.

(3 ـ 13): إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله: $f(x)=\frac{1}{2}\ \ ,\ \ -1<X<1$ و $Y=X^2$ بين أن $Cov(X,Y)=0$. كذلك إذا كان $Y=X^{2r}$ حيث r عدد صحيح موجب بين أن $Cov(X,Y)=0$ أيضا.

ملاحظة: هذا يوضح أن عدم الارتباط لا يعنى الاستقلال فالمتغيران X و Y غير مرتبطان بالرغم من وجود علاقة دالية بينهما $Y=X^{2r}$.

(3 ـ 14): إذا كانــت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائى X متماثلة حول قيمة معينة a، فأثبت أن العزوم الفردية حول a جميعها أصفار.

(3 ـ 15): لأى متغيرين X و Y أثبت أن: $[E(XY)]^2\le E(X^2)\,E(Y^2)$ ومن ثم بين أن: $\mu_r^2\le\mu_{2r}$ لجميع قيم r الزوجية وبالتالى: $\mu_2^2\le\mu_4$.

(3 ـ 16): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X,Y) هى:

$$f(x,y)=\binom{x}{y}\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\left(\tfrac{x}{15}\right)^y$$

عندما: $x=1,2,3,4,5\ \ ;;\ \ y=0,1,2,\dots,x$ وتساوى صفر خلاف ذلك.

أوجد:

(أ) $E(Y)$ (ب) $E(Y|x)$ (جـ) $E[E(Y|x)]$

(3 ــ 17): أثبت أن المقدار $E(X-C)^2$ لأى متغير X وثابت C يكون فى نهايته الصغرى عندما $C=E(X)$.

(3 ــ 18): أثبت أن الانحراف المتوسط حول نقطة a يكون فى نهايته الصغرى عندما تكون النقطة a هى الوسيط. ومن ثم أثبت صحة العلاقة (3. 3. 9).

(3 ــ 19): إذا كان m هو التوقع وg الوسط الهندسى وH الوسط التوافقى و σ^2 التباين لمتغير عشوائى X. وكانت الانحرافات عن التوقع صغيرة بالمقارنة بالتوقع نفسه بحيث أن:

$$\frac{(X-m)^r}{m^r} \to 0 \ , \ \text{for} \quad r>2$$

بين أن الوسط الهندسى H يساوى تقريباً $m\left(1-\frac{1}{2}\sigma^2/m^2\right)$ وأن الوسط التوافقى g يساوى تقريباً $m\left(1-\sigma^2/m^2\right)$. أى أن: H يساوى تقريباً $\frac{1}{2}(m+g)$.

(3 ــ 20): بين أن الانحراف المتوسط δ حول الوسط الحسابى يحقق العلاقة $\sigma \geq \delta$ وأن الفرق المتوسط Δ يحقق العلاقة $\sigma \cdot \sqrt{2} \geq \Delta$ حيث σ هى الانحراف المعيارى.

(3 ــ 21): فى التوزيع الأسى السالب:

$$f(x)=K e^{-x/\sigma} \ , \ 0 \leq x \leq \infty$$

بين أن التوقع والانحراف المعيارى والفرق المتوسط كلها متساوية وتساوى σ. وأن المدى الربيعى يساوى $\sigma \ln 3$.

(3 ــ 22): فى التوزيع التالى:

$$f(x)=K e^{-\frac{1}{2}x^2} \ x^{n-1} \ , \ 0 \leq x \leq \infty$$

بين أن:

العزم الأول حول الصفر = $\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$، العزم الثانى حول الصفر = n.

(3 ـ 23): فــى التوزيع المستمر عندما يكون التوقع موجود أثبت أن الفرق المتوسط Δ للمتغير X هو:

$$\Delta = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\{1-F(x)\}dx = 4\int_{-\infty}^{\infty} x\{F(x)-\tfrac{1}{2}\}d\,F(x).$$

حيث $F(x)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X.

ملاحظة: الفرق المتوسط مُعَرَّفٌ بالعلاقتين (3. 3. 11, 12).

(3 ـ 24): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله هى:

$$f(x) = \frac{K}{x^4+1} \;;\; -\infty \le x \le \infty$$

بين أن تباين X يساوى الواحد الصحيح.

(3 ـ 25): متغــير يأخذ قيم غير سالبة فقط وتوقعه μ بين أنه لأى قيمة موجبة x يكون: $F(x) > 1-\mu/x$ حيــث $F(x)$ هــى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغيــر. (هذه تسمى ـ أحياناً ـ متباينة ماركوف)

(3 ـ 26): فى التوزيعات المتقطعة المفردة التى تأخذ متغيراتها قيم غير سالبة أثبت أن:

الوسط التوافقى $\le$ الوسط الهندسى $\le$ الوسط الحسابى $H \le g \le m$

(3 ـ 27): علماً بأن الانحراف المتوسط δ للمتغير X هو:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|\,d\,F(x)$$

حيث $\mu = E(x)$ و $F(x)$ دالة التوزيع الاحتمالى. أثبت أن:

$$\delta = 2\int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)\,d\,F(x) = -2\int_{-\infty}^{\mu}(x-\mu)\,d\,F(x).$$

(3 ـ 28): إذا كانــت $f(x)$ دالــة غير تزايدية فى المدى $0 \le x \le \infty$ و $E(X)=\mu$ ووسيط $m = X$ بين أن $m \le \mu$ وبذلك يكون: $\mu \ge 1/\{2f(0)\}$.

(3 ـ 29): أثبت أن:

$$\mu'_{[r]}(a)=\sum_{J=0}^{r}\binom{r}{J}(b-a)^{[J]}\mu'_{[r-J]}(b)$$

حيث $\mu'_{[r]}(a)$ هو العزم العاملى من الدرجة r حول النقطة a المعطى بالعلاقــة (3. 5. 26) و $(b-a)^{[J]}=(b-a)(b-a-1)\dots(b-a-J+1)$.

(3 ـ 30): فى التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{\lambda^2}\,x\,e^{-(x/\lambda)^2/2}\quad;\ x>0\ ,\ \lambda>0$$

ويسمى بتوزيع "راى ليغ Ray Leigh" distribution Ray Leigh ـ أنظر تمرين (2 ـ 1) (27) ـ بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدهما.

(3 ـ 31): فى التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\lambda^3}\cdot x^2\,e^{-x^2/\lambda^2}\quad;\ x>0\ ,\ \lambda>0$$

ويســمى بــتوزيع "ماكسويل" "Maxwell" distribution ـ أنظر تمرين (2 ـ 1) (28) ـ بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدهما.

(3 ـ 32) فى التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{1}{B\left[\frac{1}{2},\ \frac{n-2}{2}\right]}\left(1-x^2\right)^{\frac{n-4}{2}}\quad;\ -1\le x<1$$

والمســمى بتوزيع معامل الارتباط ر ـ r distribution ـ بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدهما.

(3 ـ 33): X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{A}{|k|}\left[1-|k-x|\right]$$

عــندما: $|k-x|\le 1$, $k=\pm1^2\ ,\ \pm2^2\ ,\ \pm3^2,\dots$ وتســاوى الصفر خلاف ذلك.

(أ) أوجد قيمة A التى تجعل $f(x)$ دالة كثافة احتمال.

(ب) ارسم الدالة $f(x)$.

(جـ) بين أن توقع $|x|$ غير موجود (غير محدود).

(د) بين أنه إذا عرفنا التوقع بمفهوم قيمة كوشى الرئيسية فإنه يكون موجود.

(هـ) باستخدام متغير آخر Y كمتغير مدمج، أو كمقدار ثابت $Y = C$ بين أن توقع مجموع متغيرين عشوائيين ليس من الضرورى أن يساوى مجموع توقعيهما إذا عرفنا التوقع بأنه القيمة الرئيسية لكوشى. أى باختصار أثبت صحة العلاقة (3. 2. 18).

(3 ـ 34): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = k\,x^{-m}\, e^{-C/x} \quad , \quad 0 \le x \le \infty \ , \ C > 0$$

أوجد قيمة k ثم أثبت أن:

$$\mu'_r = E\left(X^r\right) = \frac{C^r}{\Gamma(m-1)} \cdot \Gamma(m-r-1)$$

عندما $r \le m-1$ ويكون غير موجود خلاف ذلك.

(3 ـ 35): إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = k\left(1 + \tfrac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\left\{C \tan^{-1}(x/a)\right\}} \quad , \quad -\infty \le x \le \infty$$

بين أن:

$$\mu'_r = E\left(X^r\right) = k\,a^{r+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{Cos}^{2m-r-2}(\theta) \cdot \mathrm{Sin}^r(\theta)\, e^{-C\theta}\, d\theta$$

ومن ثم:

$$\mu'_r = \frac{a}{2m-r-1}\left\{(r-1)a\,\mu'_{r-2} - C\mu'_{r-1}\right\}.$$

(3 ـ 36): إذا كانت $f(x)$ دالة كثافة احتمال متماثلة حول $x = 0$ للمتغير العشوائى X، حيث $-a \le X \le a$، ولها وسيط وحيد عند النقطة $x = 0$. بين أن:

$$\mu_{2r} = E\left(X^{2r}\right) < a^{2r}/(2r+1) \ , \ r \ge 1 .$$

(3 ـ 37): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\frac{k}{1+x^{2r}} \quad , \quad -\infty \le x \le \infty$$

بيـــن أن العــــزوم μ'_p موجـــود لجميع قيم $p \le 2(r-1)$. وبين أيضا بالنسبة للعزوم الموجودة أن:

$$\mu'_{2S-1}=0 \quad , \quad s=1,2,\ldots$$

$$\mu'_{2S}=\mathrm{Sin}\left(\tfrac{\pi}{2r}\right)/\mathrm{Sin}\left\{\tfrac{(2S+1)\pi}{2r}\right\}$$

(3 ـ 38): متغير X دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\frac{1}{B(n,m)}\cdot\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}} \quad , \quad n>0\ ,\ m>0\ ,\ 0\le x\le\infty .$$

لأى قيم r يكون العزم $\mu'_r=E\left(X^r\right)$ موجود. أوجد μ'_r ومنه استنتج $E(X)$ و $V(X)$.

(3 ـ 39): (X,Y) متغير عشوائى مشترك دالة كثافة احتماله:

$$f(x,y)=\frac{k}{(1+a\,x+b\,y)^n} \quad ;; \quad x>0\ ,\ y>0$$

حيــث a وb وk أعـــداد موجـــبة. لأى الأعـــداد r وJ يكـــون العزم المشترك $\mu'_{rJ}=E\left(x^r\,Y^J\right)$ موجـــود. أوجـــد هـــذا العزم ومنه استنتج التباين والتغاير للمتغيرين X وY.

(3 ـ 40): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران العشوائيان X وY هى:

$$f(x,y)=2 \quad ; \quad 0<x<y \quad ; \quad 0<y<1$$

بين أن: $E(X\,Y)\ne E(X)E(Y)$.

(3 ـ 41): المتغـــير X لــــه دالــــة كـــثافة الاحـــتمال $f(x)$ حيـــث $f(x)>0$ عـــندما $x=-1,0,1$ وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(أ) إذا كانت $f(0)=\frac{1}{2}$ أوجد $E\left(X^2\right)$.

(ب) إذا كانت $f(0)=\frac{1}{2}$ و $E(X)=\frac{1}{6}$ حدد قيمة كلٍ من $f(1)$ و $f(-1)$.

(3 ــ 42): إذا كان تباين المتغير X محدود، بين أن: $E(X^2)\geq[E(X)]^2$.

(3 ــ 43): X متغــير عشــوائى مســتمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ متماثلة حول المحور $X=C$. إذا كان توقع X محدود بين أن هذا التوقع يساوى C.

(3 ــ 44): X متغــير عشــوائى متقطع دالة احتماله $P(x)$ و $-\infty\leq x\leq\infty$. أثبت أن الشــرط اللازم والكافى لكى يكون $E(X-b)^2=0$ هو أن يكون $P(x)=1$ عندما $X=b$ ويساوى الصفر خلاف ذلك.

(3 ــ 45): X متغــير عشــوائى وm عدد صحيح موجب. إذا كان التوقع $E(X-b)^m$ محــدود وإذا كانت العزوم الأول والثانى والثالث للتوزيع حول النقطة $X=7$ هــى 3 و11 و15 على الترتيب. حدد التوقع μ للمتغير X وكذلك العزوم الثلاثة الأولى للمتغير X حول التوقع μ.

(3ــ 46): بيــن أن عزوم المتغير العشوائى يمكن أن تكتب بدلالة دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ كما يلى:

$$\mu'_r=E(X^r)=r\left\{\int_0^{\infty}x^{r-1}[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^{0}x^{r-1}F(x)dx\right\}$$

وذلك إذا كان العزم من الدرجة r موجود. وبالتالى إذا كان التوقع موجود يكون:

$$E(X)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx$$

مثل $E(X)$ بيانيا.

(3 ــ 47): إذا كان X متغير عشوائى توقعه μ والتوقع $E(X-\mu)^{2k}$ محدود بين أن:

$$\Pr\left[|X-\mu|\geq C\right]\leq E(X-\mu)^{2k}/C^{2k}$$

حيث C ثابت موجب.

(3 ـ 48): X متغير عشوائى يحقق العلاقة $\Pr[X \le 0] = 0$ و $E(X) = \mu$ كمية محدودة. بين أن:

$$\Pr[X \ge 2\mu] \le \tfrac{1}{2}$$

(3 ـ 49): X متغير عشوائى حيث $E(X) = 3$ و $E(X^2) = 13$ استخدم متباينة تشيبيتشيف لتحديد حد أدنى للاحتمال $\Pr[-2 < X < 8]$.

(3 ـ 50): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_2 و X_1 هى:

$$f(x_1, x_2) = 2 \;\; ; \;\; 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

أوجد:

$$E(X_1 \mid x_2)\,,\; V(X_1 \mid x_2)\,,\; \rho_{x_1x_2}$$ معامل الارتباط

$$,\; \Pr(0 < X_1 < \tfrac{1}{2} \mid X_2 = \tfrac{3}{4})\,,\; \Pr(0 < X_1 < \tfrac{1}{2}).$$

(3 ـ 51): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان متقطعان لهما دالة الاحتمال المشتركة:

$$P(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)/18 \;\; ; \;\; (x_1, x_2) = (1,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,1)\,,\,(2,2).$$

أوجد التوقع الشرطى والتباين الشرطى للمتغير X_2 عندما $X_1 = x_1$، $x_1 = 1, 2$.

(3 ـ 52): إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y لهما دالة الاحتمال المشتركة:

(أ) $P(x, y) = \tfrac{1}{3} \;\; ; \;\; (x, y) = (0,0)\,,\,(1,1)\,,\,(2,2)$

(ب) $P(x, y) = \tfrac{1}{3} \;\; ; \;\; (x, y) = (0,2)\,,\,(1,1)\,,\,(2,0)$

(جـ) $P(x, y) = \tfrac{1}{3} \;\; ; \;\; (x, y) = (0,0)\,,\,(1,1)\,,\,(2,0)$

فى كل حالة من الحالات السابقة احسب معامل الارتباط ρ بين X و Y.

(3 ـ 53): إذا كان X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة الاحتمال المشتركة التالية:

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
P(x, y)	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

أوجد معامل الارتباط بين X و Y.

(3 ـ 54): إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x,y)=1 \quad ; \; -x<y<x \;\; , \; 0<x<1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن لجميع قيم (x,y) التى عندها $f(x,y)>0$ يكون:

(أ) الخط البياني الممثل للدالة $E(Y\,|\,x)$ خط مستقيم. حدد معادلة الخط وارسم المنحنى الممثل له.

(ب) بينما الخط البياني الممثل للدالة $E(X\,|\,y)$ ليس خطاً مستقيماً. حدد معادلة الخط وارسم المنحنى الممثل له.

(3 ـ 55): أثبت أن معامل الارتباط ρ_{xy} بين المتغيرين العشوائيين X و Y يحقق العلاقة: $-1\le\rho_{xy}\le 1$.

(3 ـ 56): X متغير عشوائى متقطع له دالة الاحتمال:

$$P_k=\Pr(X=k)=\frac{6}{\pi^2\,k^2} \quad ; \; k=1,2,...$$

و Y متغير عشوائى آخر مُعرف كما يلى:

$$Y=\begin{cases} X & \text{إذا كان X عدد فردى} \\ -X & \text{إذا كان X عدد زوجى} \end{cases}$$

هل توقع Y موجود؟ علل إجابتك.

(3 ـ 57): أوجد الوسيط والمنوال والتوقع للتوزيع التالى:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \;\; , \; -\infty\le x\le\infty$$

(3 ـ 58): X_1 و X_2 و X_3 ثلاث متغيرات عشوائية نرمز لتوقعاتها وتبايناتها ومعاملات الارتباط بالرموز:

$\mu_1,\mu_2,\mu_3 \;;;\; \sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2 \;;;\; \rho_{12},\rho_{13},\rho_{23}$ ــ حيث ρ_{ij} هو معامل الارتباط بين X_i و X_j.

فإذا كان:

$$E(X_1 - \mu_1 \mid x_2, x_3) = b_2(x_2 - \mu_2) + b_3(x_3 - \mu_3)$$

حيث b_2 و b_3 ثابتان. حدد b_2 و b_3 بدلالة التباينات ومعاملات الارتباط.

(3 ـ 59): أثبت أن معامل التركيز لجينى والمعطى بالعلاقة (3. 3. 17) ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح.

(3 ـ 60): أثبت صحة العلاقة (3. 9. 36).

(3 ـ 61): أثبت صحة العلاقة (3. 9. 37).

(3 ـ 62): لأى متغير عشوائى مشترك (X, Y)، إذا كانت $\varphi(x)$ دالة حقيقية وحيدة القيمة فى x، أثبت أن: $E\{[Y - \varphi(X)]^2 \mid X = x\}$ يكون نهاية صغرى عندما $\varphi(x) = E(Y \mid x)$. أى أن العزم الشرطى من الدرجة الثانية للمتغير Y حول الدالة $\varphi(x)$ عندما $X = x$ يكون نهاية صغرى عندما تكون $\varphi(x)$ هى التوقع الشرطى للمتغير Y عندما $X = x$.

(3 ـ 63): إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان X_1 و X_2 توقعهما μ_1 و μ_2 وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2، على الترتيب. بين أن توقع وتباين حاصل الضرب $Y = X_1 X_2$ هو $\mu_1 \mu_2$ و $\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2$، على الترتيب.

(3 ـ 64): إذا كان Y يمثل مجموع مفردات عينة مكونة من خمسة مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 6x(1 - x) \;,\; 0 < x < 1$$

$= 0$, خلاف ذلك

فأوجد توقع وتباين Y.

(3 ـ 65): إذا كان $\overline{X}$ هو متوسط عينة عشوائية حجمها 9 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 4x^3 \;,\; 0 < x < 1$$

$= 0$, خلاف ذلك

فأوجد توقع وتباين $\overline{X}$.

(3 ـ 66): إذا كـــان X و Y متغيران عشوائيان معامل الارتباط بينهما $\rho = \frac{1}{2}$ وتوقعهما $\mu_1 = 1$ و $\mu_2 = 4$ وتبايــنهما $\sigma_1^2 = 4$ و $\sigma_2^2 = 6$، على الترتيب. أوجد توقع وتباين $Z = 3X - 2Y$.

(3 ـ 67): إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان توقعيهما μ_1 و μ_2 وتباينيهما σ_1^2 و σ_2^2، على الترتيب. حدد معامل الارتباط بين X و $Z = X - Y$ بدلالة μ_1 و μ_2 و σ_1^2 و σ_2^2.

(3 ـ 68): X و Y متغـــيران عشوائيان توقعيهما μ_1 و μ_2 وتباينيهما σ_1^2 و σ_2^2. ومعامل الارتباط بينهما ρ. بين أن معامل الارتباط بين: $W = aX + b$ $(a > 0)$ و $Z = cY + d$ $(c > 0)$ هو ρ.

(3 ـ 69): لعـــبة معينة يقوم فيها شخص بإلقاء زهرة نرد ثم إلقاء قطعة عملة ثم ســـحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة المكونة من 52 ورقـــة). ثم يتســـلم ثلاثة جنيهات (3) عن كل نقطة تظهر على زهـــرة الطاولة، وعشرة جنيهـــات (10) عند ظهور الصورة على قطعة العملة ولا شيء عند ظهور الكتابة وجنيه واحـــد (1) لكل نقطة تظهر على ورقة الكوتشينة المسحوبة و 11 جنيه للشايب و 12 جنـــيه للبنـــت و 13 جنيه للولد. إذا كانت العمليات الثلاثة التى يقوم بها هذا الشـــخص تمـــثل ثلاث متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع منتظم فأوجد توقع وتباين القيمة التى يتسلمها هذا الشخص من الجنيهات.

(3 ـ 70): X_1 و X_2 متغـــيران عشوائيان مستقلان تباينيهما يختلفان عن الصفر. أوجد معامل الارتباط بين X_1 و $Y = X_1 X_2$ بدلالة توقعى وتباينى X_1 و X_2.

(3 ـ 71): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك معالمه μ_1 و μ_2 و σ_1^2 و σ_2^2 و ρ ـ توقعـــى وتباينى X_1 و X_2 ومعامل الارتباط بينهما. أوجد معـــامل الارتـــباط بيـــن الدالتيـــن الخطيتيـــن $Y = a_1X_1 + a_2X_2$ و $Z = b_1X_1 + b_2X_2$ بدلالـــة الثوابـــت a_1 و a_2 و b_1 و b_2 ومعالم التوزيع المشترك.

(3 ـ 72): إذا كـــان $X_1, \ldots, X_n$ عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع توقعه μ وتباينه σ^2، فاستخدم متباينة "تشيبيتشيف" "Chebychev's Inequality" لتبين أن: $\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\overline{X} - \mu\right| < \epsilon\right] = 1$ لكـــل قـــيم $\epsilon > 0$. (هـــذه صيغة أخرى لنظرية الأعداد الكبيرة التى سنقدمها فى الباب العاشر).

(3 – 73): نفرض أن X متغير عشوائى مستمر توقعه μ و $Y = \nu(X)$ و $E(Y)$ موجود و:

$$\nu(x) = \nu(\mu) + \nu'(\mu)(x-\mu) + \tfrac{1}{2}\nu''(\alpha)(x-\mu)^2$$

حيث α تقع بين μ و x. إذا كان $\nu''(x) > 0$ لجميع قيم x بين أن $E[\nu(X)] \geq \nu(\mu)$. وإذا كان $\nu(x) \leq 0$ لجميع قيم x بين أن $E[\nu(X)] \leq \nu(\mu)$.

(3 – 74): نفرض أن X_1 و X_2 و X_3 ثلاث متغيرات عشوائية متساوية التباين ومعاملات الارتباط بينها هى $\rho_{12} = 0.3$ و $\rho_{13} = 0.5$ و $\rho_{23} = 0.2$. أوجد معامل الارتباط بين الدالتين الخطيتين $Y = X_1 + X_2$ و $Z = X_2 + X_3$.

(3 – 75): أوجد تباين مجموع عشرة متغيرات عشوائية كل منها تباينه 5 ومعامل الارتباط بين كل زوج منها 0.5.

(3 – 76): نفرض أن $X_1,\dots,X_n$ متغيرات عشوائية توقعاتها $\mu_1,\dots,\mu_n$ وتبايناتها $\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2$ و ρ_{iJ}، $i \neq J$، هو معامل الارتباط بين X_i و X_J. فإذا كان $a_1,\dots,a_n$ و $b_1,\dots,b_n$ ثوابت حقيقية فأثبت أن تغاير الدالتين الخطيتين

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \text{و} \quad Z = \sum_{J=1}^{n} b_J X_J$$

هو: $\sum_{J=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_J\, \sigma_i\, \sigma_J\, \rho_{iJ}$ حيث: $\rho_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$.

الفصل الرابع
الانحدار والارتباط والاقتران

(4 ـــ 1) منحنيات الانحدار أو الانحدار من النوع الأول:

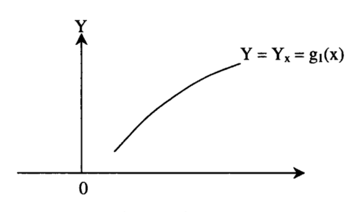
Regression Curves or Regression of the First Type:

إذا كـــان المتغـــير العشوائي (X, Y) من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال المشـــتركة $f(x, y)$ وكانـــت هذه الدالة مستمرة وتكاملية ودالة كثافة الاحتمال الهامشية $f_1(x)$ للمتغير X مستمرة وأكبر من الصفر عند النقطة $X = x$ فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير Y عندما $X = x$ تكون معطاة بالعلاقة

$$f_{21}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

فلـــو نظـــرنا للمتغير X على أنه متغير مستقل وY متغير تابع سنجد أن لكل قيمة $X = x$ مـــن قـــيم المتغير X يوجد لدينا توزيع احتمالى شرطى للمتغير التابع Y له دالة كثافة الاحتمال الشرطية $f_{21}(y \mid x)$ هذا التوزيع له معالم تحدد خصائصه ـــ ومن معالم هـــذا الـــتوزيع توقعـــه (الـــتوقع الشرطى) ووسيطه (الوسيط الشرطى) ومنواله (المنوال الشرطى) وهكذا. وطالما أن التوزيع نفسه يعتمد على x فإن هذه المعالم بصفة عامة تعتمد على x كذلك، وحيث أن هذه المعالم تعطى فكرة عامة وملخصة ومفيدة عن توزيع المتغير الشـــرطى Y (عندما $X = x$) لذلك يمكن التفكير فى استخدامها لتقدير قيمة Y المناظرة لقـــيمة معيـــنة مـــن قيم X ـــ حيث أن كل منها يعتبر دالة فى x. فمثلاً التوقع الشرطى للمتغـــير Y عـــندما $X = x$ يعتـــبر دالـــة فـــى x ويمكـــن أن نرمـــز لـــه بالرمـــز $Y_x = g_1(x) = E(Y \mid x)$ وعـــندما تتغير x من نقطة لأخرى تتغير معها Y_x لذا فإن $g_1(x)$ تعتبر متغير عشوائى ـــ أنظر علاقة (2 .9 .3) ـــ وعلى ذلك فإن المحل الهندسى

للـــنقطة (x, Y_x) لجميع قيم x المختلفة تمثل منحنى معين فى المستوى $R_2 \equiv X0Y$ كما فى الشكل التالى:



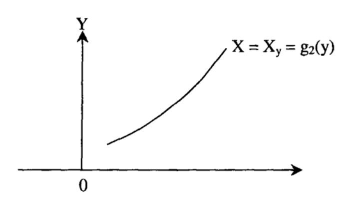
شكل (4 – 1 – 1)

"منحنى انحدار Y على X"

الشـــكل السابق يعطى قيمة الدالة (المتغير) Y_x لكل قيمة x من قيم المتغير X ـــ وهو منحنى فى المستوى R_2 وقد يكون خط مستقيم أو منحنى من أى درجة أو أى نوع ـــ أى أنـــه يعطى توقع Y لكل قيمة من قيم X. وأى منحنى من هذا النوع يسمى "منحنى انحـــدار Y علـــى X" أو "منحـــنى انحدار متوسطات Y على X" ومعادلته تسمى "معادلة انحدار Y على X" وتكتب فى الصورة التالية:

$$(4.1.1):\ Y = Y_x = E(Y \mid x)$$

وهى كما ذكرنا قد تكون معادلة خط مستقيم أو منحنى من أى درجة أو أى نوع. وبالمـــثل إذا اعتـــبرنا Y متغـــير مستقل وX متغير تابع ـــ وكانت الدالة $f_2(y)$ مستمرة وموجـــبة ودالـــة كثافة الاحتمال الشرطية $f_{12}(x \mid y)$ للمتغير X عندما $Y = y$ معطاة بالعلاقـــة $f_{12}(x \mid y) = f(x, y)/f_2(y)$ فـــإن هذه الدالة (الشرطية) تعتمد على y بصفة عامة، وبالتالى فإن أى معلمة من معالم التوزيع الشرطى للمتغير X عندما $Y = y$ تعتمد بصفة عامة على y. فمثلاً التوقع الشرطى للمتغير X عندما $Y = y$ يعتمد على y ويعتبر دالـــة فيها لذا نرمز له بالرمز $X_y = g_2(y) = E(X \mid y)$، وبالتالى فإن المحل الهندسى للنقطة (X_y, y) لجميع قيم y يكون منحنى معين فى المستوى R_2 يسمى "منحنى انحدار X على Y" أو "منحنى انحدار متوسطات X على Y" ويمكن تمثيله بالشكل التالى:



شكل (4 ـ 1 ـ 2)

"منحنى انحدار X على Y"

وهو منحنى معادلته:

$$(4.\ 1.\ 2):\ x = X_y = E(X \mid y)$$

ومنحنـيا الانحدار (1 .1 .4) و(2 .1 .4) ليسا متطابقان بصفة عامة، ولكنهما يكونا متطابقان إذا كان المتغيران X و Y معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً، إذ فى هذه الحالة يكون المتغيران X و Y مرتبطان بعلاقة خط مستقيم ـ لتكن مثلا $Y = \alpha + \beta X$ ـ فى هذه الحالة تكون كل قيم المتغير العشوائى (X, Y) واقعة على هذا الخط وبالتالى تكون كل قيم $E(Y \mid x)$ و $E(X \mid y)$ واقعة على نفس الخط فيكون خطى الانحدار متطابقان ويمثلهما خط واحد هو الخط المستقيم $Y = \alpha + \beta X$. أما إذا كان المتغيران X و Y مستقلان يكون $E(Y \mid x) = E(Y) = m_2$ و $E(X \mid y) = E(X) = m_1$ وبالتالى تصبح المعادلتان (2 ,1 .1 .4) معادلتى خطين مستقيمين أولهما موازى لمحور X ويقطع محور Y عند النقطة $Y = m_2$ والثانى موازى لمحور Y ويقطع محور X عند النقطة $X = m_1$ ويتقاطع الخطان (المتعامدان) عند النقطة (m_1, m_2) فى المستوى R_2. ومنحنى الانحدار (1 .1 .4) يستخدم لتقدير قيم المتغير Y بدلالة قيم المتغير X وكذلك المنحنى (2 .1 .4) يستخدم لتقدير قيم X بدلالة قيم Y، وحيث أننا نبحث دائماً عن المنحنى الذى يعطى أفضل تقدير ممكن سنرى أن المنحنيان (2 ,1 .1 .4) يمتازان بميزة هامة هى أن كل منهما يعطى أفضل تقدير طبقاً لمبدأ هام يسمى مبدأ "المربعات الصغرى" "Principal of Least Squares"، وطبقاً لهذا المبدأ يكون تباين المتغير الشرطى حول خط الانحدار أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) ويمكن توضيح ذلك كما يلى: عند وجود علاقة ما بين متغيرين Y و X ونرغب فى استخدام أحدهما (X مثلاً) فى تقدير قيم المتغير الآخر فإننا نبحث من بين جميع الدوال الممكنة

$g(x)$ للمتغير المفرد X عن الدالة التى تقدم لنا أفضل تقدير لقيم Y بدلالة قيم X. وطبعاً أفضـــل دالة تحقق ذلك هى الدالة $g(x)$ التى يتركز حول المنحنى الممثل لها قيم المتغير Y. وكلمـــا زاد تركيز قيم Y حول منحنى الدالة $g(x)$ كلما كانت هى أفضل دالة يمكن اســتخدامها لـــتقدير قيم Y بمعلومية X. وهذا يتحقق عندما تكون $g(x)$ هى الدالة التى تحقق العلاقة التالية:

$$(4.1.3):\ E[Y-g(x)]^2 = \min$$

أى هـــى الدالة التى تجعل التوقع السابق أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) ــ ولعل ملاحظـــة (3 ــ 9 جــ) تلقى المزيد من لضوء حول تفهم هذا المبدأ. والتوقع السابق هو توقع لدالة فى متغيرين X و Y أى أن:

$$I = E[Y-g(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(Y-g(x))^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

فإذا كانت $f(y\,|\,x)$ موجودة و $f_1(x)>0$ فإن:

$$I = \int\left\{\int[y-g(x)]^2 f(y\,|\,x)dy\right\}f_1(x)dx$$

والتكامل داخل القوس الهلالى بالنسبة للمتغير y هو العزم الشرطى الثانى للمتغير Y عـــندما $X=x$ وهذا يكون أصغر ما يمكن عندما يكون مأخوذاً حول توقع المتغير Y عـــندما $X=x$ أى أن قـــيمة $g(x)$ الـــتى تجعل هذا التكامل نهاية صغرى هى التوقع الشرطى $g(x)=E(Y\,|\,x)$ كما يتضح من العلاقة (3.9.41).

ملاحظة (4 ــ 1 ــ 1): عندما نكتب التكامل دون ذكر حدى التكامل يكون معروفاً أن حـــدى التكامل هما $\pm\infty$ وذلك لسهولة الكتابة كما فعلنا فى التكامل السابق وسوف نستمر على هذا فى باقى الكتاب.

ممـــا ســـبق يتضـــح أن الدالـــة $y_x = g(x) = E(Y\,|\,x)$ هى أفضل دالة يمكن استخدامها لتقدير قيم Y بدلالة قيم X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، ولذا فهى تمثل أفضل منحـــنى انحـــدار للمتغـــير Y علـــى المتغـــير X طبقاً لهذا المبدأ. وبالمثل تكون الكمية $E[X-h(Y)]^2$ أصـــغر مـــا يمكـــن ــ طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى ــ عندما تكون $h(y)=E(X\,|\,y)$ أى أن الدالـــة $x_y = h(y) = E(X\,|\,y)$ تمثل أفضل منحنى انحدار للمتغير X على المتغير Y طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى.

ملاحظـــة (4 ــ 1 ــ 2): عندما $X = x$ تكون الكمية $Y_{2.1} = Y - g(x)$ هى الـــباقى مـــن قيمة المتغير Y بعد طرح القيمة $g(x)$ وتسمى بـــ "الباقى" "Residual"

وحيث أن $g(x)$ تستخدم لتقدير Y عندما $X = x$، فإذا كانت الدالة $Y_x = g(x)$ هي الدالة التى تعطى لنا أفضل تقدير للمتغير Y عندما $X = x$ فإن الباقى $Y_{2.1}$ يكون أصغر ما يمكن، والباقى أو الفرق "أو الخطأ" $Y_{2.1} = Y - g(x)$ يسمى كذلك "خطأ التقدير" حيث أنه الفرق بين قيمة Y الفعلية وقيمتها المقدرة من العلاقة $Y_x = g(x)$. لذلك فإننا نختار الدالة $Y_x = g(x)$ التى تجعل توقع مربع الباقى $Y_{2.1}$ أو توقع مربع الخطأ $Y_{2.1}$ أصغر ما يمكن. والتوقع المعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{2.1}^2 = E[Y - g(X)]^2$$

يسمى بـ "تباين الخطأ" أو "تباين الباقى" Residual Variance أو "تباين خطأ التقدير" والكمية:

$$(4.1.4):\ \sigma_{2.1} = \sqrt{E[Y - g(X)]^2}$$

تسمى بـ "الخطأ المعيارى للتقدير" "Standard Deviation of Error of Estimate".

ملاحظة (4 ـ 1 ـ 3): لقد تناولنا منحنيات الانحدار مفترضين أن المتغيران X و Y من النوع المستمر وذلك لتبسيط العرض ويمكن تعميم ذلك بإيجاد منحنيات الانحدار سواء كان المتغيران X و Y من النوع المتقطع أو المختلط بنوعيه وذلك كما يلى:

(أ) منحنيات الانحدار عندما يكون المتغيران من النوع المتقطع:

إذا كان X متغير متقطع يأخذ القيم: $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ و Y متغير متقطع آخر يأخذ القيم $y_1, ..., y_k, ...$ ودالة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) هى: $P_{ik} = \Pr(X = x_i, Y = y_k)$ وعند كل قيمة x_i للمتغير X إذا كانت دالة الاحتمال الهامشية لهذا المتغير $P_{i.} = \Pr(X = x_i)$ دالة موجبة يكون التوزيع الشرطى للمتغير Y عندما $X = x_i$ معطى بالعلاقة $\Pr(Y = y_k \mid X = x_i) = \dfrac{P_{ik}}{P_i}$ والتوقع الشرطى $E(Y \mid X = x_i) = \dfrac{1}{P_{i.}} \sum_k y_k P_{ik}$ عندما X تأخذ القيم $x_1, ..., x_i, ...$ فإن متتابعة النقط $[x_i, E(Y \mid x_i)]$ تمثل انحدار Y على X وبالمثل يمكن تمثيل انحدار X على Y بمتتابعة النقط $[E(X \mid y_k), y_k]$ وبتوصيل النقط المتتابعة فى كل حالة من الحالتين السابقتين بخطوط مستقيمة تكون المنحنيات الناتجة هى منحنيات الانحدار للتوزيع المتقطع.

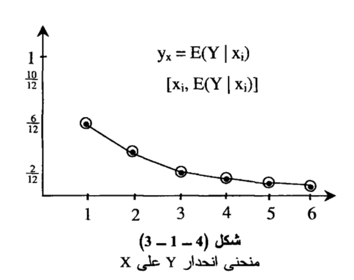
(ب) منحنيات الانحدار عندما يكون المتغير (X , Y) من النوع المختلط:

يمكـــن تعمـــيم المعالجـــة السابقة بتقديم الانحدار الخطى فى حالة المتغير المختلط بنوعيه. فلو كان X متغير متقطع يأخذ القيم $x_1, x_2, ...$ و Y متغير مستمر فإننا طبقاً لما قدمـــناه فـــى ملاحظـــة (3 ــ 9 جـــ) وعلاقـــة (41 .9 .3) نجد أن منحنى الانحـــدار $y_x = E(Y \mid x)$ هو أفضل منحنى يمكن أن يستخدم لتقدير قيم Y بمعلومية قيم X والنقط التى يتكون منها هذا المنحنى هى متتابعة النقط $[x_i, E(Y \mid x_i)]$ لجميع قيم $i = 1, 2, ...$ هــذه المتتابعة من النقط تمثل انحدار Y على X وبتوصيل هذه النقط مع بعضها بخطوط مســتقيمة نحصـــل علـــى منحـــنى انحدار Y على X. وبالمثل نجد أن منحنى الانحدار $x_y = E(X \mid y)$ هـــو أفضـــل منحنى يمكن أن نستخدمه لتقدير قيم X بمعلومية قيم Y والـــنقط الـــتى تمـــثل انحدار X على Y هى مجموعة النقط $[E(X \mid y), y]$ لجميع قيم $-\infty \le y \le \infty$. ولتصور شكل خطى الانحدار فى حالة المتغير المختلط بنوعيه سنكتفى بـــتقديم حالـــة خاصـــة وذلك برسم خطى انحدار Y على X و X على Y للتوزيع الثنائى المختلط فى مثال (3 ــ 9 جـــ) حيث نجد أن:

$$E(Y \mid x) = \frac{1}{2x} \;\; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 .$$

إذن خط انحدار Y على X يتحدد بالنقط $[x, \frac{1}{2x}]$

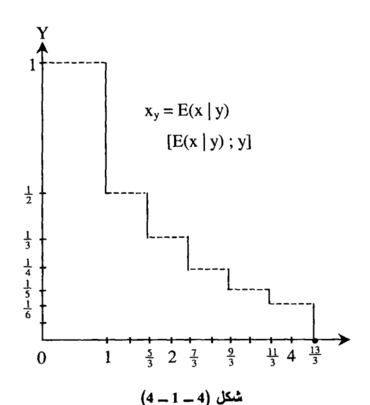
x :	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2x}$:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$



شكل (4 ــ 1 ــ 3)
منحنى انحدار Y على X

وبالمثل:

$$
\begin{aligned}
x_y = E(X \mid y) &= 13/3 \quad ; \quad 0 \le y \le \tfrac{1}{6} \\
&= 11/3 \quad ; \quad \tfrac{1}{6} \le y \le 1/5 \\
&= 9/3 \quad ; \quad 1/5 \le y \le 1/4 \\
&= 7/3 \quad ; \quad 1/4 \le y \le 1/3 \\
&= 5/3 \quad ; \quad 1/3 \le y \le \tfrac{1}{2} \\
&= 1 \quad ; \quad \tfrac{1}{2} \le y \le 1
\end{aligned}
$$



شكل (4 ــ 1 ــ 4)

منحنى انحدار X على Y

فى الشكل السابق لو استخدمنا المحور الرأسى للمتغير X والمحور الأفقى للمتغير Y فإن المنحنى يغطى محور Y فى الفترة $0 \le Y \le 1$ فى شكل دالة درجية (قفازة).

ويمكــن تقديــم نفس المعالجة السابقة عندما يكون X هو المتغير المستمر و Y هو المتغير المتقطع وذلك بكتابة Y بدلاً من X و X بدلاً من Y.

ومما هو جدير بالذكر أن الانحدار الذى قدمناه حتى الآن وعرفناه بأنه انحدار من النوع الأول المقصود به أن منحنى الانحدار هو مجرد منحنى معرف تعريف عام واسع فقد يكون كثيرة حدود من درجة معينة وقد يكون أى نوع آخر من المنحنيات. وفى الحالة الخاصة التى يكون فيها انحدار أحد المتغيرين على الآخر خطاً مستقيماً نقول أن هذا انحدار من النوع الثانى واختلاف التسمية بين النوعين يساعد على سهولة الإشارة إلى كل نوع على حده. وعند ذكر كلمة انحدار بدون تخصيص يكون المقصود بذلك هو "الانحدار من النوع الأول" أى الحالة العامة.

(4 ـ 2) الانحدار الخطى (المستقيم) أو الانحدار من النوع الثانى:

Linear Regression or Regression of The Second Type:

قدمنا فى البند (4 ـ 1) معادلتى الانحدار (4. 1. 1, 2) وأثبتنا أن هاتين المعادلتين تمثلان أفضل منحنيا انحدار للمتغير Y على X و X على Y طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، وطبقاً لهذا المبدأ كان الأسلوب المستخدم فى الحصول على المعادلة $Y = Y_x = E(Y \mid x)$ هو البحث عن دالة $g(x)$ من بين كل الدوال الممكنة التى تعطى لنا أفضل تقدير للمتغير Y بدلالة X هذه الدالة هى التى تجعل توقع الكمية المربعة $[Y - g(X)]^2$ أصغر ما يمكن وفى هذه الحالة تكون الدالة $g(x)$ أقرب ما يمكن إلى Y وتكون هى أفضل دالة يمكن أن تستخدم لتمثيل Y بدلالة X. ونفس الشىء بالنسبة للحصول على المعادلة $X = X_y = E(X \mid y)$ ولكن بدلاً من البحث بين كل الدوال الممكنة يمكن أن نقيد أنفسنا بنوع معين من الدوال مثل الدوال الخطية (الخطوط المستقيمة) أو كثيرات الحدود من درجة معينة أو دالة من العائلة الأسية أو غير ذلك من الدوال، وفى هذه الحالة يمكن استخدام مبدأ المربعات الصغرى لإيجاد دالة $g(x)$ من النوع الذى تقيدنا به لتمثل Y بدلالة X أفضل تمثيل. ومنحنيات الانحدار التى نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى "منحنيات انحدار المربعات الصغرى" mean square regression curves (m. sq. regression curves) فإذا تقيدنا بالبحث بين الدوال الخطية المستقيمة Linear functions التى من النوع $g(x) = \alpha + \beta x$ والتى تجعل توقع الكمية المربعة $[Y - g(X)]^2$ أصغر ما يمكن فإن الدالة الخطية $y = g(x)$ التى نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى "معادلة الانحدار الخطى المستقيم" وهى تمثل خط مستقيم وليس منحنى كما سبق أن ذكرنا فى البند السابق.

إذا فرضنا أن معادلة الانحدار الخطى للمتغير Y على المتغير X هى معادلة خط مستقيم فى الصورة التالية:

$$(4.2.1):\ y = y_x = g(x) = \alpha + \beta x$$

وإذا كــان σ_1^2 و σ_2^2 تبايــنى X و Y علــى الترتيــب وافترضــنا أنهما موجبان $\left(\sigma_i^2 > 0\right)$ ومحدودان $\left(\sigma_i^2 < \infty\right)$، $i = 1,2$، فيمكن إيجاد قيمتى α، β اللتان تجعلان معادلـــة (4. 2. 1) تعطى أفضل تقدير للمتغير Y بدلالة X طبقا لمبدأ المربعات الصغرى، أى قيمـــتى α، β اللـــتان تجعلان متوسط مربعات انحرافات قيم Y عن الخط المستقيم (4. 2. 1) أصغر ما يمكن وذلك بمفاضلة الكمية:

$$(4.\ 2.\ 2):\ Q(\alpha,\beta) = E[Y - \alpha - \beta X]^2$$

بالنسبة لـــ α ثم بالنسبة لـــ β ومساواة التفاضل فى كل حالة بالصفر:

$$(4.\ 2.\ 3):\ \frac{\partial Q(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0\ ;\ \frac{\partial Q(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0$$

وبعملية حسابية بسيطة نجد أن المعادلتين (4. 2. 3) لهما حل وحيد هو:

$$(4.\ 2.\ 4):\ \begin{cases} (a) & \beta = \beta_{21} = \dfrac{\nu_{12}}{\sigma_1^2} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \\ (b) & \alpha = m_2 - \beta_{21}\, m_1 = m_2 - \rho(\sigma_2/\sigma_1)m_1 \end{cases}$$

حيث $\mu_{11} = \nu_{12}$ هى $Cov(X,Y)$ تغاير X و Y، ρ معامل الارتباط بين X و Y، m_1 و m_2 توقع كل من X و Y على الترتيب. انظر تمرين (4 ـ 1) (أ).

ومـــن معادلـــة (4. 2. 1) يكون "خط انحدار المربعات الصغرى" للمتغير Y على المتغير X هو الخط المستقيم الذى معادلته:

$$(4.\ 2.\ 5a):\ y = y_x = \alpha_2 + \beta_{21}\, x = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1).$$

حيث

$$(4.\ 2.\ 5b):\ \alpha_2 = m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1\ ;\ \beta_{21} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_1^2}$$

والمعادلـــة الســـابقة تسمى معادلة "انحدار Y على X" و $\alpha_2 = m_2 - \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1$ تســـمى ثابـــت الانحـــدار و $\beta_{21} = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ تســـمى معـــامل انحـــدار Y على X وبما أن $\sigma_1 > 0$ و $\sigma_2 > 0$ إذن β_{21} لها نفس إشارة ρ.

وفى المعادلة السابقة عندما $X = m_1$ نجد أن $Y = m_2$ أى أن خط الانحدار يمر بالنقطة (m_1, m_2) وهى مركز ثقل توزيع المتغير (X, Y) ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى الصورة التالية:

$$(4.2.6):\ \frac{y - m_2}{\sigma_2} = \rho\left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right).$$

نلاحظ أننا فى إثبات العلاقات السابقة لم نفترض أن المتغيران X و Y من النوع المستمر أو المتقطع أو المختلط لذلك فإن خط الانحدار (4.2.5, 6) معرف لأى توزيع من أى نوع بشرط واحد أن يكون تبايني المتغيرين محدودان وموجبان أى $0 < \sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2 < \infty$.

العلاقة (4. 2. 2) تعطى متوسط (توقع) مربعات انحرافات قيم المتغير Y عن خط الانحدار $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$ وبالتالى كلما كان هذا المتوسط قريباً من الصفر كلما كانت قيم Y قريبة من القيم المناظرة على الخط $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$ وعندما يكون هذا المتوسط أصغر ما يمكن يكون هذا الخط هو أفضل خط يمكن توفيقه لتقدير قيم Y بمعلومية قيم X والعلاقة (4. 2. 2) يمكن اعتبارها العزم الثانى للمتغير Y حول الخط المستقيم $y = \alpha + \beta x$ والكمية $Q(\alpha, \beta) = E[Y - \alpha - \beta X]^2$ تسمى "تباين الباقى أو تباين خطأ التقدير" ـ كما سبق الإشارة إلى ذلك فى ملاحظة (4 ـ 1 ـ 2) ـ وحيث أن $Q(\alpha, \beta)$ تكون أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) عندما يكون الخط المستقيم $y = \alpha + \beta x$ هو أجود خط يمكن توفيقه لتقدير Y بدلالة X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى إذن بالتعويض عن قيمتى α، β المعطيتان بالعلاقة (4. 2. 4) فى الكمية $Q(\alpha, \beta)$ نحصل على النهاية الصغرى لهذه الكمية ـ ونعبر عن ذلك كما يلى:

$$(4.2.7):\ Q_{min} = E_{min}[Y - \alpha - \beta X]^2 = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X]^2$$

$$= E\left[Y - \left(m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1\right) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}X\right]^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2) = \sigma_{2\cdot1}^2$$

انظر تمرين (4 ـ 1) (ب).

وحيث أن $Y_{2\cdot1} = Y - \alpha_2 - \beta_{21} X$ هى الباقى من قيمة المتغير Y بعد طرح قيمة Y التى يمكن تقديرها من خط الانحدار $y_x = \alpha_2 - \beta_{21} x$ وتوقع هذا الباقى يساوى الصفر إذن الكمية:

$$Q_{min} = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X]^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

هى تباين الباقى، أى أن:

$$\sigma_{2\cdot1}^2 = V(Y_{2\cdot1}) = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

وبأسلوب مماثل يمكن إيجاد خط انحدار المربعات الصغرى للمتغير X على المتغير Y وذلك بإيجاد قيمتى α, β اللتان تجعلان الكمية:

$$(4.2.8): Q'_{min}(\alpha,\beta) = E[X-\alpha-\beta Y]^2$$

نهاية صغرى. فيكون أفضل خط يمكن توفيقه لانحدار X على Y طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى هو:

$$(4.2.9): x = x_y = \alpha_1 + \beta_{12} y = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$$

أو فى صورة مرادفة

$$(4.2.10): \frac{y-m_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right).$$

وهذا الخط يمر بمركز ثقل التوزيع أى بالنقطة (m_1, m_2). ويكون ثابت الانحدار α_1 ومعامل الانحدار β_{12} لخط انحدار X على Y هما:

$$(4.2.11): \begin{cases} \alpha_1 = m_1 - \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} m_2 \\ \beta_{12} = \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = Cov(X,Y)/\sigma_2^2 \end{cases}$$

(بما أن $\sigma_1 > 0$ ، $\sigma_2 > 0$ إذن β_{12} لها نفس إشارة ρ) والنهاية الصغرى للعزم الثانى للمتغير X حول خط الانحدار $x = \alpha_1 + \beta_{12} y$ (أو تباين الباقى $(x_{1\cdot2} = X - \alpha_1 - \beta_{12} Y$ هو:

$$(4.2.12): Q'_{min} = E_{min}[X-\alpha-\beta Y]^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2) = \sigma_{1\cdot2}^2$$

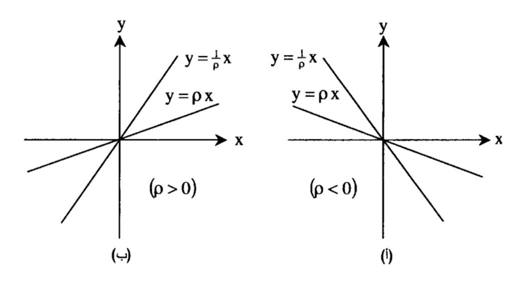
وخطى الانحدار (4.2.5) و(4.2.9) يمران بمركز ثقل التوزيع المشترك (X, Y) أى بالنقطة (m_1, m_2) لذا فهما يتقاطعان فى هذه النقطة وهما بصفة عامة غير متطابقان إلا إذا كانت $\rho = \pm 1$ إذ فى هذه الحالة يكون التوزيع المشترك للمتغير (X, Y) كله

متركزاً (مدمجاً) على خط مستقيم ــ كما يتضح من نظرية (3 ــ 10 ب) ــ وبالتالى يكون الخطان متطابقان مع هذا الخط المستقيم. أما إذا كانت $\rho = 0$ (أى X و Y غير مرتبطان) فإن خطى الانحدار (4. 2. 5a) و(4. 2. 9) يأخذان الصورة $x = m_1$ و $y = m_2$ أى يكونا خطـــان مـــتعامدان أحدهما موازى لمحور X والآخر موازى لمحور Y ومتقاطعان عند الـــنقطة (m_1, m_2) التى تمثل مركز ثقل التوزيع. وإذا نقلنا محاور X و Y بحيث تنطبق نقطـــة الأصل $(0,0)$ على مركز الثقل (m_1, m_2) واستخدمنا σ_1 ، σ_2 كوحدتى قياس لقيم X و Y على الترتيب فإن معادلتى الانحدار (4. 2. 6) و(4. 2. 10) تأخذان الصورة:

$$(4.2.13):\ y = \rho x$$

$$(4.2.14):\ x = \frac{1}{\rho} y$$

ويمكن تمثيلهما بالشكل التالى:



شكل (4 ــ 2 ــ 1)

خطى انحدار المربعات الصغرى $m = m_2 = 0\ ,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1$

ملاحظـــة (4 ــ 2 ــ 1): الكمـــية: $Q = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X]^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$ المعطـــاة بالعلاقة (4. 2. 7) تسمى تباين الباقى أو تباين خطأ التقدير. وتبرير هذه التسمية هـــو أن خـــط الانحدار $g(x) = \alpha_2 + \beta_{21} x$ الذى يحقق العلاقة السابقة هو أفضل خط لانحدار Y على X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى وبالتالى فهو أفضل خط يمكن استخدامه

لـــتقدير قيم Y بدلالة قيم X وبالتالى يكون الفرق $Y_{2.1} = (Y - \alpha_2 - \beta_{21}x)$ هو الفرق بيـــن قيمة Y الفعلية وقيمتها المقدرة من خط الانحدار وكلما كان هذا الفرق صغيراً كلما كانـــت قيم Y الفعلية قريبة من قيم Y المقدرة من خط الانحدار. وعندما $\rho^2 = 0$ يكون $E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 = \sigma_2^2$ أى أن تباين Y حول خط الانحدار هو نفسه تباين Y، أى أن تبايـــن المتغير $Y_{2.1} = Y - \alpha_2 - \beta_{21}X$ هو نفسه تباين Y مما يدل على عدم وجود ارتباط بين المتغيرين X، Y. أما إذا كانت $\rho \neq 0$ فإن تباين الباقى $Y_{2\cdot1}$ يقل دائماً عن تباين Y بمقدار $\sigma_2^2\rho^2$، أى أن طرح دالة خطية فى X من المتغير Y يؤدى إلى تخفيض تبايـــنه بمقدار $\sigma_2^2\rho^2$ وذلك لوجود ارتباط بين المتغيرين X وY. وعندما تصل ρ إلى قيمـــتها القصــــوى $\rho = \pm1$ فـــإن $E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 = 0$ وفى هذه الحالة يكون المتغـــيران X وY معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً ـــ كما يتضح من العلاقة (6 .2 .4) عـــندما $\rho = \pm1$ طـــبقاً لتعريف (3 ـــ 10 ب) ـــ وفى هذه الحالة يكون خطى انحدار Y على X وX على Y المعطيان بالعلاقتين (6 .2 .4) و(10 .2 .4) متطابقان ويمثلان خـــط مســـتقيم واحـــد هو $\frac{y - m_2}{\sigma_2} = \pm\left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right)$ ويكون التوزيع الاحتمالى للمتغير المشترك (X, Y) متركزاً على هذا الخط باحتمال واحد صحيح أى أن:

$$\Pr\left[\frac{y - m_2}{\sigma_2} = \pm\left(\frac{x - m_1}{\sigma_1}\right)\right] = 1$$

أى أن المتغـــيران X وY يتغيران معاً (فى شكل علاقة خطية صحيحة) فى نفس الاتجاه إذا كانت $\rho = 1$ وفى اتجاهين متضادين إذا كانت $\rho = -1$.

سبق تعريف معامل الارتباط ρ بالعلاقة (18 .8 .3) بأنه:

$$(4.\,2.\,15):\ \rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{\nu_{12}}{\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_1\,\sigma_2}$$

ويتضـــح مـــن هـــذه العلاقة أن ρ دالة متماثلة فى X وY ويساوى الصفر عندما $Cov(X, Y) = 0$ ونجد من معادلتى (4. 2. 5b) و(11 .2 .4) أن:

$$(4.\,2.\,16):\ \rho^2 = \beta_{12}\,\beta_{21}$$

أى أن مـــربع معامل الارتباط يساوى حاصل ضرب معامل انحدار X على Y فى معـــامل انحـــدار Y علـــى X. وكمـــا يتضح من (15 .2 .4) و(4. 2. 5b) و(11 .2 .4) أن

المعـــاملات ρ و β_{12} و β_{21} لهـــا نفـــس الإشارة حيث أن بسط كل منها $Cov(X, Y)$ والمقام كمية موجبة. إذن:

$$(4. 2. 17): \left|\rho\right| = \sqrt{\beta_{12}\,\beta_{21}}$$

أى أن القـــيمة الموجـــبة لمعامل الارتباط ρ هى الجذر التربيعى لحاصل ضرب معـــاملى الانحـــدار β_{12} فـــى β_{21} أمـــا إشـــارة ρ فهى نفس إشارة كلٍ منهما. وعندما $\sigma_1 = \sigma_2$ تكون $\rho = \beta_{12} = \beta_{21}$.

ملاحظة (4 ـ 2 ـ 2): من (4. 2. 5b) و(4. 2. 11) يمكن إثبات أن:

$$(4. 2. 18): \rho^2 = \frac{V\left[\alpha_2 + \beta_{21} X\right]}{\sigma_2^2} = V\left[\alpha_1 + \beta_{12}\, Y\right] / \sigma_1^2 .$$

ملاحظة (4 ـ 2 ـ 3): عندما يكون التوقع الشرطى $E(Y \mid x)$ [أو $E(X \mid y)$] فـــى شـــكل خطى، أى عندما تكون المعادلة $y = E(Y \mid x)$ [أو $x = E(X \mid y)$] معادلة خط مستقيم تكون قيم α و β التى تحقق العلاقة (4. 1. 3) هى نفس قيم α و β الـــتى تحقـــق العلاقـــة (4. 2. 2) وبالتالى يكون الانحدار من النوع الأول هو نفسه الانحدار من النوع الثانى بين المتغيرين X وY.

(4 ـ 3) الانحدار غير المستقيم Non – Linear Regression:

يمكن تعميم خطوط انحدار المربعات الصغرى للحصول على منحنيات على شكل كثـــيرة حـــدود من الدرجة الثانية فما فوق. فعند تحديد معادلة انحدار Y على X مثلاً فى صورة كثيرة حدود من الدرجة الثانية بدلاً من الخط المستقيم تكون معادلة الانحدار هى:

$$(4. 3. 1): y = g_2(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

ثم نحدد قيم α, β, γ التى تجعل

$$(4. 3. 2): Q = E\left[Y - \alpha - \beta x - \gamma x^2\right]^2 = \min$$

أى أصغر ما يمكن (نهاية صغرى).

وتكـــون قـــيم α, β, γ الـــتى تجعل (4. 3. 2) نهاية صغرى طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى هى حل المعادلات:

$$(4. 3. 3): \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = 0$$

ومن (4. 3. 3) نجد أن:

$$(4.3.4): \begin{cases} E(Y) = \alpha + \beta E(X) + E(X^2) \\ E(XY) = \alpha E(X) + \beta E(X^2) + E(X^3) \\ E(X^2Y) = \alpha E(X^2) + \beta E(X^3) + E(X^4) \end{cases}$$

ويمكـــن حل المعادلات السابقة بطريقة المحددات أو بأى طريقة أخرى للحصول علـــى قـــيم α, β, γ التى تسمى تقديرات المربعات الصغرى لثوابت منحنى الانحدار من الدرجة الثانية. فإذا كانت هذه القيم هى $\alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}$ يكون المنحنى:

$$(4.3.5): \ Y = \alpha_2 + \beta_{21}X + \gamma_{21}X^2$$

هـــو أفضـــل منحنى انحدار يمكن توفيقه لانحدار Y على X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. ويكون تباين الباقى أو تباين خطأ التقدير هو:

$$(4.3.6): \ Q_{min} = E_{min}\left[Y - \alpha - \beta X - \gamma X^2\right]^2$$

$$= E\left[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X - \gamma_{21} X^2\right]^2$$

وبصفة عامة يمكن تحديد كثيرة حدود:

$$(4.3.7): \ g_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

(حيث $\alpha_n \neq 0$) تجعل:

$$(4.3.8): \ Q = E[Y - g_n(X)]^2 = \min$$

وقـــيم α's الـــتى تحقق العلاقة السابقة هى التى تجعل المنحنى (4. 3. 7) أفضل منحـــنى يمكن توفيقه لمعادلة انحدار Y على X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى — وتكون قيم الثوابت $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ التى تحقق العلاقة (4. 3. 8) هى حل المعادلات:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = E\left\{x^i\left[g_n(x) - Y\right]\right\} = \sum_{J=0}^{n} \alpha_J E\left(x^{i+J}\right) - E\left(x^i Y\right) = 0$$

أى أن قيم α's التى تجعل المنحنى (4. 3. 7) أفضل منحنى يمكن توفيقه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى لانحدار Y على X هى حل المعادلات الآتية:

$$(4.\ 3.\ 9):\ \sum_{J=0}^{n} \alpha_J\, \mu_{i+J,0} = \mu_{i,1}$$

لجمـــيع قيم $i = 0,1,2,...,n$ حيث $\mu_{i,J} = E\left(X^i\, Y^J\right)$ وذلك بشرط وجود هذه العـــزوم، فنحصل بذلك على $(n+1)$ معادلة فى $(n+1)$ مجهول هى $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ وبالـــتالى يكـــون لديـــنا حل وحيد لهذه المعادلات فإذا كان المتغير X متماثل حول توقعه فيمكن تبسيط العمل الحسابى فى حل المعادلات (4. 3. 9) بأخذ المتغير X مقيساً من مركزه (توقعـــه) أى بـــإحلال X بدلاً من $X - m_1$ حيث m_1 هو توقع X وهذا يترتب عليه أن تكـــون كـــل العزوم الفردية أصفار مما يسهل حل المعادلات، كما يمكن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة لتبسيط العمل الحسابى.

(4 ـــ 4) نسبة الارتباط Correlation Ratio:

فـــى أى مجـــتمع ثنائى (X, Y) تتحدد قيمة أى مفردة بمركبتين إحداهما قيمة X والثانـــية قـــيمة Y. وعـــادة نرغب فى تقدير قيمة إحدى المركبتين عند معرفة الأخرى، وكذلك فى معرفة مدى دقة هذا التقدير. فمثلاً عند معرفة أن قيمة X بالنسبة لمفردة ما هى $X = x$ فإننا نرغب فى الحصول على أفضل دالة فى x يمكن استخدامها لتقدير قيمة Y وكذلك معرفة مدى دقة هذا التقدير. فإذا كانت $g(x)$ دالة فى x فإن $g(x)$ تكون أفضل دالة لتقدير قيمة Y طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى عندما تجعل الكمية $E_{xy}\left[Y - g(X)\right]^2$ أصغر ما يمكن (أى نهاية صغرى). والكمية $\left[Y - g(X)\right]$ تسمى "الباقى" "The Residual" " ونرمـــز لهـــا بالرمـــز $Y_{2\cdot 1}$ وهى الفرق بين قيمة Y الفعلية وقيمتها المقدرة من الدالة $g(x)$، أى الـــباقى مـــن قيمة Y الفعلية بعد أن نطرح منها قيمة Y المقدرة بدلالة X من الدالـــة $g(x)$. فإذا كانت $g(x)$ دالة حقيقية وحيدة القيمة فى x و $m_2(x) = E(Y \mid x)$ هـــى التوقع الشرطى للمتغير Y عندما $X = x$ وهى أيضاً دالة فى x، فيمكـــن إثبـــات أن: $E_{xy}\left[Y - g(X)\right]^2$ تكـــون نهاية صغرى عندما $g(x) = m_2(x)$ ونعبـــر عن ذلك كما يلى:

$$(4.\ 4.\ 1):\ E_{min}\left[Y - g(X)\right]^2 = E_{xy}\left[Y - m_2(X)\right]^2 = V\left(Y \mid x\right) = \sigma^2_{Y\cdot x}$$

و $\sigma^2_{Y\cdot x}$ هو التباين الشرطى للمتغير Y عندما $X = x$ كما تسمى بـــ "تباين الباقى $Y_{2\cdot 1}$". ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلى:

$$E_{xy}[Y-g(X)]^2 = E_{xy}[Y-m_2(X)+m_2(X)-g(X)]^2$$

حيث $m_2(X)=E(Y\mid x)$.

$$= E_{xy}[Y-m_2(X)]^2 + E_{xy}[m_2(X)-g(X)]^2 + 2E_{xy}[Y-m_2(X)][m_2(X)-g(X)]$$

والحد الأخير فى الطرف الأيمن يساوى الصفر إذن:

$$E_{xy}[Y-g(X)]^2 = E[Y-m_2(X)]^2 + E[m_2(X)-g(X)]^2 \geq E[Y-m_2(X)]^2$$

أى أن الحـد الأدنـى للـتوقع $E[Y-g(x)]^2$ نحصـل علـيه عـندما تكون $g(x)=m_2(x)=E(Y\mid x)$ وبذلك يكون أفضل اختيار للدالة $g(x)$ لكى تحقق العلاقة (4. 4. 1) هو $g(x)=m_2(x)=E(Y\mid x)$.

والتبايـن الشرطى $\sigma^2_{Y\cdot x}$ هو ذلك المقياس الذى نحكم به على مدى دقة استخدام الدالة $g(x)$ فى تقدير قيمة Y بدلالة X طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، فعندما $\sigma^2_{Y\cdot x}=0$ يمكـن تحديـد قـيمة Y بدلالـة X من الدالة $g(x)$ تحديداً تاماً باحتمال يساوى الواحد الصـحيح، حيث أن $\sigma^2_{Y\cdot x}$ هو تباين الباقى $Y_{2\cdot 1}=Y-m_2(X)$ ومادام تباين المتغير $Y_{2\cdot 1}$ (الـباقى) يسـاوى الصـفر إذن المتغير $Y_{2\cdot 1}$ يكون متغيراً مدمجاً وتوزيعه الكلى متركزاً عند توقعه الذى يساوى الصفر ومن تعريف (3 ــ 10ب) يكون:

$$\Pr[Y_{2\cdot 1}=0]=1$$
$$\Pr[Y-m_2(X)=0]=1$$
$$\Pr[Y=m_2(X)]=1$$

والدالة $m_2(x)=E(Y\mid x)$ التى تعتبر أفضل دالة لتقدير Y بدلالة X طبقاً لمبدأ المـربعات الصـغرى تتميز بميزة هامة وهى أن معامل الارتباط بينها وبين Y أكبر من معامل الارتباط بين Y وأى دالة أخرى فى X ــ أى أن $\rho[Y,g(x)]$ يكون نهاية عظمى عندما $g(x)=m_2(x)=E(Y\mid x)$ حيث يمكن إثبات أن:

(4. 4. 2): $\rho[Y,m_2(X)]\geq 0$

(4. 4. 3): $\rho[Y,m_2(X)]\geq |\rho[Y,g(X)]|$

لأى دالة $g(X)$ فى المتغير X.

حيث أنه لأى دالة $g(x)$ يكون:

$$Cov[Y, g(X)] = E_{xy}\{[g(X) - E\,g(X)][Y - E(Y)]\}$$

ومن (3.9.40d)

$$= E_x\{[g(X) - E\,g(X)]E_Y[Y - E(Y)]|x\}$$
$$= E_x\{[g(X) - E\,g(X)][m_2(x) - E\,m_2(x)]\}$$
$$= Cov[g(X), m_2(X)]$$

إذن:

$$(4.4.4):\ Cov[Y, g(X)] = Cov[g(X), m_2(X)]$$

ومن العلاقة السابقة عندما $g(x) = m_2(x)$ نجد أن:

$$(4.4.5):\ Cov[Y, m_2(X)] = Cov[m_2(X), m_2(X)] = V[m_2(X)] = \sigma^2_{m_2}$$

إذن عندما $0 < \sigma_y, \sigma_{m_2} < \infty$ يكون:

$$(4.4.6):\ \rho[Y, m_2(X)] = \frac{Cov[Y, m_2(X)]}{\sigma_y\ \sigma_{m_2}}$$

ومن (4.4.5)

$$= \frac{\sigma_{m_2}}{\sigma_Y} \geq 0$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (4.4.2). وحيث أن:

$$\rho^2(Y, g) = \frac{[Cov(Y, g)]^2}{\sigma^2_Y\ \sigma^2_g}$$

إذن من (4.4.4)

$$= \frac{[Cov[g, m_2]]^2}{\sigma^2_g\ \sigma^2_{m_2}} \cdot \frac{\sigma^2_{m_2}}{\sigma^2_y}$$

ومن (4.4.6)

$$(4.4.7a):\ \rho^2(Y, g) = \rho^2(g, m_2)\ \rho^2(Y, m_2)$$

إذن:

$$(4.4.7b):\ \rho^2(Y, g) \leq \rho^2(Y, m_2)$$

وحيث أن $\rho(Y, m_2) \geq 0$ كما فى (4.4.6) إذن $\rho(Y, m_2) \geq |\rho(Y, g)|$ وهذا يثبت صحة (4.4.3).

و $\rho(Y,g)$ تصــل حدها الأعلى عندما $\rho(g,m_2)=1$ كما يتضح من (4. 4. 7a) وهذا يتطلب أن تكون $g(X)$ دالة خطية فى $m_2(X)$ ـ كما فى تعريف (3 ـ 10 ب) ـ وهذا يوصلنا مرة أخرى إلى أن $g=m_2$ هى الدالة التى تجعل $\rho(Y,g)$ أكبر ما يمكن وبذلك تكون النهاية العظمى لمعامل الارتباط $\rho(Y,g)$ هى σ_{m_2}/σ_Y ـ كما يتضح من (4. 4. 6) ـ ومــربع هذه النهاية العظمى (عندما $\sigma_Y>0$) تسمى مربع "نسبة ارتباط Y على X" Correlation Ratio of Y on X ونرمز لها بالرمز ξ^2_{Yx} ويتضح من التعريف أن $0\le\xi^2_{Yx}\le1$ حيث أنها مربع معامل الارتباط بين Y و $m_2(X)$ (كما سنثبت ذلك جبريا بالعلاقة (4. 4. 9b) التالية) وعلى هذا يمكن تقديم التعريف التالى:

تعريف (4 ـ 4 ـ 1) نسبة ارتباط Y على X تعرف بأنها ξ_{Yx} حيث:

$$\textbf{(4. 4. 8):}\ \xi^2_{Yx}=\frac{V[m_2(X)]}{V(Y)}=\frac{V[E(Y\,|\,x)]}{V(Y)}$$

حيث: $0\le\xi^2_{Yx}\le1$,, $0<V(Y)<\infty$.

ولمزيد من الإيضاح فى تعريف نسبة الارتباط يمكن تجزىء التباين الكلى للمتغير Y إلــى مجمــوع مركبتيــن مســتقلتين إحداهمـــا تبايــن Y حــول خــط الانحــدار $m_2(x)=E(Y\,|\,x)$ والثانــية تباين $m_2(X)$ حول متوسطها الذى هو نفسه متوسط Y فإذا رمزنا إلى $E(Y)=m_2$, $E(X)=m_1$ وكان:

$$0<V(X)=\sigma_1^2<\infty\ ,\ 0<V(Y)=\sigma_2^2<\infty$$

و

$$E(Y\,|\,x)=m_2(X)\ ,\ V(Y\,|\,x)=\sigma^2_{Y.x}>0$$

$$E(X\,|\,y)=m_1(y)\ ,\ V(X\,|\,y)=\sigma^2_{x\cdot Y}>0$$

فإن:

$$\text{(4. 4. 9a):}\ \begin{cases}E(Y-m_2)^2=E[Y-m_2(X)]^2+E[m_2(X)-m_2]^2\\ \sigma_Y^2=\sigma^2_{Y\cdot x}+\sigma^2_{m_2}\end{cases}$$

وبقســمة طــرفى العلاقة السابقة على σ_Y^2 نجد أن: $1=\left(\xi^2\right)=\frac{\sigma_{m_2}^2}{\sigma_Y^2}+\frac{\sigma_{Y.x}^2}{\sigma_Y^2}$

وحيث أن $\frac{\sigma_{Y.x}^2}{\sigma_Y^2}\geq 0$ إذن:

$$(4.4.9b):\ 0\leq \xi_{Yx}^2\leq 1$$

العلاقة السابقة توضح أن:

التشتت الكلى σ_Y^2 للمتغير Y مقسم إلى مركبتين:

(1) المركبة الأولى $\sigma_{Y\cdot x}^2$ هى تشتت Y حول منحنى الانحدار $m_2(x)$ ـ أى تشتت قيم Y الفعلــية عــن قيم Y المقدرة من منحنى الانحدار $m_2(x)$ ـ وطبعا كلما كان هذا التشــتت صغيراً كلما كان منحنى الانحدار أكثر جودة فى تقدير قيم Y بدلالة X، لأن $\sigma_{Y\cdot x}^2$ تمثل متوسط (توقع) مربع الفرق (أو الخطأ) بين قيم Y الفعلية وقيم Y المقدرة مــن معادلة الانحدار (أو خط الانحدار) $m_2(x)$ لذلك نسمى $\sigma_{Y\cdot x}^2$ بــ "تباين خطأ التقدير" و $\sigma_{Y\cdot x}$ بــ "الخطأ المعيارى للتقدير" "Standard Error of Estimate".

(2) المركــبة الثانــية $\left(\sigma_{m_2}^2\right)$ مــن التشتت الكلى $\left(\sigma_Y^2\right)$ هى تشتت تقديرات قيم Y عن متوسطها (متوسط Y) ـ أى تباين $m_2(X)$ ـ وكلما اقتربت $\sigma_{m_2}^2$ من التشتت الكلى σ_Y^2 كلمــا اقتربت قيم Y المقدرة من قيم Y الفعلية مما يدل على زيادة تركيز قيم Y الفعلية حول منحنى الانحدار $m_2(x)$ ومما يدل أيضاً على أن الارتباط بين المتغيرين Y، X كبيراً. وبالتالى عندما تؤول $\sigma_{Y\cdot x}^2$ إلى الصفر تؤول $\sigma_{m_2}^2$ إلى σ_Y^2 وفى هذه الحالــة (الحدية) تكون كل قيم Y الفعلية منطبقة على منحنى انحدار Y على X وهذا يعــنى أن الارتــباط بيــن Y و X يكون تاماً (موجباً أو سالباً) أى أن معامل الارتباط $\rho=\pm 1$ لذلــك فإن النسبة $\sigma_{m_2}^2/\sigma_Y^2$ تستخدم كمقياس للارتباط بين X و Y وتسمى معــامل التحديد Determination Coefficient ونرمز له بالرمز D_{Yx}^2 ويعرف معامل التحديد بأنه:

$$(4.4.10):\ D_{Yx}^2=\frac{\sigma_{m_2}^2}{\sigma_Y^2}=\frac{V\left[E(Y\mid x)\right]}{V(Y)}$$

حيث $m_2(x)=E(Y\mid x)$.

وبمقارنة (8 .4 .4) بالعلاقة السابقة يتضح أن معامل التحديد D^2_{Yx} هو نفسه مربع نسبة الارتباط ξ^2_{Yx} ومن العلاقات (10 ,9 ,8 ,6 .4 .4) نجد أن معامل التحديد (أو مربع نسبة الارتباط)

$$(4.4.11):\ \xi^2_{Yx} = D^2_{Yx} = \rho^2\left[Y, m_2(X)\right] = 1 - \frac{\sigma^2_{Y\cdot x}}{\sigma^2_Y}$$

فإذا كان انحدار Y على X خطياً (أى خط مستقيم) يكون معامل التحديد D^2_{Yx} مساوياً معامل الارتباط $\rho^2(Y,X)$ بين X و Y أى أن:

$$(4.4.12):\ \xi^2_{Yx} = D^2_{Yx} = \rho^2(Y,X)$$

وذلك عندما يكون انحدار Y على X خط مستقيم. انظر تمرين (4 ــ 1) (جـ). وعلى ذلك عندما يكون انحدار Y على X خط مستقيم يكون $\xi^2_{yx} = D^2_{Yx} = \rho^2_{Yx}$ ومن (11 .4 .4) يكون معامل الارتباط:

$$(4.4.13):\ \rho^2_{Yx} = 1 - \frac{\sigma^2_{Y\cdot x}}{\sigma^2_Y}\ .$$

وتكون إشارة ρ هى نفس إشارة معامل الانحدار β.

لذلك فإن الجذر التربيعى للعلاقة (11 .4 .4) يستخدم كمقياس للارتباط بين X و Y وهنا نفرق بين ثلاث حالات:

الحالة الأولى: عندما يكون انحدار Y على X خط مستقيم يكون معامل التحديد D^2 هو نفسه مربع معامل الارتباط ρ^2 وبالتالى يكون معامل الارتباط بين X و Y هو:

$$(4.4.14):\ \rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y\cdot x}}{\sigma^2_Y}}$$

وتكون إشارة ρ هى نفس إشارة معامل الانحدار β_{21}. ويمكن إثبات أن صيغة ρ فى العلاقة السابقة تساوى تماماً صيغة ρ فى العلاقة (15 .2 .4). انظر تمرين (4 ــ 2).

الحالة الثانية: عندما يكون انحدار Y على X غير خطى Non - Linear ــ ولكنه فى شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية فما فوق يقاس الارتباط بالعلاقة (11 .4 .4) ولنميز حالة الانحدار عندما تكون معادلة الانحدار كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 2$ عن غيرها

مـــن حـــالات الانحـــدار الأخـــرى نسمى الجذر التربيعى لمعامل التحديد فى هذه الحالة بـــ "دليل الارتباط" "Index of Correlation" ونرمز له برمز خاص هو "d" وبالتالى يكون "دليل الارتباط" هو:

$$(4.4.15): \quad d = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y \cdot x}}{\sigma^2_Y}}$$

وتؤخذ d بدون إشارة إذ أن خط الانحدار فى هذه الحالة يكون منحنى من الدرجة $n \geq 2$ وبالـــتالى لا يكـــون له ميل ثابت. فإذا كان منحنى انحدار Y على X من الدرجة الثانية:

$$Y = m_2(x) = \alpha_2 + \beta_{21} X + \gamma_{21} x^2$$

فإن الارتباط بين X و Y يقاس بدليل الارتباط

$$d = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y \cdot x}}{\sigma^2_Y}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{m_2}}{\sigma^2_Y}}$$

$$d^2 = \frac{1}{\sigma^2_Y} E[m_2(X) - m_2]^2$$

الحالة الثالثة: عندما يكون منحنى انحدار Y على X ليس خطياً وليس كثيرة حدود مـــن الدرجة $n \geq 2$ وإنما يدل شكل انتشار البيانات على أنه غير خطى. فى هذه الحالة يمكـــن قياس الارتباط بين X و Y باستخدام نسبة الارتباط. وفى هذه الحالة يمكن تعريف نسبة الارتباط كما يلى:

تعـــريف (4 ـ 4 ـ 2): عـــندما يكـــون منحـــنى انحـــدار Y علـــى X ـ $m_2(x) = E(Y \mid x)$ ـ لـــيس خطاً مستقيماً فإن النسبة المعطاة بالعلاقة (4.4.8) أو (4.4.10) أو (4.4.11) تسمى "نسبة ارتباط Y على X" ونرمز لها بالرمز ξ_{Yx} حيث:

$$(4.4.16): \quad \xi^2_{Yx} = \frac{\sigma^2_{m_2}}{\sigma^2_Y} = \frac{E[m_2(X) - m_2]^2}{\sigma^2_Y} = 1 - \frac{\sigma^2_{Y \cdot x}}{\sigma^2_Y}$$

حيث $m_2(x) = E(Y \mid x)$, $m_2 = E(Y)$.

ودائمـــا فى التطبيقات نحتاج إلى المربع ξ^2 وليس الجذر التربيعى ξ لذلك فإننا عـــند كـــتابة ξ نكتـــبها بدون إشارة وهذا لا يؤدى إلى نقص فى عمومية تعريف نسبة الارتـــباط حيث أن ξ^2_{yx} تقيس درجة الارتباط بين Y و X عندما تكون معادلة انحدار Y

على X ليست خط مستقيم وإنما منحنى، قد تكون العلاقة بين Y وX طردية (موجبة) على جزء منه وعكسية (سالبة) على جزء آخر، لذلك فإن ξ تقيس درجة الارتباط دون تحديد اتجاهه. وبما أن $\xi^2_{Yx} = 1 - \sigma^2_{Yx}/\sigma^2_Y$ إذن فهي تنحصر بين الصفر والواحد الصحيح $(0 \le \xi^2 \le 1)$ كمـــا يتضح من (4. 4. 9b)، كما أن ξ^2 تقترب من الواحد الصحيح عندما يقـــترب خطأ التقدير $\sigma^2_{Y\cdot x}$ من الصفر. ففي هذه الحالة ــ كما أوضحنا بعد تقديم معادلة (4. 4. 1) ــ تكـــون العلاقـــة بيـــن X وY علاقة دالية حيث أن $\Pr[Y = m_2(x)] = 1$ وبالتالى يكون الارتباط بين X وY تاماً. كذلك تقترب ξ^2 من الصفر عندما تقترب σ^2_{Yx} مـــن σ^2_Y أى عندما لا يؤدى استخدام x فى تقدير Y إلى تخفيض كمية الخطأ. لذلك فإن ξ^2_{yx} تعتبر مقياس لدرجة التلازم أو الارتباط بين Y، X كما أنها تعتبر مقياس لدقة تقدير Y بدلالة X "A measure of accuracy of prediction" وعندما يكون منحنى انحدار Y على X كثـــيرة حدود من الدرجة $n \ge 2$ تكون نسبة الارتباط هى نفسها دليل الارتباط أى أن $\xi^2_{yx} = d^2_{Yx}$ وعـــندما يكون الانحدار خطاً مستقيماً تكون $\xi^2_{yx} = \rho^2_{Yx}$. إذا كان منحنى انحدار Y على X غير خطى Non – Linear ومعادلة الانحدار $y = m_2(x) = E(Y \mid x)$ وحاولـــنا توفـــيق خط مستقيم لهذا الانحدار وكان أفضل خط مستقيم طبقاً لمبدأ المربعات الصـــغرى هو: $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$ حيث α_2، β_{21} كما فى (4. 2. 5b) فيمكن كتابة ξ^2_{yx} من (4. 4. 16) و(4. 4. 9) فى الصورة التالية:

$$(4.4.17):\ \xi^2_{yx} = 1 - \tfrac{1}{\sigma^2_Y} E[Y - m_2(X)]^2$$

فـــإذا كان أفضل خط انحدار مستقيم لـــ Y على X هو المعطى بالعلاقة (4. 2. 5a) فيمكن إثبات أن:

$$(4.4.18):\ E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 = E[Y - m_2(X)]^2 + E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

حيث $m_2(x) = E(Y \mid x)$ هى منحنى انحدار Y على X. انظر تمرين (4 ــ 3).

من (4. 4. 17) و(4. 4. 18) نجد أن:

$$(4.4.19):\ \xi^2_{Yx} = 1 - \tfrac{1}{\sigma^2_Y} E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 + \tfrac{1}{\sigma^2_Y} E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

حيث α_2 ، β_{21} هى تقديرات المربعات الصغرى لثـوابت خط انحـدار Y على X كمـا فى (4. 2. 5b) إذن بالتعويض عن α_2 ، β_{21} كما فى (4. 2. 5b) يمكـن كتابـة (4. 4. 19) فى الصورة التالية:

$$\xi^2_{Yx} = 1 - \frac{1}{\sigma^2_Y}\sigma^2_Y\left(1-\rho^2\right) + \frac{1}{\sigma^2_Y}E\left[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)\right]^2$$

أى أن:

$$(4.4.20):\ \xi^2_{Yx} = \rho^2 + \frac{1}{\sigma^2_Y}E\left[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)\right]^2$$

إذن:

$$(4.4.21):\ 0 \le \rho^2 \le \xi^2 \le 1$$

والعلاقـة السـابقة توضح أنه فى حالة الانحدار غير الخطى تكون $\rho^2_{Yx} \le \xi^2_{Yx}$ حيث تزيد ξ^2_{yx} عن ρ^2 بكمية غير سالبة هى: $\frac{1}{\sigma^2_Y}E\left[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)\right]^2$ هذه الكمـية تقـيس انحـرافات منحـنى الانحـدار $y = m_2(x)$ عـن أفضل خط مستقيم $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$ يمكـن توفيقه لهذا الانحدار طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، لهذا عندما يكون الانحدار خطياً، أى عندما $m_2(x) = \alpha_2 + \beta_{21}x$ تكون $\xi^2 = \rho^2$ وفى هذه الحالة يمكـن الاكتفاء بحساب معامل الارتباط ρ لقياس الارتباط بين X و Y لأن حساب ξ لن يضيف أى معلومات جديدة.

وأخـيراً يمكن إيجاد نسبة ارتباط X على Y $\left(\xi^2_{XY}\right)$ بأسلوب مماثل مع كتابة X بـدلاً مـن Y و Y بدلاً من X فى العلاقات السابقة وكتابة المنحنى $x = m_1(y)$ بدلاً من $y = m_2(x)$.

ملاحظـة (4 ـ 4 ـ 1): يمكـن تلخـيص أهم النتائج المتعلقة بالعلاقة بين نسبة الارتـباط ξ ومعامل الارتباط ρ بين متغيرين X و Y كما يلى: (لسهولة الكتابة سوف نستخدم الترميز التالى: $\xi^2_{Yx} = \xi^2_2$, $\xi^2_{xY} = \xi^2_1$, $\rho_{xY} = \rho_{Yx} = \rho$)

(1) الشرط اللازم ــ ولكنه ليس كافى ــ لكى يكون المتغيران X و Y مستقلان هو:

$$\rho^2 = \xi^2_1 = \xi^2_2 = 0$$

فى هذه الحالة يكون:

$$E(Y \mid x) = E(Y) = m_2$$

$$E(X \mid y) = E(X) = m_1$$

ويكون خطى الانحدار (4. 1. 1) و(4. 1. 2) متعامدان والأول منهما موازى لمحور X ويقطــع محور Y عند النقطة $y = m_2$ والثانى موازى لمحور Y ويقطع محور X عند النقطة $x = m_1$.

(2) الشرط الكافى واللازم لكى يكون المتغيران X وY فى علاقة دالية تمثل خط مستقيم هو:

$$\rho^2 = \xi_1^2 = \xi_2^2 = 1$$

(3) الشرط الكافى واللازم لكى يكون المتغيران X وY فى علاقة دالية غير خطية Non – Linear هو:

$$\rho^2 < \xi_1^2 = 1$$

فى حالة انحدار X على Y أو

$$\rho^2 < \xi_2^2 = 1$$

فى حالة انحدار Y على X.

(4) العلاقـــة: $\rho^2 < \xi_2^2 < 1$ تتضـــمن المعنى التالى: أن المتغيران X وY قد لا توجد بيـــنهما علاقـــة دالية معروفة ـــ ولكن توفيق منحنى غير خطى لانحدار Y على X يكـــون أفضل من توفيق خط مستقيم وذلك لأن (4. 2. 18) و(4. 4. 8) فى هذه الحالة تتضمن أن:

$$V[m_2(X)] = V[E(Y \mid x)] > V[\alpha_2 + \beta_{21} X]$$

أى أن متوسطات Y أكثر تشتتاً عن تلك المتوسطات المقدرة من أفضل خط مستقيم يمكن توفيقه لانحدار Y على X.

(5) $\rho^2 = \xi_2^2 < 1$ إذا وفقـــط إذا كـــان انحـــدار Y علـــى X خطـــياً مضـــبوطاً Exactly Linear فى حين أنه لا توجد علاقة دالية معروفة خطية أو غير خطية بين Y وX. ومثال ذلك حالة المجتمع المعتاد الثنائى (X, Y) يكون انحدار Y على X خطياً مضبوطاً. أنظر $E(Y \mid x)$ للتوزيع المعتاد الثنائى فى الباب التاسع حيث نجد أنها تمثل علاقة خط مستقيم فى حين أن العلاقة بين X وY قد لا تكون معروفة.

(4 ــ 5) الانحدار الخطى التقريبى Approximate Linear Regression:

عــندما نفــترض أن معادلة انحدار Y على X (أو X على Y) معادلة خط مستقيم مضبوط (Exact) يكون هذا مجرد افتراض نظرى لا يتحقق إلا من الناحية النظرية إذ من الــنادر فــى الواقع العملى أن يكون الانحدار بين المتغيرين على شكل خط مستقيم تماماً Exactly Linear ولكــنه قد يكون قريباً جداً من الخط المستقيم بدرجة تجعلنا نستعمل الخط المســتقيم كتقريــب لخــط الانحدار وذلك عندما نرى من شكل انتشار البيانات أنه يمكننا بدرجــة عالــية من الجودة توفيق خط مستقيم لانحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر بالــرغم مــن عدم وقوع جميع نقط الانتشار على هذا الخط المستقيم. فافتراض أن خط انحــدار Y على X مثلاً هو خط مستقيم تماماً معناه أن جميع القيم أو النقط (X, Y) فى المجتمع تقع تماماً على هذا الخط المستقيم وهذا شىء نادر الحدوث فى الواقع العملى وإن كان ممكناً من الناحية النظرية. فمثلاً عندما نفترض أن X وY متغيران لهما توزيع معتاد ثنائى يمكن إثبات أن الانحدار بين Y وX انحدار خطى (مستقيم) تماماً حيث نجد أن:

$$E(Y \mid x) = \mu_2 + \rho \tfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - \mu_1)$$

و

$$E(X \mid y) = \mu_1 + \rho \tfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(X - \mu_2)$$

حيــث μ_1، μ_2، σ_1^2، σ_2^2 هى توقع وتباين X وY على الترتيب ــ كما يتضح فيما بعد ــ أنظر $E(Y \mid x)$ و $E(X \mid y)$ فى التوزيع المعتاد الثنائى فى الباب التاسع.

وكــل مــن المعادلتيــن السابقتين معادلة خط مستقيم تماما. إذن فى "المجتمعات النظرية" "Theoretical Populations" أو فى "التوزيعات النظرية" يمكن أن يتحقق هذا ولكن فى "المجتمعات المشاهدة" "Observed Populations" يكون من النادر أن نجد علاقة انحدار بين متغيرين فى شكل خطى تام منضبط. والمجتمع المشاهد هو مجتمع (أو مجموعة) من المشــاهدات تكــون فيه كل مشاهدات المجتمع متاحة لدينا فى حين توزيعه النظرى (أو الاحتمالى) غير معروف بالضبط. ولتوفيق خط مستقيم لانحدار Y على X فى أى مجتمع مشــاهد باســتخدام مبدأ المربعات الصغرى يكون أفضل خط مستقيم هو ذلك الخط الذى يجعــل مجمــوع مربعات انحرافات Y عنه (عن الخط المستقيم) أقل ما يمكن، أى الذى يحقــق العلاقة (3 .1 .4) عندما تكون $g(x)$ تمثل معادلة خط مستقيم. فإذا افترضنا ــ فى حالــة مجتمع مشاهد ثنائى معين (X, Y) ــ أن أفضل خط يمكن توفيقه لانحدار Y على X هو:

(4. 5. 1): $Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$

وكانــت مشاهدات المجتمع عددها n فإننا نختار ثوابت خط الانحدار α_2 و β_{21} التى تجعل مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن خط الانحدار المستقيم الموفق لهذه المشاهدات أقل ما يمكن ــ أى التى تجعل:

$$(4.5.2):\ S=\sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-\left(\alpha_2+\beta_{21}X\right)\right\}^2\equiv \text{minimum}$$

وقــيمة α_2 و β_{21} الــتى تــتحدد على هذا الأساس (بأن تجعل S نهاية صغرى) نحصل عليها بحل المعادلتين التاليتين:

$$(4.5.3):\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=0\ ,\ \frac{\partial S}{\partial \beta_{21}}=0$$

وبحلهما تتحدد قيمة المعلمتين α_2 و β_{21} طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى.
والمعادلتان السابقتان هما:

$$(4.5.4):\ \sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-\left(\alpha_2+\beta_{21}X_i\right)\right\}=0$$

$$(4.5.5):\ \sum_{i=1}^{n}X_i\left\{Y_i-\left(\alpha_2+\beta_{21}X_i\right)\right\}=0$$

ويمكن وضع المعادلتين معاً فى الصورة المصفوفية التالية:

$$(4.5.6):\ [\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]'\left(\underline{Y}_{n\times1}-[\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]_{n\times2}\ \underline{\theta}_{2\times1}\right)=\underline{O}_{2\times1}$$

حيث

$$[\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]'=\begin{bmatrix}1 & \dots 1\\ X_1 & \dots X_n\end{bmatrix}_{2\times n},\ \underline{\theta}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_{21}\end{pmatrix},\ \underline{O}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \underline{Y}'=\left(Y_1\ .....\ Y_n\right)$$

إذن:

$$(4.5.7):\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_{21}\end{pmatrix}=\underline{\theta}=\left\{[\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]'[\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]\right\}^{-1}[\underline{1}\ \vdots\ \underline{x}]'\ \underline{Y}$$

$$=\begin{pmatrix}n & \sum X\\ \sum X & \sum X^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum Y\\ \sum XY\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{n\sum X^2-\left(\sum X\right)^2}\begin{pmatrix}\sum X^2\sum Y-\sum X\sum XY\\ n\sum XY-\sum X\sum Y\end{pmatrix}$$

إذن:

$$(4.\ 5.\ 8):\ \beta_{21} = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2}$$

وهى نفس النتيجة (4. 2. 4) لحالة الانحدار الخطى المضبوط Exact Linearity of Regression بينما:

$$(4.\ 5.\ 9a):\ \alpha_2 = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

والعلاقة السابقة يمكن تبسيطها وكتابتها فى الصورة التالية:

$$(4.\ 5.\ 9b):\ \alpha_2 = m_2 - \beta_{21}\, m_1$$

حيث m_1 و m_2 هما توقع X وY على الترتيب.

والنتيجة السابقة هى نفس النتيجة (4. 2. 4) لحالة الانحدار الخطى المضبوط.

وبهذا يمكن كتابة معادلة انحدار Y على X كما فى (4. 5. 1) فى الصورة التالية:

$$(4.\ 5.\ 10):\ Y - m_2 = \beta_{21}\left(X - m_1\right)$$

وهى نفس المعادلة (4. 2. 5a). إذن نصل إلى نتيجة هامة وهى أنه عند حساب خط انحـــدار تقريبى بطريقة المربعات الصغرى نصل إلى نفس النتائج الصحيحة التى نحصل علـــيها فى حالة الانحدار الخطى المضبوط. ويمكن التعبير عن العلاقة (4. 5. 10) لجميع المشاهدات فى الصورة التالية:

$$(4.\ 5.\ 11):\ \underline{Y}_{(n\times 1)} = \left[\underline{1} \ \vdots \ \underline{x}\right]_{(n\times 2)} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_{21} \end{pmatrix}_{(2\times 1)}.$$

ملاحظة (4 ــ 5 ــ 1): بما أن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة للمجتمع الذى ســحبت مــنه لذلــك فإن مشاهدات العينة المسحوبة من مجتمع معين تشبه إلى حد كبير مشــاهدات هذا المجتمع وعلى هذا فإن الصيغ المستخدمة لإيجاد معالم المجتمع تكون هى نفس الصيغ المستخدمة لحساب إحصاءات العينة المقابلة لهذه المعالم. فالصيغة المستخدمة لإيجــاد معلمــة معيــنة من معالم مجتمع مشاهد تستخدم كما هى لتقدير هذه المعلمة من مشاهدات العينة والتغيير الوحيد هو استخدام مشاهدات العينة بدلاً من مشاهدات المجتمع. والقيمة المحسوبة لأى معلمة من معالم مجتمع معين من مشاهدات عينة عشوائية مسحوبة مــنه تسمى "تقدير" Estimate لهذه المعلمة باستخدام بيانات العينة. ومعالم المجتمعات مثل

العزوم ومعاملات الارتباط والانحدار والالتواء والتفرطح وغيرها ما هى إلا مقادير ثابتة فـــى حين أن التقديرات التى تحسب لها من عينة عشوائية تمثل متغيرات عشوائية، فمثلاً الوســط الحسابى $\overline{x}$ المحسوب من العينة (كتقدير لتوقع المجتمع) يتغير من عينة لأخرى طبقاً لتقلبات العينات العشوائية فى حين أن توقع المجتمع يعتبر قيمة ثابتة لا تتغير. وعادة نســمى معالم المجتمع "بارامترات" "Parameters" والقيم المناظرة لها فى العينة العشوائية "إحصاءات" "Statistics". وسنعود إلى إلقاء الضوء على هذه المفاهيم فيما بعد عند دراسة توزيعـــات المعايـــنة. وأهم ما نود إبرازه فى هذه الملاحظة هو أننا نعتبر توزيع المجتمع المشاهد مثل التوزيع التجريبى للعينة الذى قدمناه فى البنود (2 ـ 22 ـ 1 و 2 و 3) وذلك كما يلى:

(1) المجتمع المشاهد المفرد:

إذا كانت القيم المشاهدة لمجتمع مفرد هى $x_1, x_2, ..., x_n$ فيمكن تعريف "التوزيع الاحـــتمالى المشاهد" Observed Probability Distribution للمجتمع بأنه التوزيع الاحتمالى الـــذى نحصل عليه بتخصيص احتمال يساوى $\frac{1}{n}$ لكل قيمة من القيم المشاهدة وهو توزيع متقطع يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(4.5.12):\ P(x_i) = \tfrac{1}{n}\ ,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

فـــإذا كانت بعض القيم مكررة ـ x_i مثلاً مكررة C_i مرة حيث $\sum_{i=1}^{k} C_i = n$ ـ

فإن "التوزيع الاحتمالى المشاهد" للمجتمع يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(4.5.13):\ P(x_i) = \frac{C_i}{n}\ ;\ \ i = 1, 2, ..., k\ \ (k \le n)$$

كما أن "دالة التوزيع الاحتمالى المشاهد" تأخذ الصورة:

$$(4.5.14):\ F(x) = \frac{C(x)}{n}$$

حيث $C(x)$ هى عدد مشاهدات المجتمع التى تكون أقل من أو تساوى x.

والعزم الرائى المركزى للمجتمع يأخذ الصورة:

$$(4.5.15):\ \mu_r = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\ \ ;;\ \mu = E(X).$$

كما أن باقى معالم المجتمع يتم حسابها بنفس الأسلوب.

(2) المجتمع المشاهد الثنائى:

إذا كان لدينا مجتمع مشاهد ثنائى يمثله المتغير (X, Y) وقيمه المشاهدة هى $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ وعدد مشاهداته n مشاهدة، فيمكن قياساً على ما قدمناه فى حالة التوزيع التجريبى للعينة بند (2 ـ 22 ـ 3) تعريف "دالة الاحتمال" للمتغير الثنائى (X, Y) فى الصورة التالية:

$$(4.5.16): \ P(x_i, y_J) = \tfrac{1}{n}$$

عندما $i = J = 1, 2, ..., n$ وتساوى صفر عندما $i \neq J$. أو فى صورة مرادفة

$$(4.5.17): \ P(x_i, y_i) = \tfrac{1}{n} \ ; \ i = 1, 2, ..., n$$

فإذا كان عدد القيم (x_i, y_i) كبيرا فيمكن تبويب المشاهدات فى جدول مزدوج بحيث تكون قيم (X, Y) داخل الجدول المزدوج فى الصورة التالية:

$$(x_i, y_J) \ ; \ i = 1, 2, ..., k \ ; \ J = 1, 2, ..., s.$$

فإذا كانت القيمة (x_i, y_J) مكررة مرات عددها C_{iJ} فإن "دالة الاحتمال المشتركة" للمتغير الثنائى (X, Y) تأخذ الصورة:

$$(4.5.18): \ P(x_i, y_J) = \frac{C_{iJ}}{n} \ ; \ i = 1, 2, ..., k \ ; \ J = 1, 2, ..., s$$

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير X:

$$(4.5.19): \ P_1(x_i) = \frac{C_{i.}}{n} \ ; \ i = 1, 2, ..., k$$

حيث: $C_{i.} = \sum_{J=1}^{s} C_{iJ}$.

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير Y:

$$(4.5.20): \ P_2(y_J) = \frac{C_{.J}}{n} \ ; \ J = 1, 2, ..., s$$

حيث $C_{.J} = \sum_{i=1}^{k} C_{iJ}$.

وإذا كانـــت $C(x,y)$ هـــو عـــدد المشاهدات (x_i, y_j) فى المجتمع التى تحقق العلاقة: $x_i \leq x \ , \ y_j \leq Y$ لجميع قيـــم $i, \ j$ فـــإن "دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة" للمجتمع الثنائى المشاهد تأخذ الصورة:

$$(4.5.21): \ F(x, Y) = \frac{C(x, y)}{n}$$

ومـــن هـــذه الـــدوال يمكن إيجاد العزوم وبقية المعالم الأخرى للمجتمع المشاهد. ويمكـــن كذلـــك تعمـــيم ذلك إلى حالة المجتمع المشاهد $(X_1, \ldots, X_p)$ المكون من p من المتغـــيرات العشـــوائية المشـــتركة. فمـــثلاً العزم المركزى المشترك من الدرجة $r+t$ للمجتمع المشاهد (X, Y) هو:

$$(4.5.22): \ \mu_{rt} = E(X - m_1)^r (Y - m_2)^t = \tfrac{1}{n} \sum_i^n \sum_j^n (x_i - m_1)^r (y_j - m_2)^t$$

حيث: $m_1 = E(X) \ , \ m_2 = E(Y)$.

ومعامل ارتباط بيرسون لهذا المجتمع هو:

$$(4.5.23): \ \rho_{xY} = \mathrm{Cov}(X, Y)/\sigma_1 \sigma_2 = \frac{\sum_i (x_i - m_1)(y_i - m_2)}{\sqrt{\sum (x_i - m_1)^2 \ \sum (y_i - m_2)^2}}$$

وبالنسبة لصيغة معامل انحدار Y على X فى حالة افتراض أن انحدار Y على X انحدراً خطياً "مضبوط" محدد بالعلاقة:

$$Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$$

يكون معامل انحدار Y على X هو:

$$(4.5.24): \ \beta_{21} = \mathrm{Cov}(X, Y)/\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - m_1)(Y_i - m_2)}{\sum (x_i - m_1)^2}$$

$$= \frac{n \sum x y - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

وهى نفس الصيغ المستخدمة عند تقدير هذه المعالم من العينات العشوائية.

ملاحظـــة (4 ـ 5 ـ 2): إذا اعتـــبرنا أن منحنى انحدار Y على X فى المجتمع المشـــاهد (X, Y) غـــير خطى Non – Linear وممثل بالعلاقة $Y = m_2(X)$ فتكون الصيغة المستخدمة لإيجاد الخطأ المعيارى $\sigma_{Y \cdot x}$ هى:

$$(4.5.25):\ \sigma_{Y x} = \sqrt{\tfrac{1}{n}\sum\left[y - m_2(X)\right]^2}$$

حيث n هى عدد مفردات المجتمع.

ومعامل التحديد $D^2 = \rho^2$ هو:

$$(4.5.26):\ \rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2_{Y \cdot x}}{\sigma^2_2}$$

وتباين Yهو:

$$\sigma^2_2 = \tfrac{1}{n}\sum(y - m_2)^2$$

ودليل الارتباط d هو:

$$(4.5.27):\ d = \sqrt{\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y.x}}{\sigma^2_2}}$$

فإذا أمكن تفريغ بيانات المجتمع فى جدول تكرارى مزدوج أعمدته تمثل تكرارات X المناظرة لمراكز فئات Y وكانت مراكز فئات Y هى $Y_1, \ldots, Y_k$ ومراكز فئات X هى $X_1, \ldots, X_t$ وعـــدد المشـــاهدات التى تنتمى إلى الفئة التى مركزها X_i هو $n_{i.}$ وعدد المشاهدات التى تنتمى إلى الفئة التى مركزها Y_J هو $n_{.J}$ وعدد المشاهدات التى تنتمى إلـــى الفئتين ذات المركزين (X_i, Y_J) معاً هى n_{iJ} وعدد المشاهدات الكلية n فإن نسبة ارتـــباط X على Y المحسوبة من هذا الجدول تكون معطاة بالعلاقة (4. 4. 8) فى الصورة التالية:

$$(4.5.28):\ \xi^2_1 = \frac{\sum_{J=1}^{k} n_{.J}\left(\bar{x}_J - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t} n_{i.}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{\sum_{J=1}^{k} n_{.J}\left(\bar{x}_J - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}\sum_{J=1}^{n_{i.}}\left(x_{iJ} - \bar{x}\right)^2}$$

حيث:

$$\sigma_1^2 = V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{s=1}^{n_{i.}}(x_{is} - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t}\sum_{J=1}^{k} n_{iJ}(x_{iJ} - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_{i.}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_{i.}\overline{x}_i^2 - \overline{x}^2$$

و

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_i \ x_i$$

$$\overline{x}_J = \frac{1}{n_{.J}}\sum_{i=1}^{t} n_{iJ}\, x_i = E(X \mid y_J) = m_1(Y_J)$$

وبأسلوب مماثل يمكن الحصول على $\xi_2^2 = \xi_{XY}^2$. ويمكن الحصول على إحصاءات العينة المقابلة للمعالم σ_{YX} ، ρ^2 ، d، ξ^2 بنفس الصيغ المتقدمة المستخدمة فى المجتمع ولكن باستخدام مشاهدات العينة بدلاً من مشاهدات المجتمع.

(4 ـ 6) سطوح الانحدار:

(4 ـ 6 ـ 1) سطوح الانحدار من النوع الأول:

Regression Surfaces of The First Type:

درسنا فى البنود السابقة من هذا الباب العلاقة بين متغيرين وكيفية تحديد شكل هذه العلاقة بمعادلة انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر سواء بمعادلة خط مستقيم أو منحنى من أى درجة وكذلك تحديد درجة العلاقة بين المتغيرين بحساب معامل الارتباط فى الحالة التى تكون فيها العلاقة بين المتغيرين مستقيمة أو بدليل الارتباط أو بنسبة الارتباط عندما تكون العلاقة بين المتغيرين غير مستقيمة. وسنتناول الآن حالة أعم وذلك عندما تكون العلاقة بين متغير ما وبين متغيرين آخرين أو أكثر من متغيرين. ومثال ذلك العلاقة بين بعض الظواهر الاقتصادية مثل السعر والعرض والطلب حيث نعلم أن سعر سلعة معينة يرتبط بالكمية المعروضة من هذه السلعة وكذلك بحجم الطلب عليها ـ وهنا العلاقة بين متغير اقتصادى هو السعر (ونسميه بالمتغير المستقل) وبين متغيرين آخرين هما الكمية المعروضة والكمية المطلوبة (ونسميهما بالمتغيران التابعان)، وقد يوجد متغير تابع ثالث أو أكثر، فقد يتأثر السعر بالمستوى الاقتصادى للأفراد فى الدولة وبذلك يمكن اعتبار المستوى الاقتصادى متغير ثالث وقد يكون هناك متغير تابع رابع وخامس ..

وهكــذا. فلــو رمزنا للمتغير المستقل (السعر) بالرمز X_1 وللمتغيرين التابعين (العرض والطلب) بالرمزين X_2 و X_3 فيمكن تصور العلاقة بين السعر وكل من العرض والطلب متمثلة فى المعادلة التالية:

$$X_1 = a + b X_2 + c X_3$$

ويكون هدفنا هو تحديد الثوابت a, b, c. فلو كان الثابت b يختلف عن الصفر كان معــنى ذلــك وجــود علاقة بين المتغير المستقل X_1 (السعر) وبين المتغير التابع X_2 (الكمــية المعروضــة)، كذلك لو كان الثابت c يختلف عن الصفر كان معنى ذلك وجود علاقــة بين المتغير المستقل X_1 (السعر) وبين المتغير التابع الثانى X_3 (حجم الطلب). والمعادلــة السابقة تسمى معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 ـ والثابت b يسمى معامل انحــدار X_1 على X_2 وكذلك c يسمى معامل انحدار X_1 على X_3. ولتحديد الثابت b نتبع أسلوب مشابه تماماً لحالة المتغيرين وذلك بفرض أن المتغير الثالث X_3 مقداراً ثابتاً وبذلك تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالى:

$$X_1 = a' + b X_2$$

حيث a' تمثل مقدار ثابت هو $a' = a + c X_3$. ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى صورة عكسية كما يلى:

$$X_2 = a'' + b' X_1$$

وهــذه المعادلــة هى معادلة انحدار X_2 على X_1 وبذلك يكون b' هو معامل انحدار X_2 على X_1، وقياساً على العلاقة بين معامل الارتباط ρ ومعاملى انحدار X_1 على X_2 و X_2 على X_1 يمكن تعميم ذلك وتعريف معامل الارتباط بين X_1 و X_2 مع افتراض ثبات X_3 على أنه يساوى $\sqrt{b b'}$ ونرمز لذلك بالرمز التالى:

$$\rho_{12\cdot3} = \sqrt{b b'}$$

حيث $\rho_{12\cdot3}$ نرمز به لمعامل الارتباط بين المتغيرين X_1 و X_2 مع افتراض ثبات المتغــير الثالــث X_3 والدليل $(12\cdot3)$ الملحق بالحرف ρ مكون من العددين 1، 2 ثم نقطــة ثــم العدد 3. وهذا تعبير يقصد به معامل الارتباط بين المتغيرين X_1 و X_2 مع افــتراض ثبات X_3. وافتراض ثبات الكمية المطلوبة X_3 عند تغير الكمية المعروضة X_2 هــو افتراض نظرى قد لا يكون واقعياً لأن الظواهر الاقتصادية يصعب التحكم فيها بهذا الشكل فتغير الكمية المعروضة قد يؤدى إلى تغير فى السعر أى أن التغير فى السعر

يكون راجعاً فى جزء منه إلى تغير العرض وفى جزء آخر إلى تغير الطلب وبذلك يكون من الصعب حساب الارتباط بين الطلب والسعر على حدة وبين العرض والسعر على حدة مـــادام كل من المتغيرات الثلاثة يؤثر ويتأثر بالمتغيرين الآخرين مما يترتب عليه وضع متشـــابك يحتاج إلى معالجة تختلف إلى حد ما عن معالجة العلاقة فى حالة متغيرين اثنين فقـــط. لذلـــك ســـنقدم فـــى هذا البند تعميم لمنحنيات الانحدار التى سبق تقديمها فى حالة متغيرين فى الجزء السابق من هذا الباب إلى حالة $n > 2$ من المتغيرات. وسنقتصر على حالة المتغيرات المستمرة أو المتقطعة فقط دون المتغيرات المختلطة وذلك لسهولة عرض الموضـــوع من ناحية ولعدم أهمية الانحدار فى المتغيرات المختلطة من الناحية التطبيقية بالنسبة لدراستنا الحالية.

ونـــبدأ الآن بافـــتراض وجود $n > 2$ من المتغيرات العشوائية نرمز لها بالرموز $X_1,...,X_n$ هـــذه المتغـــيرات لها توزيع مشترك من النوع المستمر بدالة كثافة احتمال $f(x_1,...,x_n)$. وكمـــا نعلم من علاقة (3. 12. 2) أن التوقع الشرطى للمتغير X_1 عندما $X_i = x_i$ لجميع قيم $i = 2,...,n$ هو

$$(4.6.1a):\ E(X_1 \mid x_2,...,x_n) = \int x_1 f(x_1,...,x_n)dx_1 \Big/ \int f(x_1,...,x_n)dx_1$$

$$= m_1(x_2,...,x_n)\cdot$$

تعريف (4 ـ 6 ـ 1) المتغير المستقل التابع:

المحل الهندسى للنقطة $(m_1\ ,\ x_2,...,x_n)$ فى الفراغ R_n لجميع القيم الممكنة للمتغـــيرات $X_2,...,X_n$ يسمى بـ "المتغير المستقل التابع" لمتوسط المتغير العشوائى X_1 على المتغيرات العشوائية $X_2,...,X_n$ والذى نعبر عنه بالمعادلة:

$$\textbf{(4.6.1b):}\ X_1 = m_1(x_2,...,x_n).$$

وبأســـلوب مماثل يمكن تعريف أسطح الانحدار من النوع الأول لباقى المتغيرات العشـــوائية ــ أى أن عـــدد أســـطح الانحـــدار التى يمكن تعريفها هى n سطحا. وسطح الانحدار من النوع الأول ــ فى حالة $n > 2$ ــ يتميز بخاصية مشابهة للخاصية (4. 1. 3) حيث يمكن إثبات أن:

$$(4.6.1c):\ E\left\{[X_1 - m_1(x_2,...,x_n)]^2\right\} = \text{minimum}$$

حيث $m_1(x_2,...,x_n)$ كما فى (4. 6. 1a).

أى أن متوسط مـــربعات انحرافات X_1 عن أى دالة $u(x_2,...,x_n)$ تكون فى نهايتها الصغرى عندما $u(x_2,...,x_n) = m_1(x_2,...,x_n)$ وذلك باحتمال واحد صحيح. انظر تمرين (4 ـ 4).

(4 ـ 6 ـ 2) مســتويات انحــدار المــربعات الصغرى أو مستويات الانحدار من النوع الثانى:

Linear Mean Square Regression or Regression Planes of the Second Type:

نفرض أن المتغيرات $X_1,...,X_n$ لها توزيع احتمالى ما (أى توزيع) وأن العزوم المشــتركة من الدرجة الثانية لهذا التوزيع محدودة كما نفترض (دون نقص فى العمومية) أن المتغــيرات مقيسة من مركزها ــ أى أن $E(X_i^2) = \nu_{ii}$ و $E(X_i X_J) = \nu_{iJ}$ حيث ν_{ii} و ν_{iJ} همــا تباين X_i وتغاير X_i و X_J على الترتيب وهى عزوم محدودة لجميع قــيم $i, J = 1, 2, ..., n$. ويمكــن تعمــيم مفهوم خط الانحدار من النوع الثانى من حالة متغيريــن إلى حالة $n > 2$ من المتغيرات العشوائية المشتركة وذلك لأن أسطح الانحدار من النوع الأول المعرفة بالعلاقتين (4. 6. 1a, 1b) ليست دائماً مستوى زائد.

تعريف (4 ـ 6 ـ 2) المستوى الزائد للانحدار من النوع الثانى:

المستوى الزائد The Hyper Plane المعرف بالعلاقة:

$$(4.6.2):\ X_1 = \beta_{12.34..n} X_2 + \beta_{13.245...n} X_3 + \cdots + \beta_{1n.23...(n-1)} X_n$$

والذى يحقق الشرط التالى:

$$(4.6.3):\ E\left[X_1 - \beta_{12.34...n} X_2 - \cdots - \beta_{1n.23...(n-1)} X_n\right]^2$$

$$= S^2_{1.23...n} = minimum$$

أصغر ما يمكن.

يســـمى بـــــ "المســـتوى الـــزائد للانحـــدار" من النوع الثانى للمتغير X_1 على المتغيرات $X_2, ..., X_n$.

ملاحظـــة (4 ـ 6 ـ 2 أ): والترميز المستخدم فى التعريف السابق للثوابت β's هـــو الترميز الذى قدمه "يول" (1907) "Yule" حيث أن كل حرف β له دليلين أساسيين Primary Subscripts بعدهمـــا نضـــع نقطة ثم يتبع ذلك $(n-2)$ من الأدلة الثانوية Secondary Subscripts والدلـــيل الأول مـــن الأدلـــة الأساسية يشير إلى المتغير التابع والـــثانى يشـــير إلـــى المتغير المستقل المناظر لمعامل الانحدار β المرافق. لذلك فإن

الترتيب فى الأدلة الأساسية مهم فالدليل الأساسى يمثل زوج مرتب من الأعداد الصحيحة الموجبة. أما الدليل الثانوى فإنه يشير إلى باقى المتغيرات المستقلة (غير الموجودة فى الدليل الأساسى) وهنا الترتيب غير مهم ــ فمثلاً $\beta_{12.34...n}$ هو معامل الانحدار الجزئى للمتغير X_1 على X_2 مع ثبات $X_3,...,X_n$، ويمكن كتابة معامل الانحدار الجزئى $\beta_{1i.23...(i-1)(i+1)...n}$ فى الصورة $\beta_{1i.q(1i)}$ حيث $q(1i)$ تشير إلى باقى المتغيرات التى لا توجد فى الدليل الأساسى $(1i)$. وعندما لا يوجد خوفاً من سوء الفهم يمكن إهمال الدليل الثانوى. والثوابت β's ما هى إلا معاملات انحدار حيث $\beta_{12.34...n}$ تمثل متوسط الزيادة فى X_1 نتيجة لزيادة تعادل الوحدة فى X_2 ولما كان التغير فى X_1 ما هو إلا نتيجة مباشرة لتغيرات فى X_2 و X_3 ، ...، X_n فإن $\beta_{12.34...n}$ تعبر عن متوسط التغير فى X_1 الناتج عن تغير يعادل الوحدة فى X_2 فقط أى مع استبعاد أثر تغيرات باقى المتغيرات $(X_3,...,X_n)$ على X_1. وهذا ما نسميه بـ "معامل الانحدار الجزئى" **Partial Regression Coefficient** للمتغير X_1 على X_2 مع استبعاد (أو بفرض ثبات) تأثير باقى المتغيرات أو يسمى بـ "معامل الانحدار الجزئى لـ X_1 على X_2 بالنسبة لـ $X_3,...,X_n$" ونقول أنه معامل انحدار جزئى من الدرجة $(n-2)$ حيث $(n-2)$ هى عدد أرقام الدليل الثانوى أى عدد المتغيرات المثبتة أو المستبعد أثرها ــ وهذا الترميز الخاص قدمه "يول" (1907) "Yule" لتمييز معاملات الانحدار فى حالة $n > 2$ عن معاملات الانحدار فى حالة متغيرين والتى عادة نطلق عليها اسم "معاملات الانحدار الكلية" **Total Regression Coefficients**.

والعلاقة (4. 6. 2) تمثل أفضل (أو أجود) تقدير خطى للمتغير X_1 بدلالة X_2، ...، X_n والجودة هنا بمعنى أن متوسط مجموع مربعات انحرافات قيم X_1 الفعلية عن قيمها المقدرة من العلاقة (4. 6. 2) تكون نهاية صغرى طبقاً للعلاقة (4. 6. 3)، أى أقل من متوسط مجموع مربعات الانحرافات عن أى مستوى خطى آخر. لذلك فالمستوى (4. 6. 2) هو أفضل المستويات بصفة عامة طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى المعبر عنه بالعلاقة (4. 6. 3). وهذا يوضح أن تركيز قيم المتغيرات حول المستوى (4. 6. 2) أقوى من تركيزها حول أى مستوى آخر. لذلك فإننا نعتبر أن X_2، ...، X_n متغيرات مستقلة وأن X_1 متغير تابع يمكن تقديره من X_2، ...، X_n بالعلاقة الخطية (4. 6. 2).

ولتحديد معاملات الانحدار β's ــ طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى ــ نفاضل العلاقة (4. 6. 3) بالنسبة لكل من المعاملات المجهولة β's التى عددها $(n-1)$ ونساوى التفاضل فى كل مرة بالصفر فنحصل على $(n-1)$ من المعادلات هى:

$$(4.6.4a):\ E\left\{x_i\left[x_1-\sum_{J=2}^{n}\beta_{1J.q(1J)}\,x_J\right]\right\}=0\quad;\quad i=2,3,\dots,n$$

وبالمــثل يمكــن إثــبات أنه عندما يكون المتغير التابع هو X_k وباقى المتغيرات مستقلة فإن:

$$(4.6.4b):\ E\left\{x_i\left[x_k-\sum_{J=2}^{n}\beta_{kJ.q(kJ)}\,x_J\right]\right\}=0\quad;\quad i=2,3,\dots,n$$

وبالتعويض فى (4.6.4a) عن $i=2,3,\dots,n$ نحصل على المعادلات التالية:

$$(4.6.5):\ v_{22}\,\beta_{12.q(12)}+v_{23}\beta_{13.q(13)}+\cdots+v_{2n}\,\beta_{1n\,q(1n)}=v_{21}$$

$$v_{32}\,\beta_{12.q(12)}+v_{33}\beta_{13.q(13)}+\cdots+v_{3n}\,\beta_{1n.q(1n)}=v_{31}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_{n2}\,\beta_{12.q(12)}+v_{n3}\beta_{13.q(13)}+\cdots+v_{nn}\,\beta_{1n.q(1n)}=v_{n1}$$

حيــث $\beta_{1k.q(1k)}$ كما هى معرفة فى ملاحظة (4 ــ 6 ــ 2 أ) والمعادلات السابقة عددهــا $(n-1)$ معادلــة فى $(n-1)$ من المجاهيل β's لذلك فلها حل وحيد بشرط أن يكون المحدد الأساسى للمعادلات أكبر من الصفر. وسنرى أن حل هذه المعادلات سيكون بدلالة محدد مصفوفة التغاير V_n المقدمة فى العلاقة (3.11.7a) ومرافقات بعض عناصر هذه المصفوفة. لذلك سنرمز لمرافق العنصر v_{iJ} فى المصفوفة V_n بالرمز $c(V_n^{iJ})$ أى أن مرافق العنصر v_{11} هو المحدد التالى:

$$(4.6.6):\ c\left(V_n^{11}\right)=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n}\\ v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{nn}\end{vmatrix}$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلات (4.6.5) السابقة فى صورة مصفوفية كما يلى:

$$(4.6.7):\ c\left(V_n^{11}\right)\underline{\beta_{1.}}=\underline{v_{.1}}$$

حيث $c\left(V_n^{11}\right)$ هو مرافق العنصر v_{11} فى محدد المصفوفة V_n كما فى (4.6.6) و

(4. 6. 8a): $\underline{\beta'_{1.}} = [\beta_{12.q}, ..., \beta_{1n.q}]$, $12.q \equiv 12.q(12)$, $1n.q \equiv 1n.q(1n)$.

و

(4. 6. 8b): $\underline{v'_{.1}} = [v_{21}, ..., v_{n1}]$

وبذلك يمكن إيجاد المجاهيل $\underline{\beta_1}$ بحل المعادلات (4. 6. 7) بطريقة المحددات وذلك بشرط أن يكون $c(V_n^{11}) > 0$ حيث نجد أن قيم المجاهيل β's يمكن الحصول عليها من أى من العلاقات التالية:

$$(4.\ 6.\ 9):\quad \beta_{1k\cdot q(1k)} = \begin{cases} (a) & -\,c(V_n^{1k})/c(V_n^{11}) \quad \text{أو} \\ (b) & -\quad v^{1k}/v^{11} \quad \text{أو} \\ (c) & -\,\sigma_1 c(P_n^{1k})/\sigma_k c(P_n^{11}) \quad ; \quad (k = 2, 3, ..., n) \end{cases}$$

حيـث: $c(V_n^{11})$ هو مرافق العنصر v_{11} أى مرافق العنصر الذى ترتيبه $(1,1)$ فـى مصـفوفة التغاير V_n كما سبق تعريفه فى (4. 6. 7) و $c(P_n^{11})$ هو مرافق العنصر الموجـود فى الصف الأول والعمود الأول أى الذى ترتيبه $(1,1)$ من مصفوفة معاملات الارتـباط P_n المعطـاة بالعلاقة (3. 11. 22). و $c(V_n^{1k})$ و $c(P_n^{1k})$ هما مرافقى العنصر الموجود فى الصف الأول والعمود k أى مرافق العنصر الذى ترتيبه $(1,k)$ فى كل من المصـفوفتين V_n و P_n علـى الترتيـب، أما v^{ik} هو العنصر الذى ترتيبه (i,k) فى مقلـوب المصـفوفة V_n و $\sigma_k = \sqrt{v_{kk}}$ و $\sigma_1 = \sqrt{v_{11}}$. أنظـر تمريـن (4 ــ 5). وباستخدام الدليل i بدلاً من 1 يمكن إثبات أن:

$$(4.\ 6.\ 10):\quad \beta_{ik\cdot q(ik)} = \begin{cases} (a) & -\,c(V_n^{ik})/c(V_n^{ii}) \quad \text{أو} \\ (b) & -\quad v^{ik}/v^{ii} \quad \text{أو} \\ (c) & -\,\sigma_i c(P_n^{ik})/\sigma_k c(P_n^{ii}) \end{cases}$$

حيــث $\beta_{ik \cdot q(ik)}$ هــو معامل الانحدار الجزئى فى مستوى الانحدار للمتغير التابع X_i علـــى المتغـــير المستقل X_k $(k \neq i)$ عند ثبات باقى المتغيرات المستقلة. ويمكن الاستغناء عن العلاقة السابقة والاكتفاء بالعلاقة (9 .6 .4) وذلك بأن نعتبر أن المتغير التابع X_i هو دائماً المتغير الأول حيث أن ترتيب المتغيرات يعتبر فرضاً اختيارياً Arbitrary. وفـــى التوزيعات المشتركة لمتغيرات عددها n عندما يكون $|V_n| > 0$ (أى التوزيع غير شـــاذ Non – Singular) يكون كذلك $|V_n^{11}| > 0$ وبالتالى يوجد n من المستويات كل منها محـــدد تحديداً وحيداً وكل مستوى يمثل انحدار متغير معين بالنسبة لباقى المتغيرات. وفى الحالـــة الخاصـــة عـــندما تكون المتغيرات غير مرتبطة (أى تكون $v_{ik} = 0$ لجميع قيم $i \neq k$) ويكـــون $c(V_n^{ik}) = 0$ وبالـــتالى تكـــون كل معاملات الانحدار الجزئية مساوية للصفر طبقاً للعلاقة (10 .6 .4). أما إذا كان التوزيع المشترك للمتغير $(X_1, ..., X_n)$ من الـــنوع الشـــاذ Singular ــ حيـــث تكون رتبة V_n أقل من n ــ فى هذه الحالة قد يكون المحـــدد $|V_n^{11}| = 0$ وفـــى هذه الحالة تكون بعض معاملات الانحدار الجزئية غير محددة Undetermined أو غـــير محـــدودة Infinite. مثال ذلك عندما $n = 3$ إذا كانت رتبة V_3 تســـاوى 2 فإن $|V_3| = 0$ والاحتمال الكلى لتوزيع المتغير (X_1, X_2, X_3) يكون مدمجاً فى مستوى معين Certain plane فإذا كان هذا المستوى غير موازٍ لأحد محاور المتغيرات الـــثلاثة تكـــون مستويات الانحدار الثلاثة متطابقة مع هذا المستوى وعلى هذا تكون كل معاملات الانحدار الجزئية محدودة ومحددة تحديداً تاماً وحيداً. ولكن إذا كان هذا المستوى مـــوازٍ لأحـــد محاور المتغيرات الثلاثة ــ ليكن موازٍ لمحور X_1 مثلاً ــ فى هذه الحالة يكـــون الاحـــتمال الكلـــى (كتلة التوزيع) للتوزيع الهامشى للمتغير المشترك (X_2, X_3) مـــتركزة فـــى شـــكل خط مستقيم ــ وذلك لأن مصفوفة التغاير للتوزيع الهامشى للمتغير (X_2, X_3) هى V_3^{11} ــ (أى المصفوفة التى نحصل عليها من V_3 بحذف الصف الأول والعمود الأول) والمحدد $c(V_3^{11}) = |V_3^{11}| = 0$ مادام $|V_3| = 0$ طبقاً لنظرية (3 ــ 10 أ) ــ وحيـــث أن مســـتوى الانحـــدار مـــوازٍ لمحور X_1 لذلك يكون واحد على الأقل من معاملات الانحدار الجزئية $\beta_{12 \cdot 3}$ أو $\beta_{13 \cdot 2}$ غير محدود Infinite. أما إذا كانت رتبة V_3 تساوى 1 أو 0 فإن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير (X_1, X_2, X_3) يقع على خط مستقيم أو نقطـــة معينة وبالتالى فإن كل مستوى من مستويات الانحدار الثلاثة يجب أن يقع على هـــذا الخط أو هذه النقطة وخلاف ذلك يكون غير محدود. أما إذا اعتبرنا مجموعة جزئية عددهـــا $h(< n)$ مـــن المتغـــيرات $X_1, ..., X_n$ لتكن مثلاً $X_{i_1}, ..., X_{i_h}$ فإن التوزيع الهامشـــى للمتغيرات $(X_{i_1}, ..., X_{i_h})$ يكون له مصفوفة تغاير V_h^* يمكن الحصول عليها

مـــن المصـــفوفة V_n بعد حذف جميع الصفوف ماعدا الصفوف $i_1,...,i_h$ وحذف جميع الأعمـــدة ماعدا الأعمدة $i_1,...,i_h$. ويمكن تكوين مستوى الانحدار الخطى للمتغير X_{i_1} علـــى المتغيرات $X_{i_2},...,X_{i_h}$ وتحديد معاملات الانحدار الجزئية بصيغة مماثلة للصيغة (4. 6. 10) ولكـــن باســـتخدام المصفوفة V_h^* بدلاً من المصفوفة V_n. وعلى سبيل المثال عـــندما نـــأخذ فـــى الاعتـــبار المجموعة الجزئية المكونة من $h=(n-1)$ متغير هى $X_1,...,X_{J-1},X_J,...,X_n$ نجد أن:

$$(4.\ 6.\ 11):\ \beta_{ik\cdot q(ikJ)} = -\frac{c\left(V_n^{JJ\cdot ik}\right)}{c\left(V_n^{JJ\ ii}\right)}$$

حيـــث $q(i\,k\,J)$ هى الأعداد $1,2,...,n$ ما عدا i,k,J و $c\left(V^{JJ\cdot ik}\right)$ هو مرافق العنصـــر الموجـــود فى الصف i والعمود k من المصفوفة V_{n-1}^{JJ} التى نحصل عليها من مصـــفوفة الـــتغاير V_n بعد حذف الصف رقم J والعمود رقم J. ومستوى الانحدار فى العلاقة(2 .6 .4) الذى نحصل عليه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى الذى نعبر عنه بالعلاقة (4. 6. 3) هـــو أفضـــل مســـتوى يمكن توفيقه لسطح الانحدار $X_1 = m_1\left(X_2,...,X_n\right)$ المعطـــى بالعلاقـــة (4. 6. 1b) وذلـــك لجمـــيع الـــتوزيعات التى يكون سطح الانحدار (4. 6. 1a) موجـــود بالنســـبة لها، أى عندما يكون التوقع $E\left(X_1 \mid x_2,...,x_n\right)$ موجود. وذلك لأن:

$$E\left[X_1 - \sum_{J=2}^{n}\beta_{1J\cdot q}\,X_J\right]^2 = E\left[X_1 - m_1\left(x_2,...,x_n\right)\right]^2 + E\left[m_1\left(x_2,...,x_n\right) - \sum_{J=2}^{n}\beta_{1J\cdot q}\,X_J\right]^2$$

الحـــد الأول مـــن الطـــرف الأيمن لا يعتمد على β إذن الحد الثانى من الطرف الأيمـــن يكون فى نهايته الصغرى عند نفس قيم β التى تجعل الحد الموجود فى الطرف الأيســـر فـــى نهايته الصغرى وهى قيم β المعطاة بالعلاقة (4. 6. 9) أو (4. 6. 10) وبهذا يكـــون المســـتوى (4. 6. 2) هو أفضل مستوى يمكن توفيقه للسطح (4. 6. 1b) طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. وعلى ذلك إذا كان من المعروف أن سطح الانحدار يمثل مستوى فإن هذا المستوى يكون هو مستوى الانحدار الذى نحصل عليه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. وســـطح الانحـــدار مـــن الدرجـــة الأولى ــ فى حالة $2 < n$ ــ يتميز بخاصية مشابهة للخاصية (4. 1. 3) حيث:

$$(4.\ 6.\ 11a):\ E\left\{\left[X_1 - m_1\left(x_2,...,x_n\right)\right]^2\right\} = \min.$$

أى أن متوســط مربعات انحرافات X_1 عن أى دالة $u(x_2,...,x_n)$ تكون نهاية صغرى عندما:

$$u(x_2,...,x_n) = m_1(x_2,...,x_n)$$

وذلك باحتمال واحد صحيح.

(4 ـ 6 ـ 3) البواقى Residuals:

عــندما تكون معاملات الانحدار الجزئية β's المعطاة بالعلاقة (4. 6. 9) محدودة فيمكن تعريف الفرق:

$$(4.\ 6.\ 12):\ Y_{1.23...n} = Y_{1.q(1)} = X_1 - \sum_{J=2}^{n} \beta_{1J.q(1J)} X_J$$

بأنه ذلك الجزء الذى يتبقى من المتغير X_1 بعد أن نطرح منه أفضل تقدير خطى للمتغير X_1 بدلالة $X_2,...,X_n$ طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. والفرق السابق $Y_{1.2...n}$ يســمى بـــ "الباقى" "Residual" أو "الخطأ" "Error" أو "انحراف المتغير X_1 عن أفضل تقديــر له من باقى المتغيرات طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى" كما يمكن تسميته بانحراف X_1 عن مستوى انحدار X_1 على باقى المتغيرات.

وبالتعويض فى (4. 6. 12) عن $\beta_{1k.q(1k)}$ من العلاقة (4. 6. 9) نحصل على:

$$(4.\ 6.\ 13):\ Y_{1.23...n} = Y_{1.q(1)} = X_1 + \frac{1}{c(V_n^{11})}\sum_{J=2}^{n} c(V_n^{1J}) X_J$$

$$= \frac{1}{c(V_n^{11})}\sum_{J=1}^{n} c(V_n^{1J}) X_J$$

وحيث أن $E(X_J) = 0$ لأن X_J's متغيرات مقيسة من مركزها ــ إذن:

$$(4.\ 6.\ 14):\ E(Y_{1.23...n}) = 0$$

ومن (4. 6. 13) نجد أن:

$$E(Y_{1.23...n} X_k) = E(Y_{1.q(1)} X_k) = E\left[\frac{1}{c(V_n^{11})}\sum_{J=1}^{n} c(V_n^{1J}) X_J X_k\right]$$

$$= \frac{1}{c(V_n^{11})}\sum_{J=1}^{n} v_{Jk}\, c(V_n^{1J})$$

أى أن:

$$(4.6.15):\ E\left(Y_{1.23...n}X_k\right)=|V_n|/c\left(V_n^{11}\right)\ :\ k=1 \quad \text{عندما}$$
$$=0\ :\ k=2,3,...,n \quad \text{عندما}$$

أى أن الانحــراف أو الــباقى $Y_{1.2...n}$ غير مرتبط بأى من المتغيرات العشوائية $X_2,...,X_n$. كما أن من (4. 6. 13) و(4. 6. 14) نجد أن:

$$V\left(Y_{1.q(1)}\right)=E\left(Y_{1\,q(1)}^2\right)=E\left(Y_{1.q(1)}X_1+\frac{1}{c\left(V_n^{11}\right)}\sum_{J=2}^{n}c\left(V_n^{1J}\right)Y_{1.q(1)}X_J\right)$$

وبما أن $E\left(Y_{1.q(1)}X_J\right)=0$ عندما $J\neq 1$ كما يتضح من (4. 6. 15) إذن:

$$(4.6.16):\ \sigma_{1.23...n}^2=V\left(Y_{1.23..n}\right)=E\left(Y_{1.23..n}^2\right)=E\left(Y_{1.23...n}X_1\right)$$
$$=|V_n|/c\left(V_n^{11}\right)=1/v^{11}=\sigma_1^2\,|P_n|/c\left(P_n^{11}\right)$$

حيث V_n هى مصفوفة التغاير للمتغيرات $X_1,...,X_n$ المعطاة بالعلاقة (3. 11. 7) و P_n هـــى مصفوفة معاملات الارتباط لنفس المتغيرات المعطاة بالعلاقة (3. 11. 22) و v^{11} هو العنصر الموجود فى الصف الأول والعمود الأول من مقلوب المصفوفة V_n .

والتبايـــن السابق $\sigma_{1.23.\,n}^2$ يسمى بـــ "تباين الباقى" Residual Variance ونقول أن $\sigma_{1.23..n}^2$ تبايـــن مـــن الدرجة $(n-1)$ حيث $(n-1)$ هى عدد أرقام الدليل الثانوى فى $\sigma_{1.23...n}^2$. وبأســـلوب ممـــاثل يمكن استخدام العلاقة (4. 6. 10) لإثبات أن الانحراف (أو الــباقى) $Y_{i.q(i)}$ غـــير مرتبط بأى من المتغيرات العشوائية X_k لجميع قيم $k\neq i$ وأن تباين هذا الباقى هو:

$$(4.6.17):\ \sigma_{i.23\ (i-1)(i+1)...n}^2=\sigma_{i.q(i)}^2=V\left(Y_{i.q(i)}\right)=|V_n|/c\left(V_n^{ii}\right)=1/v^{ii}$$
$$=\sigma_i^2|P_n|/c\left(P_n^{ii}\right)$$

حيث v^{ii} هى العنصر الموجود فى الصف i والعمود i من مقلوب المصفوفة V_n و P_n هى مصفوفة معاملات الارتباط.

وتبايــن الــباقى $\sigma^2_{1.23...n}$ يمكــن اعتباره مقياس لدرجة جودة التوفيق عند توفيق مســتوى (أو معادلة خطية) للمتغير X_1 بدلالة $X_2,...,X_n$ حيث أن $\sigma^2_{1.2...n}$ يعبر عن متوسط مربعات انحرافات قيم X_1 الفعلية عن المستوى $X_1 = \sum_{J=2}^{n} \beta_{1J.q(1J)} X_J$ وبالتالى فهــو يعتبر مقياس لدرجة دقة تقدير X_1 من باقى المتغيرات، فكلما كانت $\sigma^2_{1.2...n}$ كبيرة كلمـــا دل ذلك على عدم دقة التقدير لذلك نسمى الجذر الموجب $\sigma_{1.2...n}$ بـــ "خطأ التقدير" Error of Estimate وعــندما $n = 2$ نجـــد أن العلاقـــة (4. 6. 16) تخــتــزل إلى: $\sigma^2_{1.2} = \sigma^2_1\left(1-\rho^2\right)$.

من علاقة (4. 6. 4a) يتضح أن:

$$(4.6.18):\ E\left(X_i\ Y_{1.23...n}\right) = 0$$

إذا كانت i هى أحد أرقام الدليل الثانوى لـــ Y أى أحد الأرقام $2,3,...,n$.

ومن العلاقتين (4. 6. 12) و(4. 6. 13) نجد أن:

$$(4.6.19a):\ E\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...n}\right) = E\left(Y_{1.34..n}\ X_2\right)$$

وبالمثل:

$$(4.6.19b):\ E\left(Y_{1.34..n}\ Y_{2.34...n}\right) = E\left(Y_{2.34...n}\ X_1\right)$$

كذلك يمكن إثبات أن:

$$(4.6.20a):\ E\left(Y_{1.34..n}\ Y_{2.34...n}\right) = E\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...(n-1)}\right) = E\left(Y_{1.34..n}\ X_2\right)$$

وبالمثل:

$$(4.6.20b):\ E\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...n}\right) = E\left(Y_{2.34...n}\ Y_{1.34...(n-1)}\right) = E\left(Y_{2.34...n}\ X_1\right).$$

ومن العلاقات (4. 6. 18) حتى (4. 6. 20b) نجد بصفة عامة أن:

$$\begin{aligned}(4.6.21):\ E\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...n}\right) &= E\left(Y_{1.34...(n-i)}\ Y_{2.34..n}\right)\ ;\quad i = 1,2,...,(n-3)\\ &= E\left(X_1\ Y_{2.34...n}\right)\\ &= E\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...(n-i)}\right);\ i = 1,2,...,(n-3)\\ &= E\left(Y_{1.34...n}\ X_2\right).\end{aligned}$$

ملاحظة (4 ـ 6 ـ 3): من العلاقات (4. 6. 18) حتى (4. 6. 21) يتضح أن:

(1) أى انحــراف (أو بـــاقى) $Y_{i.q(i)}$ يكون غير مرتبط بأى متغير X_J إذا كانت J أحد أرقام $q(i)$ أى إذا كانت $J \in q(i)$ كما يتضح من (4. 6. 18).

(2) فـــى الانحرافين $Y_{i.q(i)}$ و$Y_{J.q(J)}$ إذا كانت كل أرقام الدليل الثانوى لأحد الانحرافين تمثل مجموعة جزئية من الدليل الثانوى للانحراف الثانى فإن:

(2 ـ أ) $E\left(Y_{i.q(i)} Y_{J.q(J)}\right)$ لا يتغير إذا أهملنا رقم أو أكثر أو حتى كل عناصر الدليل الـــثانوى الـــذى تمثله المجموعة الجزئية الصغيرة، فإذا كانت $q(i) \subset q(J)$ فإن:

$$E\left(Y_{i.q(i)} Y_{J.q(J)}\right) = E\left(Y_{i.q'(i)} Y_{J.q(J)}\right) = E\left(X_i Y_{J.q(J)}\right)$$

حيث $q'(i) \subset q(i)$. كما يتضح من (4. 6. 21).

(2 ـ ب) $E\left(Y_{i.q(i)} Y_{J.q(J)}\right)$ لا يتغـــير إذا أضفنا عنصراً أو أكثر أو حتى كل العناصر الـــزائدة فـــى الدليل الثانوى الذى تمثله المجموعة الكبيرة إلى عناصر الدليل الـــثانوى الذى تمثله المجموعة الجزئية الصغيرة فإذا كانت $q(i) \subset q(J)$ فإن:

$$E\left(Y_{i.q(i)} Y_{J.q(J)}\right) = E\left(Y_{i.q''(i)} Y_{J.q(J)}\right) = E\left(Y_{i.q(J)} Y_{J.q(J)}\right)$$

حيث: $q(i) \subset q''(i) \subset q(J)$ كما يتضح من (4. 6. 21).

(3) كما أن الانحرافين $Y_{J.q(J)}$ و $Y_{i.q(i)}$ يكونا غير مرتبطان أى:

$$(4.\ 6.\ 22):\ E\left(Y_{i.q(i)} Y_{J.q(J)}\right) = 0$$

إذا كان:

$$\begin{cases} i \in q(J) \text{ و } q(i) \subset q(J) \\ \text{أو} \\ J \in q(i) \text{ و } q(J) \subset q(i) \end{cases}$$

حيث $q(i)$ و $q(J)$ مجموعتان من الأدلة الثانوية. أى أن الانحرافين يكونا غير مرتبطيـــن إذا كان الدليل الأساسى والدليل الثانوى لأحدهما يقع ضمن الدليل الثانوى للانحراف الآخر.

(4 ـ 7) الارتباط الجزئى Partial Correlation:

فـــى حالة التوزيعات الثنائية (X_1, X_2) نعرف أن العلاقة بين المتغيرين X_1 و X_2 تقاس بمعامل الارتباط ρ_{12}. ونعرف كذلك فى حالة التوزيعات المتعددة المتغيرات، عـــندما يكـــون عدد المتغيرات أكثر من اثنين، أن العلاقة بين أى متغيرين تكون متأثرة بالعلاقة بين كلٍ من هذين المتغيرين وباقى المتغيرات. فالعلاقة بين المتغيرين X_1 و X_2 تكـــون فـــى جزء منها راجعة إلى تأثير كل منهما على الأخر وفى جزء آخر تكون هذه العلاقة راجعة إلى تأثير باقى المتغيرات على كلٍ من X_1 و X_2. وهى تختلف إلى حد ما عـــن العلاقة فى حالة التوزيعات ذات المتغيرين، لذلك نميز بينهما فى التسمية وكذلك فى الـــرموز المســـتخدمة، ففـــى حالة التوزيعات ذات المتغيرين (X_1, X_2) يسمى معامل الارتـــباط بيـــن X_1 و X_2 بـــ "معامل الارتباط الكلى" "Total Correlation Coefficient" أو معـــامل الارتباط من الدرجة صفر (0) ونرمز له بالرمز ρ_{12}. وفى حالة التوزيعات ذات الـــ n (>2) متغيراً X_1، ...، X_n يسمى معامل الارتباط بين المتغيرين X_i و X_J ـ بافتراض استبعاد تأثير باقى المتغيرات ـ بـــ "معامل الارتباط الجزئى" " Partial Correlation Coefficient" بين X_i و X_J ونرمز له بالرمز $\rho_{iJ\,q(iJ)}$ حيث $q(iJ)$ تمثل مجموعـــة الأعداد من 1 إلى n مع استبعاد العددين i، J، ونقول أنه معامل ارتباط جزئى من الدرجة $(n-2)$ حيث $(n-2)$ هى عدد أرقام الدليل الثانوى $q(iJ)$. ونعلم كذلك من العلاقة (4. 6. 12) أن الباقى (أو الانحراف) $Y_{i.34..n}$ $(i=1,2)$ يمثل ذلك الجزء من المتغـــير X_i الـــذى يتبقى بعد أن نطرح منه أفضل تقدير طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى للمتغـــير X_i بدلالة المتغيرات $X_3, X_4, ..., X_n$. إذن يمكن اعتبار أن معامل الارتباط (الكلـــى) بين الانحرافين $Y_{1.34...n}$ و $Y_{2.34...n}$ يمثل مقياس للارتباط بين X_1 و X_2 بعد اســـتبعاد تأثير باقى المتغيرات $X_3, ..., X_n$ على كلٍ من X_1 و X_2 وهذا ما نسميه كما ذكـــرنا بـــ "معامل الارتباط الجزئى" للمتغيرين X_1 و X_2 بالنسبة لـــ $X_3, X_4, ..., X_n$ والذى نرمز له بالرمز $\rho_{12.34...n}$ أو باختصار $\rho_{12\,q(12)}$ حيث أن الدليل الثانوى $q(12)$ يمـــثل أدلـــة كل المتغيرات ماعدا الدليلين 1, 2 أى أن $q(12)=34...n$. ومن تعريف معـــامل الارتـــباط نجد من الطبيعى أن الترتيب فى كل من الدليل الأساسى (1, 2) وكذلك الدلـــيل الـــثانوى $q(12)$ غـــير مهـــم أى أن $\rho_{12.q(12)} = \rho_{21.q(21)}$ وذلك على خلاف $\beta_{12.q(12)}$ حيث يكون الترتيب مهم فى الدليل الأساسى ولكنه غير مهم فى الدليل الثانوى. وعلى ذلك نجد من تعريف معامل الارتباط بالعلاقة (3. 8. 18) أن:

$$(4.7.1):\ \rho_{12\,34\ldots n} = \rho_{12.q(12)} = \frac{E\left(Y_{1\,q(12)}\,Y_{2\,q(12)}\right)}{\sqrt{E\left(Y^2_{1\,q(12)}\right)\cdot E\left(Y^2_{2.q(12)}\right)}}$$

$$= \frac{Cov\left(Y_{1.q(12)}, Y_{2\,q(12)}\right)}{\sigma_{1\,q(12)}\cdot\sigma_{2.q(12)}}$$

$$= E\left(Y_{1\,q(12)}\cdot Y_{2.q(12)}\right)/\sigma_{1.q(12)}\cdot\sigma_{2.q(12)}$$

وهـــذا معامل ارتباط عادى بين متغيرين عشوائيين هما $Y_{1.q(12)}$ و $Y_{2\,q(12)}$ ، إذن فهو يحقق العلاقة:

$$(4.7.2):\ -1 \le \rho_{12.q(12)} \le 1$$

ويمكـــن كـــتابة الانحرافيـــن (الـــبواقى) $Y_{1\,q(12)}$ و $Y_{2\,q(12)}$ فى صيغة مشابهة للعلاقـــــة (4. 6. 13) ثـــم نســـتخدم العلاقـــة (4. 6. 11) لمعاملات الانحدار فى مجموعة (جزئية) مكونـــة من $(n-1)$ متغير عشوائى لنحصل على العلاقتين التاليتين المشابهتين للعلاقة (4. 6. 16):

$$(4.7.3):\ E\left(Y^2_{1.34..n}\right) = E\left(Y_{1.34\ldots n}\,X_1\right) = \sigma^2_{1\,34..n}$$

وتسمى بتباين الباقى $Y_{1\,34..n}$

$$= \frac{c\left(V_n^{22}\right)}{c\left(V_n^{22\,11}\right)} = \frac{v^{22}}{v^{11}\,v^{22} - \left(v^{12}\right)^2}$$

حيـــث $c\left(V_n^{22}\right)$ هـــو مرافق العنصر v_{22} فى المصفوفة V_n و $c\left(V_n^{22\,11}\right)$ هو مـــرافق العنصـــر الموجـــود فى الصف الأول والعمود الأول من المصفوفة V_n^{22} التى نحصـــل علـــيها مـــن المصفوفة V_n بعد حذف الصف الثانى والعمود الثانى و v^{ik} هو العنصر الموجود فى الصف i والعمود k من مقلوب المصفوفة V_n . وعلى القارئ إثبات العلاقة (4. 7. 3) السابقة ـــ أنظر تمرين رقم (4 – 6).

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(4.7.4):\ E\left(Y^2_{2.34..n}\right) = E\left(Y_{2.34\ldots n}\,X_2\right) = c\left(V_n^{11}\right)/c\left(V_n^{11.22}\right)$$

$$= v^{11}/\left[v^{11}\,v^{22} - \left(v^{12}\right)^2\right]$$

ومن العلاقة (4. 6. 20b) نجد أن:

$$(4.\,7.\,5):\ E\left(Y_{1.34.\,n}\ Y_{2.34\,.n}\right)=E\left(X_1\ Y_{2.34..n}\right)$$

حيث يمكن إثبات أنها:

$$=\sum_{J=2}^{n}c\left(V_n^{11.2J}\right)\cdot v_{1J}/c\left(V_n^{11.22}\right)=-c\left(V_n^{12}\right)/c\left(V_n^{11.22}\right)$$

حيث $c\left(V_n^{12}\right)$ هو مرافق العنصر v_{12} فى المصفوفة V_n و $c\left(V^{11.22}\right)$ هو مرافق العنصر الموجود فى الصف الثانى والعمود الثانى من المصفوفة V_n^{11} التى نحصل عليها من المصفوفة V_n بعد حذف الصف الأول والعمود الأول.

والعلاقة السابقة (4. 7. 5) يمكن إثباتها كما يلى:

من العلاقة (4. 6. 12) نجد أن:

$$E\left(X_1\ Y_{2.34..n}\right)=v_{12}-\sum_{J=3}^{n}\beta_{2J\ q(12J)}\ v_{1J}$$

ومن العلاقة (4. 6. 11):

$$=v_{12}+\sum_{J=3}^{n}c\left(V_n^{11.2J}\right)v_{1J}/c\left(V_n^{11\ 22}\right)$$

$$=\sum_{J=2}^{n}c\left(V_n^{11.2J}\right)v_{1J}/c\left(V_n^{11.22}\right)$$

حيث $c\left(V_n^{11.2J}\right)$ هو مرافق العنصر الموجود فى الصف الثانى والعمود رقم J فى المصفوفة V_n^{11} التى نحصل عليها من V_n بعد حذف الصف الأول والعمود الأول. ولكن يمكن إثبات أن:

$$\sum_{J=2}^{n}c\left(V^{11.2J}\right)v_{1J}=\left|V_n^{12}\right|=-c\left(V_n^{12}\right)\cdot$$

وهذا يوصلنا إلى صحة العلاقة (4. 7. 5). وبالتعويض عن العلاقات (4. 7. 3, 4, 5) فى العلاقة (4. 7. 1) نجد أن:

معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين X_1 و X_2 مع استبعاد تأثير $X_3, X_4, ..., X_n$ هو:

ومن العلاقة (3. 11. 24):

$$(4.7.6a):\ \rho_{2.34\ldots n} = \begin{cases} -c\left(V_n^{12}\right)\Big/\sqrt{c\left(V_n^{11}\right)c\left(V_n^{22}\right)} \\ -v^{12}\Big/\sqrt{v^{11}\,v^{22}} \\ \\ -c\left(P_n^{12}\right)\Big/\sqrt{c\left(P_n^{11}\right)c\left(P_n^{22}\right)} \end{cases}$$

حيــث $c\left(P_n^{ij}\right)$ هــو مرافق العنصر ρ_{ij} فى مصفوفة معاملات الارتباط P_n ــ أنظر تمرين (4 ــ 7).

وبالمــثل وبأســلوب مماثل يمكن الحصول على معامل الارتباط الجزئى بين أى متغيرين X_i و X_k مع استبعاد أثر باقى المتغيرات (التى عددها $(n-2)$) فى الصورة التالية:

$$(4.7.6b):\ \rho_{ik\ q(ik)} = \begin{cases} -c\left(V_n^{ik}\right)\Big/\sqrt{c\left(V_n^{ii}\right)c\left(V_n^{kk}\right)} & \text{أو} \\ -v^{ik}\Big/\sqrt{v^{ii}\,v^{kk}} & \text{أو} \\ -c\left(P_n^{ik}\right)\Big/\sqrt{c\left(P_n^{ii}\right)c\left(P_n^{kk}\right)} \end{cases}$$

حيث $c\left(V_n^{ik}\right)$ و $c\left(P_n^{ik}\right)$ هما مرافقى العنصر الموجود فى الصف i والعمود k من المصفوفتان V_n و P_n على الترتيب وباقى الرموز كما سبق تعريفها.

والعلاقــة (4. 7. 6b) تعطى قيمة معامل الارتباط الجزئى بدلالة العزوم المركزية v_{ik} ــ حيــث أنــنا افترضــنا من البداية أن المتغيرات مقيسة من مركزها ــ أو بدلالة معــاملات الارتــباط الكلــية ρ_{ik}. فمثلاً فى حالة $n = 3$ نجد من (4. 7. 6a) أن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين X_1 و X_2 مع استبعاد أثر X_3 هو:

$$(4.7.7):\ \rho_{12.3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\cdot\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{13}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}.$$

وذلك لأن:

$$-C\left(V_3^{12}\right) = \begin{vmatrix} v_{21} & v_{23} \\ v_{31} & v_{33} \end{vmatrix} = \left(v_{21}\,v_{33} - v_{31}\,v_{23}\right)$$

ومن (3. 11. 5):

$$= \rho_{21}\,\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_3^2 - \rho_{31}\,\sigma_3\,\sigma_1\,\rho_{23}\,\sigma_2\,\sigma_3$$
$$= \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3^2\left(\rho_{12} - \rho_{13}\,\rho_{23}\right)$$

وبالمثل

$$C\left(V_3^{11}\right) = \sigma_2^2\,\sigma_3^2\left(1 - \rho_{23}^2\right)$$
$$C\left(V_3^{22}\right) = \sigma_1^2\,\sigma_3^2\left(1 - \rho_{13}^2\right)$$

وبالتعويض فى (4. 7. 6b) نحصل على (4. 7. 7). وفى الحالة الخاصة عندما تكون المتغــيرات $X_1,...,X_n$ غــير مرتبطة نجد من (4. 7. 6a, b) أن كل معاملات الارتباط الجزئــية تســاوى الصــفر مثلها مثل معاملات الارتباط الكلية وذلك لأن $c\left(V_n^{ik}\right) = 0$ لجميــع قيم $i \neq k$، حيث أن المصفوفة V_n مصفوفة قطرية. أما فى حالة وجود ارتباط بيـــن المتغــيرات $X_1,...,X_n$ فإن $\rho_{ik\,q(ik)}$ بصفة عامة يختلف عن معامل الارتباط الكلى ρ_{ik}. فمثلاً فى حالة ثلاث متغيرات يتضح من (4. 7. 7) أن ρ_{12} و $\rho_{12.3}$ يمكن أن يكونـــا مختلفى الإشارة كما يمكن أن يكون أحدهما يساوى الصفر بينما يختلف الثانى عن الصفر وعلى ذلك إذا كانت كل معاملات الارتباط الكلية معروفة فيمكن من العلاقة (4. 7. 6b) حساب معاملات الارتباط الجزئية مباشرة.

مـــثال (4 ــ 7 ــ 1): المتغير العشوائى المشترك $\left(X_1, X_2, X_3\right)$ له توزيع معتاد ثلاثى دالة كثافة احتماله:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (2\pi)^{-3/2}\ \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_1\,x_3\right)\right]$$

والمطلوب إيجاد:

(أ) مستوى الانحدار من النوع الثانى لــ X_1 على X_2 و X_3.

(ب) تباين الباقى $Y_{1\,23}$ أى التباين $\sigma_{1\,23}^2$.

(جـ) معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع استبعاد أثر X_3 أى $\rho_{12.3}$.

(الحل)

الدالة $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ يمكن وضعها فى صيغة مشابهة للعلاقة الخاصة بدالة كثافة احتمال التوزيع المعتاد المتعدد (فى الباب التاسع) علاقة (9. 2. 18) على الشكل التالى:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (2\pi)^{-3/2} \cdot \exp\left[-\tfrac{1}{2}\,\underline{x}'\,V_3^{-1}\,\underline{x}\right].$$

حيث:

$$V_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{11} & v^{12} & v^{13} \\ v^{21} & v^{22} & v^{23} \\ v^{31} & v^{32} & v^{33} \end{bmatrix}$$

و V_3^{-1} هـــى مقلوب مصفوفة التغاير V_3 للمتغيرات X_1, X_2, X_3 وتوقعات هذه المتغيرات أصفار.

(أ) مستوى الانحدار من النوع الثانى لـــ X_1 على X_2 و X_3 هو:

$$X_1 = \beta_{12.3}\, X_2 + \beta_{13.2}\, X_3$$

حيث يمكن الحصول على β's من العلاقة (4. 6. 10) كما يلى:

$$\beta_{12.3} = -\, v^{12}/v^{11} = -\tfrac{1}{2}/\tfrac{2}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\beta_{13.2} = -\, v^{13}/v^{11} = -\tfrac{1}{2}/\tfrac{2}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

إذن معادلة مستوى انحدار X_1 على X_2 و X_3 هى:

$$X_1 = -\tfrac{1}{2} X_2 - \tfrac{1}{2} X_3$$

(ب) تباين الباقى $\sigma^2_{1.23}$ يمكن الحصول عليه من علاقة (4. 6. 16): $\sigma^2_{1.23} = 1 \div v^{11} = 1$
وسنرى من المصفوفة V_3 أن تباين X_1 يساوى $\frac{3}{2}$ أى أن تباين الباقى من X_1 بعد اســتبعاد أثــر X_3 و X_2 أقل من تباين X_1. وسنرى ذلك بصورة عامة من خلال علاقة (4. 9. 5) فيما بعد.

(جـ) معامل الارتباط الجزئى $\rho_{12.3}$ يمكن الحصول عليه باستخدام (4. 7. 6a):

$$\rho_{12.3} = -\, v^{12}\Big/\sqrt{v^{11}\, v^{22}} = -\tfrac{1}{2}\Big/\sqrt{1\times 1} = -\tfrac{1}{2}$$

وللـــتأكد من صحة النتائج السابقة يمكن الحصول على نفس المطلوبات باستخدام مصفوفة التغاير V_3 بدلاً من V_3^{-1} وذلك باستخدام الصيغ البديلة فى العلاقات (4. 6. 10) و(4. 6. 16) و(4. 7. 6a) كما يلى:

مصفوفة التغاير V_3 هى مقلوب المصفوفة V_3^{-1} إذن:

$$V_3 = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \; ; \; |V_3| = 2$$

(أ) من علاقة (4. 6. 10) نجد أن:

$$\beta_{12.3} = -c(V_3^{12})/c(V_3^{11}) = -(-1)^3(-1)/(\tfrac{8}{4}) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\beta_{13.2} = -c(V_3^{13})/c(V_3^{11}) = -(-1)^4(1)/(\tfrac{8}{4}) = -\tfrac{1}{2}$$

(ب) من العلاقة (4. 6. 16) نجد أن:

$$\sigma_{1.23}^2 = |V_3|/c(V_3^{11}) = 2/(\tfrac{8}{4}) = 1$$

(جـ) من العلاقة (4. 7. 6a) نجد أن:

$$\rho_{12.3} = -c(V_3^{12})\Big/\sqrt{c(V_3^{11}) \times c(V_3^{22})} = (-1)/\sqrt{2 \times 2} = -\tfrac{1}{2}$$

وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها باستخدام صيغ بديلة مما يعتبر بمثابة مراجعة على صحة النتائج أو مطابقة حسابية للتأكد من صحة النتائج. كذلك يمكن التأكد من صحة قيمة $\rho_{12.3}$ باستخدام العلاقة (4. 7. 7) كما يلى:

بما أن

$$v_{11} = v_{22} = v_{33} = \tfrac{3}{2}$$

وكما نعرف

$$\begin{aligned} v_{iJ} &= \rho_{iJ}\,\sigma_i\,\sigma_J \\ &= \rho_{iJ}\sqrt{v_{ii}\,v_{JJ}} \; ; \; i \neq J \\ &= \sigma_i^2 = \tfrac{3}{2} \; ; \; (\rho_{ii} = 1) \; ; \; i = J \end{aligned}$$

إذن:

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -\tfrac{1}{3}$$

إذن من العلاقة (4.7.7):

$$\rho_{12.3}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\cdot\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{13}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)}}=-\frac{1}{2}$$

وهــي نفــس النتيجة السابقة التى حصلنا عليها باستخدام صيغة أخرى. كما يمكن الــتأكد مــن صــحة النتائج السابقة بالحصول على نفس النتائج بطريقة أخرى باستخدام مصفوفة معاملات الارتباط P_3 للمتغيرات الثلاثة X_1, X_2, X_3 حيث نجد أن:

$$P_3=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\ ;\ \left|P_3\right|=\frac{16}{27}$$

إذن:

(أ) من علاقة (4.6.10) نجد أن:

$$\beta_{12.3}=-\sigma_1 c\left(P_3^{12}\right)/\sigma_2 c\left(P_3^{11}\right)=-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\left(\tfrac{4}{9}\right)/\sqrt{\tfrac{3}{2}}\left(\tfrac{8}{9}\right)=-\tfrac{1}{2}$$

$$\beta_{13.2}=-\sigma_1 c\left(P_3^{13}\right)/\sigma_3 c\left(P_3^{11}\right)=-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\left(\tfrac{4}{9}\right)/\sqrt{\tfrac{3}{2}}\left(\tfrac{8}{9}\right)=-\tfrac{1}{2}$$

(ب) ومن علاقة (4.6.16):

$$\sigma_{1.23}^2=\sigma_1^2\left|P_3\right|/c\left(P_3^{11}\right)=\tfrac{3}{2}\times\tfrac{16}{27}\div\tfrac{8}{9}=1$$

(جـ) ومن علاقة (4.7.6a):

$$\rho_{12.3}=-c\left(P_3^{12}\right)/\sqrt{c\left(P_3^{11}\right)\cdot c\left(P_3^{22}\right)}=-\tfrac{4}{9}\div\sqrt{\tfrac{8}{9}\times\tfrac{8}{9}}=-\tfrac{1}{2}.$$

ويمكــن للقارئ الآن إيجاد مستوى انحدار X_2 على X_1 و X_3 ومستوى انحدار X_3 على X_1 و X_2 وكذلك معاملات الارتباط الجزئية $\rho_{13.2}$ و $\rho_{23.1}$. كما يمكن إيجاد $E\left(X_1 \mid x_2, x_3\right)$ أى سطح الانحدار من النوع الأول لـــ X_1 على X_2 و X_3 باستخدام دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ والعلاقة (3.12.2) حيث نجد أن:

$$E\left(X_1 \mid x_2, x_3\right)=-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_3$$

أى هو نفسه مستوى الانحدار من النوع الثانى وهذه الخاصية يتميز بها كل توزيع معتاد متعدد كما سنرى فى الباب التاسع.

(4 ـ 8) العلاقة بين معاملات، الارتباط والانحدار، الجزئية:

يمكـــن إثبات أن معاملات، الارتباط والانحدار، الجزئية مشابهة تماماً للعلاقة بين معاملات، الارتباط والانحدار، الكلية. إذ نعلم من العلاقة (4. 6. 22) أن أى انحرافين يكونا غير مرتبطين إذا وقع الدليلين الأساسى والثانوى لأحدهما ضمن الدليل الثانوى للانحراف الآخر، إذن:

$$O = E\left(Y_{2.34\,.\,n}\ \ Y_{1.234\ldots n}\right)$$

حيث Y كما فى (4. 6. 12)

$$= E\left(Y_{2.34.\,.n}\left[X_1 - \beta_{12.34\ldots n}X_2 - \sum_{J=3}^{n}\beta_{1J.q(1J)}\,X_J\right]\right)$$

وطبقاً للعلاقة (4. 6. 18)

$$= E\left(Y_{2.34\ldots n}\ X_1\right) - \beta_{12.34\ldots n}\,E\left(Y_{2\,34\,.\,n}\ X_2\right)$$

ومن علاقة (4. 6. 21) يمكن كتابة العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$O = E\left(Y_{1.34\,.\,n}\ Y_{2.34\ldots n}\right) - \beta_{12.34\ldots n}\,E\left(Y^2_{2.34\,..n}\right)$$

إذن:

$$(4.\,8.\,1a):\ \beta_{12.34..\,n} = \frac{E\left(Y_{1.34..\,n}\ \ Y_{2.34\ldots n}\right)}{E\left(Y^2_{2.34\ldots n}\right)} = \frac{Cov\left(Y_{1.34..\,n}\,,\,Y_{2.34..\,n}\right)}{V\left(Y_{2.34\ldots n}\right)}$$

$$= \frac{E\left(Y_{1\,34\,.\,n}\ Y_{2.34\ldots n}\right)}{\sigma^2_{2.34\,..n}}$$

وقـــيمة β المعطـــاة بالعلاقـــة السابقة هى نفس قيمة معامل الانحدار الكلى التى نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى عندما تكون معادلة الانحدار هى:

$$Y_{1.34\,..n} = b_{12}\ Y_{2.34\,..n}$$

أى أن معامل الانحدار الجزئى $\beta_{12.34..\,n}$ لـــ X_1 على X_2 مع فرض ثبات باقى المتغـــيرات هـــو نفســـه معامل الانحدار الكلى b_{12} للانحراف $Y_{1.34\ldots n}$ على الانحراف $Y_{2.34\,.\,n}$. وبالمثل:

$$(4.8.1b):\ \beta_{21.34..n} = \frac{E\left(Y_{1.34..n}\ Y_{2.34..n}\right)}{V\left(Y_{1.34...n}\right)} = \frac{Cov\left(Y_{1.34...n}\ Y_{2.34...n}\right)}{V\left(Y_{1.34..n}\right)}$$

$$= \frac{E\left(Y_{1.34..n}\ Y_{2.34..n}\right)}{\sigma^2_{1.34..n}}$$

وكمـــا سبق أن أوضحنا في بند (4 ـ 7) أن معامل الارتباط الجزئى $\rho_{12.34..n}$ هو نفســـه معـــامل الارتباط الكلى بين الانحرافين $Y_{1.34..n}$ و $Y_{2.34..n}$ وبما أن $\sigma^2_{1.34..n}$ هو تبايــن الانحـــراف $Y_{1.34...n}$ و $\sigma^2_{2.34..n}$ هـــو تباين الانحراف $Y_{2.34...n}$ إذن طبقا للعلاقة (4. 2. 11) يتضح أن:

$$(4.8.2):\ \beta_{12.34...n} = \rho_{12.34..n}\ \frac{\sigma_{1.34..n}}{\sigma_{2.34..n}}.$$

والعلاقة السابقة يمكن الحصول عليها من معادلة (4. 7. 1) ومعادلة (4. 8. 1a). كما يتضح من (4. 7. 1) و(4. 8. 1a, b) و(4. 8. 2) أن:

$$(4.8.3):\ \rho^2_{12.34..n} = \left(\beta_{12.34..n}\ \beta_{21.34...n}\right)$$

حيث ρ له نفس إشارة β.

(4 ـ 9) التعبـــير عـــن الانحـــرافات المعـــيارية بدلالـــة انحرافات معيارية ومعاملات انحدار وارتباط جزئية من درجة أقل :

لحســـاب معـــاملات الانحدار والارتباط، الجزئية، باستخدام العلاقات السابقة يلزم (أولا) تحديـــد معـــاملات الارتـــباط الكلية (أو مصفوفة معاملات الارتباط P_n) والعزوم المشتركة من الدرجة الثانية (أو مصفوفة التغاير V_n) ثم استخدام العلاقات (4. 6. 10) أو (4. 7. 6a) لحســـاب معاملات الانحدار والارتباط، الجزئية، أو (ثانيا) إيجاد تباين البواقى والارتـــباط بيـــنها باســـتخدام العلاقـــات (4. 7. 1) أو (4. 8. 1) لتحديد المعاملات الجزئية للانحدار والارتباط، ولكن يمكن تبسيط العمل الحسابى بإيجاد المعاملات الجزئية للانحدار والارتباط من الدرجة $(n-1)$ بدلالة المعاملات الجزئية من الدرجة $(n-2)$، ويتم ذلك بإيجاد الانحرافات المعيارية من الدرجة $(n-1)$ بدلالة الانحرافات المعيارية من الدرجة $(n-2)$ ثـــم الاستمرار في ذلك حتى الوصول إلى الانحرافات المعيارية (والمعاملات) من الدرجة صفر. فمن علاقة (4. 6. 16) نجد أن تباين الباقى:

$$\sigma^2_{1.23...n} = E(Y_{1.23...n}\, X_1)$$

ومن (4. 6. 21)

$$= E(Y_{1.23...(n-1)}\, Y_{1.23...n})$$

$$= E\left[Y_{1\,23..(n-1)}\left\{X_1 - \sum_{J=2}^{n-1}\beta_{1J.q(1J)}X_J - \beta_{1n.q(1n)}X_n\right\}\right]$$

ومن (4. 6. 18)

$$= E(Y_{1\,23...(n-1)}\, X_1) - \beta_{1n.q(1n)}\, E(Y_{1.23...(n-1)}\, X_n)$$

حيث $q(1n) = 23...(n-1)$.

ومن (4. 6. 16)

$$\sigma^2_{1.23...n} = \sigma^2_{1\,23\,.(n-1)} - \beta_{1n\,23...(n-1)}\, E(Y_{1.23.\,(n-1)}\, X_n)$$

ومن (4. 6. 21)

$$\sigma^2_{1\,23...n} = \sigma^2_{1.23...(n-1)} - \beta_{1n.23...(n-1)}\, E(Y_{1.23\,..(n-1)}\, Y_{n.23...(n-1)})$$

ومن (4. 7. 1)

$$= \sigma^2_{1.23...(n-1)} - \beta_{1n.23...(n-1)}\,\rho_{1n.23..\,(n-1)}\,\sigma_{1.23\,..(n-1)}\,\sigma_{n\,23.\,(n-1)}$$

وبوضع $q(1n) = 23\cdots(n-1)$, $q(1) = 23\cdots n$ إذن:

$$\sigma^2_{1.q(1)} = \sigma^2_{1.q(1n)} - \beta_{1n.q(1n)}\,\rho_{1n\,q(1n)}\,\sigma_{1.q(1n)}\,\sigma_{n.q(1n)}$$

$$= \sigma^2_{1.q(1n)}\left[1 - \beta_{1n.q(1n)}\,\rho_{1n.q(1n)}\frac{\sigma_{n.q(1n)}}{\sigma_{1.q(1n)}}\right]$$

ومن (4. 8. 2) نحصل على:

$$(4.9.1):\ \sigma^2_{1.q(1)} = \sigma^2_{1.q(1n)}\left[1 - \beta_{1n.q(1n)}\cdot\beta_{n1.q(1n)}\right]$$

حيث $q(1n) = 23\cdots(n-1)$, $q(1) = 23\cdots n$. كذلك من (4. 8. 3) نحصل على:

$$(4.9.2):\ \sigma^2_{1.q(1)} = \sigma^2_{1.q(1n)}\left[1 - \rho^2_{1n.q(1n)}\right]\ ;\ q(1) = 23\cdots n$$

$$;\ q(1n) = 23\cdots(n-1)$$

والرقم المحذوف فى الدليل الثانوى للمعادلتين السابقتين هو n ويمكن حذف أى رقم آخـــر غـــير الـــ n (ليكن $i < n$ مثلاً) وعلى ذلك يمكن إيجاد $\sigma^2_{1.q(i)}$ بطرق عددها $(n-1)$ أى بعـــدد الأدلـــة الثانوية وكلها تعطى نفس القيمة $\sigma^2_{1.q(i)}$ وهذا مفيد للمطابقة الحسابية عند حساب $\sigma^2_{1.q(i)}$ للتأكد من صحة النتائج.

ويتضح من علاقة (2 .9 .4) ما يلى:

(1) $\rho^2_{1n.23..(n-1)} \leq 1$.

(2) عند تقدير X_1 بدلالة $X_2,...,X_{n-1}$ من معادلة الانحدار (2 .6 .4) عندما يكون عدد المتغـــيرات $(n-1)$، ثم تقديرها بدلالة $X_2,...,X_{n-1},X_n$ من نفس المعادلة عندما يكـــون عـــدد المتغيرات n فإن إضافة X_n لا تزيد من دقة accuracy التقدير إلا إذا كانت $\rho_{1n.23...(n-1)}$ (وليست ρ_{1n}) تختلف عن الصفر، لأن اختلافها عن الصفر يؤدى إلى إنقاص تباين الباقى (الذى يعبر عن خطأ التقدير) عند إضافة X_n، إذ نجد ـــ عند إضافة X_n عندما تكون $\rho_{1n.23...(n-1)} \neq 0$ ـــ أن:

$$\sigma^2_{1.23...n} < \sigma^2_{1.23...(n-1)}$$

فإذا كانت $\rho^2_{1n.23...(n-1)} = 0$ فإن:

$$\sigma^2_{1.23...n} = \sigma^2_{1.23...(n-1)}$$

وبالـــتالى فإن خطأ التقدير لا ينقص بإدخال X_n فى عملية التقدير عند إضافتها. وهذا الشرط قد يوصلنا إلى نتائج غير متوقعة، فمثلاً فى علاقة (7 .7 .4) كما حصلنا على معامل الارتباط الجزئى $\rho_{12.3}$ يمكن الحصول على معامل الارتباط الجزئى $\rho_{13.2}$ وسنجد أن:

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\,\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho^2_{12}\right)\left(1-\rho^2_{23}\right)}}$$

فلو كانت $\rho_{12}\,\rho_{23} = \rho_{13}$ يكون $\rho_{13.2} = 0$ وهذا يعنى أن إدخال X_3 فى معادلة مستوى الانحدار لن يزيد من دقة تقدير X_1 بدلالة X_2 و X_3 بالرغم من وجود ارتباط بين X_1 و X_3. فلو كانت:

$$\rho_{12} = 0.8 \ , \ \rho_{13} = 0.4 \ , \ \rho_{23} = 0.5$$

فإن $\rho_{13.2} = 0$ وبالتالى فإن تقدير X_1 بدلالة X_2 و X_3 لن يكون أكثر دقة من تقديرها بدلالة X_2 وحدها وذلك بالرغم من وجود ارتباط بين X_1 و X_3 (يساوى 0.4).

وبالمثل من (4. 9. 1) و(4. 9. 2) نجد أن:

$$\sigma^2_{1\,23...(n-1)} = \sigma^2_{1\,23..\,(n-2)}\left[1-\rho^2_{1(n-1).23...(n-2)}\right]$$
$$= \sigma^2_{1.23...(n-2)}\left[1-\beta_{1(n-1).23...(n-2)}\ \beta_{(n-1)1.23\ .(n-2)}\right]$$

وبتكرار التعويض عن ذلك فى المعادلة (4. 9. 1) نصل إلى:

$$(4.\,9.\,3):\ \sigma^2_{1.23...n} = \sigma^2_1\left(1-\beta_{12}\,\beta_{21}\right)\left(1-\beta_{13.2}\,\beta_{31.2}\right)\left(1-\beta_{14.23}\,\beta_{41.23}\right).....$$
$$...\left(1-\beta_{1n.23...(n-1)}\,\beta_{n1.23..\,(n-1)}\right).$$

$$(4.\,9.\,4):\ \sigma^2_{1.23..\,n} = \sigma^2_1\left(1-\rho^2_{12}\right)\left(1-\rho^2_{13.2}\right)\left(1-\rho^2_{14.23}\right)...\left(1-\rho^2_{1n\ 23...(n-1)}\right).$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن:

$$(4.\,9.\,5):\ \sigma^2_{1\,23\,.\,n} \le \sigma^2_1$$

نلاحظ أننا للوصول إلى العلاقات (4. 9. 3) و(4. 9. 4) من (4. 9. 1) و(4. 9. 2) بدأنا بحذف عناصر الدليل الثانوى $(23\cdots n)$ على خطوات بدأ بـــ n ثم $(n-1)$ وهكذا حتى 2، ويمكـــن الحذف بترتيب آخر بأن نبدأ بـــ 2 ثم 3، ...، ثم n، أو أى ترتيب نراه غير ذلـــك، وهـــذا يعطـــى صيغا لابد أن تتطابق كلها، أى أن كلها تعطى نفس القيمة للتباين $\sigma^2_{1.23\,..n}$ وهذا يفيد فى عملية المراقبة الحسابية checking على النتائج.

إذن عـــندما تكـــون معاملات الارتباط الكلية والجزئية معروفة يمكن إيجاد تباين الـــباقى (أو الانحـــراف) $Y_{i.q(i)}$ باستخدام العلاقة (4. 9. 4) ثم من العلاقة (4. 8. 2) يمكن إيجاد أى معامل انحدار جزئى نريده.

والعلاقات السابقة تناظر العلاقات التالية فى حالة متغيرين:

$$\sigma^2_{1.2} = \sigma^2_1\left(1-\beta_{12}\,\beta_{21}\right) = \sigma^2_1\left(1-\rho^2_{12}\right).$$

(4 ـ 10) التعبير عن معاملات، الانحدار والارتباط، الجزئية، بمعاملات من درجة أقل:

من (4. 8. 1a) نجد أن:

$$\beta_{12.34...n}\,\sigma^2_{2.34...n} = E\left[Y_{1.34...n}\,Y_{2.34...n}\right]$$

ومن (4. 6. 21)

$$= E\left[Y_{1.34...(n-1)}\,Y_{2.34...n}\right]$$
$$= E\left[Y_{1.34...(n-1)}\left\{X_2 - \beta_{2n.34...(n-1)}X_n - D\right\}\right]$$

حيث D تمثل حدود فى X_3 و X_4 و .. إلى X_{n-1}. ولكن من (4. 6. 18)

$$\beta_{12.34...n}\,\sigma^2_{2.34...n} = E\left(Y_{1.34...(n-1)}\,X_2\right) - \beta_{2n.34...(n-1)}\,E\left(Y_{1.34...(n-1)}\,X_n\right).$$

ومن (4. 6. 21)

$$= E\left(Y_{1.34...(n-1)}\,Y_{2.34...(n-1)}\right)$$
$$- \beta_{2n.34...(n-1)}\,E\left(Y_{1.34...(n-1)}\,Y_{n.34...(n-1)}\right)$$

ومن (4. 8. 1)

$$= \beta_{12.34...(n-1)}\,\sigma^2_{2.34...(n-1)} - \beta_{2n.34...(n-1)}\,\beta_{1n.34...(n-1)}\,\sigma^2_{n.34...(n-1)}$$

ولكن من معادلتى (4. 8. 2) و(4. 8. 3) نجد أن:

$$(4.\ 10.\ 1):\ \beta_{2n.34...(n-1)} = \beta_{n2.34...(n-1)}\,\frac{\sigma^2_{2.34...(n-1)}}{\sigma^2_{n.34...(n-1)}}.$$

وبالتعويض عن (4. 10. 1) فى المعادلة السابقة لها نجد أن:

$$\beta_{12.34...n}\,\sigma^2_{2.34...n} = \beta_{12.34...(n-1)}\,\sigma^2_{2.34...(n-1)}$$
$$- \beta_{1n.34...(n-1)}\,\beta_{n2.34...(n-1)}\,\sigma^2_{2.34...(n-1)}$$

إذن:

$$\beta_{12.34...(n-1)} = \frac{\sigma^2_{2.34...(n-1)}}{\sigma^2_{2.34...n}}\left[\beta_{12.34...(n-1)} - \beta_{1n.34...(n-1)}\,\beta_{n2.34...(n-1)}\right]$$

وبالــتعــويض عن $\sigma^2_{2.34...n}$ فى المعادلة السابقــة كما فى معادلـــة (4 .8 .4) ــ (باستخدام 2 بدلاً من 1 فى الدليل الأساسى وإهمال الرقم 2 فى الدليل الثانوى) ــ نجد أن:

$$(4.\ 10.\ 2):\ \beta_{12.34...n} = \frac{\beta_{12.q(12n)} - \beta_{1n.q(12n)}\,\beta_{2n\ q(12n)}}{1-\beta_{2n.q(12n)}\,\beta_{n2.q(12n)}}.$$

حيث: $q(12n) = 34\cdots(n-1)$. وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(4.\ 10.\ 3):\ \beta_{iJ.q(iJ)} = \frac{\beta_{iJ.q(iJn)} - \beta_{in.q(iJn)}\,\beta_{Jn\ q(iJn)}}{1-\beta_{Jn\ q(iJn)}\,\beta_{nJ.q(iJn)}}\ \ ;\ (i \neq J \neq n)$$

حيث $q(iJn)$ هى الأعداد من 1 إلى n ماعدا i, J, n وكذلك $q(iJ)$ هى الأعداد من 1 إلى n ماعدا العددين i, J.

ملاحظــة (4 ــ 10 ــ 1): فى المعادلتين السابقتين كان العدد المحذوف هو n من الدلـــيل الثانوى لمعاملات الطرف الأيمن وكان من الممكن حذف أى عدد آخر بدلاً من n وهذا يقدم لنا صيغ بديلة لحساب المعاملات β's عددها $(n-2)$ صيغة كلها متكافئة وتعطـــى نفس النتيجة مما يمكن الاستفادة منه فى عملية المراقبة الحسابية على صحة النـــتائج. وممـــا هو جدير بالذكر أن العدد المحذوف لا يكون أحد عددى الدليل الأساسى للمعـــامل β فإذا أردنا الحصول مثلاً على $\beta_{in.q(in)}$ لابد أن يكون العدد المحذوف أى عدد آخر خـــلاف i, n ــ فمثـــلاً فى حالة ثلاث متغيرات إذا أردنا الحصول على $\beta_{13.2}$ نحذف العدد 2. حيث نجد أن:

$$(4.\ 10.\ 4):\ \beta_{13.2} = \frac{\beta_{13} - \beta_{12}\,\beta_{32}}{1-\beta_{32}\,\beta_{23}}$$

وبالتعويض فى (4 .10 .2) كما فى علاقة (4 .8 .2) نجد أن: (لسهولة الكتابة سنكتب $q(12n) = q$ مؤقتاً)

$$\rho_{12.qn}\frac{\sigma_{1.qn}}{\sigma_{2.qn}} = \frac{\rho_{12.q}\dfrac{\sigma_{1.q}}{\sigma_{2.q}} - \rho_{1n.q}\dfrac{\sigma_{1.q}}{\sigma_{n.q}}\rho_{n2}\dfrac{\sigma_{n.q}}{\sigma_{2.q}}}{1-\rho_{2n.q}\dfrac{\sigma_{2\ q}}{\sigma_{n.q}}\rho_{n2}\dfrac{\sigma_{n.q}}{\sigma_{2.q}}}$$

$$= \frac{\rho_{12.q} - \rho_{1n.q}\,\rho_{n2.q}}{1-\rho_{2n.q}\,\rho_{n2.q}}\left(\frac{\sigma_{1.q}}{\sigma_{2.q}}\right)$$

ولكن من (2 .9 .4) ــ (باستخدام الدليل الأساسى 2 بدلاً من 1 وإهمال الرقم 2 فى الدليل الثانوى) ــ نجد أن:

$$\frac{\sigma_{2.qn}}{\sigma_{2q}} = \left(1-\rho^2_{2n.q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالمثل:

$$\frac{\sigma_{1q}}{\sigma_{1.qn}} = \left(1-\rho^2_{1n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض عن هذا فى المعادلة قبل السابقة نجد أن:

$$(4.\ 10.\ 5):\ \rho_{12.q(12)} = \frac{\rho_{12.q(12n)} - \rho_{1n\,q(12n)}\,\rho_{2n.q(12n)}}{\left(1-\rho^2_{1n.q(12n)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\rho^2_{2n.q(12n)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

حيث: $q(12n)=34\cdots(n-1)$ ، $q(12)=34\cdots(n-1)n$. وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(4.\ 10.\ 6):\ \rho_{iJ.q(iJ)} = \frac{\rho_{iJ.q(iJn)} - \rho_{in.q(iJn)}\,\rho_{nJ.q(iJn)}}{\left(1-\rho^2_{in\,q(iJn)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\rho^2_{Jn.q(iJn)}\right)^{\frac{1}{2}}}\quad;\quad (i \neq J \neq n)$$

حيــث $q(iJn)$ هــى الأعــداد من 1 إلى n ماعدا الأعداد i, J, n و $q(iJ)$ هى الأعداد من 1 إلى n ماعدا العددان i, J.

وللحصول على $\rho_{in\,q(in)}$ لابد من تطبيق ملاحظة (4 ــ 10 ــ 1) على ρ's، ففى حالة ثلاث متغيرات مثلاً للحصول على $\rho_{13.2}$ نكتب $n=2$ بدلاً من 3 إذن:

$$(4.\ 10.\ 7):\ \rho_{13.2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\,\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho^2_{12}\right)\left(1-\rho^2_{23}\right)}}$$

(4 ــ 11) معامل الارتباط المتعدد Multiple Correlation Coefficient:

فــى توزيــع أى متغــير مــتعدد $(X_1,\ldots,X_n)$ ذو متغيرات عددها n إذا كان $E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n)$ يمثل دالة خطية فى الصورة:

$$(4.\ 11.\ 1a):\ E(X_1 \mid x_2,\ldots,x_n) = m_2(x_2,\ldots,x_n)$$
$$= \beta_{12.q(12)}\,x_2 + \cdots + \beta_{1n.q(1n)}\,x_n\,.$$

أو إذا كان $E(X_1 \mid x_2,...,x_n)$ دالة غير خطية وكان أفضل تقدير خطى للمتغير X_1 بدلالة $X_2,...,X_n$ هو:

$$(4.\ 11.\ 1b):\ \hat{X}_1 = m(x_2,...,x_n) = \beta_{12.q(12)}\, x_2 + \cdots + \beta_{1n.q(1n)}\, x_n .$$

حيث $\hat{X}_1$ هو أفضل تقدير خطى (طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى) يجعل تباين الباقى:

$$(4.\ 11.\ 2):\ Y_{1\,q(1)} = X_1 - \hat{X}_1$$

أقل ما يمكن ــ حيث $Y_{1.q(1)}$ كما فى (4. 6. 12) و $q(1) = 23\cdots n$ ــ فهذا يعنى أن تركيز قيم المتغير X_1 حول المستوى $X_1 = \hat{X}_1$ أكثر من تركيزها حول أى مستوى آخر. فى الواقع يمكن إثبات أن:

$$(4.\ 11.\ 3):\ E[X_1 - g(x_2,...,x_n)]^2 = E[X_1 - E(X_1 \mid x_2,...,x_n)]^2$$
$$+ E[E(X_1 \mid x_2,...,x_n) - g(x_2,...,x_n)]^2$$
$$\geq E[X_1 - E(X_1 \mid x_2,...,x_n)]^2$$

حيث $g(x_2,...,x_n)$ أى دالة فى $x_2,...,x_n$. أى أن الحد الأدنى للتوقع $E[X_1 - g(x_2,...,x_n)]^2$ نحصل عليه عندما تكون $g(x_2,...,x_n) = E(X_1 \mid x_2,...,x_n)$، إذ أن هذا يعطى أفضل معادلة لانحدار X_1 على $X_2,...,X_n$ لأنه يجعل توقع مربع الخطأ $E[X_1 - E(X_1 \mid x_2,...,x_n)]^2$ نهاية صغرى. فإذا كان التوقع $E[X_1 \mid x_2,...,x_n]$ يمثل مستوى معين سيكون هو المستوى (4. 11. 1a) أما إذا كان يمثل سطح زائد فيمكن باستخدام طريقة المربعات الصغرى الحصول على مستوى معين كتقدير (أو كتقريب) لهذا السطح الزائد متمثلاً فى العلاقة (4. 11. 1b) ومعطياً أفضل تقدير (طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى) يجعل التباين $V(X_1 - \hat{X}_1)$ نهاية صغرى. وهذا يعنى أن تركيز قيم المتغير X_1 حول المستوى $X_1 = \hat{X}_1$ أكثر من تركيزها حول أى مستوى آخر ــ كما سبق أن ذكرنا ــ وبهذا يكون من الواضح أن معامل الارتباط الكلى بين المتغير (أو المستوى) $\hat{X}_1$ والمتغير X_1 يعتبر أكبر معامل ارتباط ممكن أن يوجد بين X_1 وأى مستوى آخر أو أى دالة من الدرجة الأولى فى المتغيرات $X_2,...,X_n$، وسنوضح ذلك رياضياً فيما بعد فى العلاقة

(4. 11. 14)، ومعـــامل الارتـــباط بيـــن المتغير X_1 والمتغير (أو المستوى) $\hat{X}_1$ يمكن اعتـــباره مقـــياس للارتباط بين X_1 وبين بقية المتغيرات $X_2,...,X_n$ مجتمعة وسوف نطلـــق علـــى هـــذا المعامل تسمية خاصة هى "معامل الارتباط المتعدد" بين X_1 وباقى المتغـــيرات $X_2,...,X_n$ وهـــو معامل ارتباط متعدد من الدرجة $(n-1)$ حيث أن عدد المتغـــيرات المســـتقلة $(n-1)$ متغـــيرا ونرمـــز له بالرمز $\rho_{1(23..n)}$ ويمكن كتابته فى الصورة التالية:

$$(4.\ 11.\ 4):\ \rho_{1(23...n)} = \frac{E\left(X_1 \hat{X}_1\right)}{\sqrt{E\left(X_1^2\right)E\left(\hat{X}_1\right)^2}}.$$

ولكن:

$$E\left(X_1 \hat{X}_1\right) = E\left[X_1\left(X_1 - Y_{1\,q(1)}\right)\right] = E\left(X_1^2\right) - E\left(X_1 Y_{1.q(1)}\right)$$

ومن (4. 6. 15)

$$(4.\ 11.\ 5):\ E\left(X_1 \hat{X}_1\right) = v_{11} - |V_n| / c\left(V_n^{11}\right)$$

حيث $\sigma_1^2 = v_{11}$ و

$$|V_n| / c\left(V_n^{11}\right) = 1/v^{11} = \sigma_1^2 |P_n| / c\left(P_n^{11}\right) = \sigma_{1.23...n}^2$$

كما يتضح من (4. 6. 16).

كذلك:

$$E\left(\hat{X}_1^2\right) = E\left(X_1^2 - 2X_1 Y_{1\,q(1)} + Y_{1\,q(1)}^2\right)$$

ومن (4. 6. 16) نحصل على:

$$(4.\ 11.\ 6):\ E\left(\hat{X}_1^2\right) = E\left(X_1^2\right) - E\left(Y_{1.q(1)}^2\right) = \sigma_1^2 - |V_n| / c\left(V_n^{11}\right)$$

أو

$$= \sigma_1^2 - 1/v^{11}$$

أو

$$= \sigma_1^2 - \sigma_1^2 |P_n| / c\left(P_n^{11}\right)$$

أو

$$= \sigma_1^2 - \sigma_{1.23...n}^2$$

وبالتعويض عن (4. 11. 5) و(4. 11. 6) فى (4. 11. 4) نجد أن:

$$\rho_{1(23...n)} = \frac{\sigma_1^2 - |V_n|/c(V_n^{11})}{\sqrt{\sigma_1^2\left[\sigma_1^2 - |V_n|/c(V_n^{11})\right]}}$$

أو

$$= \frac{\sigma_1^2 - 1/v^{11}}{\sqrt{\sigma_1^2\left(\sigma_1^2 - 1/v^{11}\right)}}$$

أو

$$= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1^2|P_n|/c(P_n^{11})}{\sqrt{\sigma_1^2\left[\sigma_1^2 - \sigma_1^2|P_n|/c(P_n^{11})\right]}}$$

أو

$$= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1.23...n}^2}{\sqrt{\sigma_1^2\left(\sigma_1^2 - \sigma_{1.23\,.\,n}^2\right)}}$$

وبهذا يمكن كتابة معامل الارتباط المتعدد بين X_1 وباقى المتغيرات $X_2,...,X_n$ فى الصور المتكافئة التالية:

$$(4.\ 11.\ 7):\quad \rho_{1(23...n)} = \begin{cases} \text{(a)} & \sqrt{1 - |V_n|/\sigma_1^2\, c(V_n^{11})} \quad \text{أو} \\ \text{(b)} & \sqrt{1 - 1/\sigma_1^2\, v^{11}} \quad \text{أو} \\ \text{(c)} & \sqrt{1 - |P_n|/c(P_n^{11})} \quad \text{أو} \\ \text{(d)} & \sqrt{1 - \sigma_{1.23...n}^2/\sigma_1^2} \end{cases}$$

حيث: $c(V_n^{11})$ هو مرافق العنصر $(1,1)$ فى مصفوفة التغاير V_n و $c(P_n^{11})$ هو مرافق العنصر $(1,1)$ فى مصفوفة معاملات الارتباط P_n و v^{11} هو العنصر $(1,1)$ فى

مقلـــوب V_n و $\sigma^2_{1.23...n}$ هو تباين الباقى المعرف بالعلاقة (16 .6 .4) و $|V_n|$ و $|P_n|$ هما محددى المصفوفتان V_n و P_n و σ^2_1 هو تباين المتغير X_1.

والعلاقـــة الأخـــيرة السابقة (4. 11. 7d)، عندما تكون $\hat{X}_1$ تمثل سطح زائد (ليس مســـتوى)، هى نفسها نسبة ارتباط X_1 على $X_2,...,X_n$ وتسمى نسبة الارتباط المتعدد ونرمـــز لها بالرمز $\xi^2_{1(23...n)}$ كتعميم للعلاقة (16 .4 .4) التى تمثل نسبة الارتباط فى حالة متغيرين. ومن العلاقة (4. 11. 7d) مع العلاقة (4. 9. 4) نجد أن:

$$(4.\ 11.\ 8):\ 1-\rho^2_{1(23\ ..n)} = \left(1-\rho^2_{12}\right)\left(1-\rho^2_{13.2}\right)\left(1-\rho^2_{14.23}\right)...\left(1-\rho^2_{1n.23...(n-1)}\right).$$

مـــثال (4 ــ 11 ــ 1): يمكن إيجاد معامل الارتباط المتعـــدد $\rho_{1(23)}$ للمتغيـــرات المعطـــاة فـــى مثال (4 ــ 7 ــ 1) السابق بكل الصيغ المقدمـــة فى العلاقـــة (4. 11. 7) a, b, c, d حيث نجد أن:

(a) $\rho_{1(23)} = \sqrt{1-2/\frac{3}{2}\left(\frac{8}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(b) $\rho_{1(23)} = \sqrt{1-1/\frac{3}{2}(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(c) $\rho_{1(23)} = \sqrt{1-\frac{16}{27}/\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(d) $\rho_{1(23)} = \sqrt{1-1/\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

ويمكن التأكد من صحة العلاقة (4. 11. 8) حسابياً من مثال (4 ــ 7 ــ 1) كما يلى:

من (4. 10. 7) نجد أن:

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_{13}-\rho_{12}\,\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho^2_{12}\right)\left(1-\rho^2_{23}\right)}}$$

وحيث أن $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -\frac{1}{3}$ إذن:

$$\rho_{13.2} = -\frac{1}{2}$$

وبتطبيق ذلك على العلاقة (4. 11. 8) نجد أن الجانب الأيسر يساوى $\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ والجانب الأيمن يساوى $\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$.

من العلاقات السابقة يمكن استنباط الخصائص التالية لمعامل الارتباط المتعدد:

(1) من العلاقة (4. 11. 8) نستنتج أن $\rho_{1(23...n)}^2$ أكبر من أو يساوى أى ρ^2 كلى أو جزئى آخر أى أن:

$$(4.\ 11.\ 9):\ \rho_{1(23...n)}^2 \geq \rho_{1J.S}^2$$

حيث S مجموعة جزئية من الأعداد $23\cdots n$ و $J = 2,3,...,n$.

(2) مـــن العلاقة (4. 8. 7) نعلم أن $\sigma_{1.23..n}^2 \leq \sigma_1^2$ إذن من (4. 11. 7d) يتضح أن معامل الارتباط المتعدد $\rho_{1(23...n)}$ دائماً موجب، كما يتضح كذلك أن $\rho_{1(23\ .\ n)}^2 \leq 1$ ــ إذن:

$$(4.\ 11.\ 10):\ 0 \leq \rho_{1(23...n)}^2 \leq 1$$

وعـــندما $\rho_{1(23...n)} = 1$ تكون $|V_n| = |P_n| = 0$ ــ أى أن محددى مصفوفتى التغاير ومعـــاملات الارتباط كل منهما يساوى الصفر ــ وذلك طبقاً للعلاقـــة (4. 11. 7) مما يوضـــح أن الـــتوزيع المشـــترك للمتغـــير $(X_1,...,X_n)$ يكـــون توزيعـــاً شـــاذاً Singular Distribution وطـــبقاً لنظرية (3 ــ 11 ــ 3) يكون المتغير X_1 "من المؤكد غالـــباً" Almost Certainly أنـــه يمـــثل علاقة دالية من الدرجة الأولى فى المتغيرات $X_2,...,X_n$ أى أن:

$$\Pr\left(X_1 = \hat{X}_1\right) = 1$$

حيث $\hat{X}_1$ كما هى معطاة بالعلاقة (4. 11. 1b)، وهذا يعنى أن الاحتمال الكلى للتوزيع المشـــترك للمتغيرات $X_1,...,X_n$ مدمج Degenerate (أى متركزاً) فى مستوى زائد معيـــن In Certain Hyper plane فـــى الفـــراغ ذو الـــــ n بعـــداً هو المستوى الزائد $X_1 = \hat{X}_1$. وعلـــى هـــذا فإن $\rho_{1(23...n)}$ يعتبر مقياس لدرجة اعتماد X_1 على باقى المتغيرات $X_2,...,X_n$.

(3) بمـــا أن القـــيمة العددية لمعامل الارتباط المتعدد $\rho_{1(23...n)}$ أكبر من أو تساوى القيمة العدديـــة لأى معامل ارتباط كلى أو جزئى بين المتغيرات $X_1,...,X_n$ ــ كما يتضح مـــن (4. 11. 9) ــ إذن عـــندما يكـــون معامل الارتباط المتعدد مساوياً للصفر تكون معـــاملات الارتباط الكلية والجزئية بين X_1 وأى من المتغيرات الأخرى كلها أصفار وبالتالى لا يوجد ارتباط بين X_1 وأى متغير آخر من المتغيرات $X_2,...,X_n$.

لقـــد ذكـــرنا أن معـــامل الارتباط المتعدد $\rho_{1(23...n)}$ يقيس العلاقة بين X_1 وباقى المتغيرات $X_2,...,X_n$ مجتمعة. لكننا أحياناً نرغب فى قيـــاس العـــلاقة بين X_1 وأى

مجموعـــة جزئـــية من المتغيرات $X_2,...,X_n$. فإذا كانت S تمثل مجموعة جزئية من الأعـــداد $23\cdots n$ فإننا نعرف معامل الارتباط الكلى بين X_1 وبين مجموعة المتغيرات المذيلة بأرقام المجموعة S طبقاً للعلاقة (4. 11. 7d) بأنه:

$$(4.\ 11.\ 11):\ \rho^2_{1(S)} = 1 - \sigma^2_{1.S} / \sigma^2_1$$

ولكن من العلاقة (4. 9. 2) يتضح أن:

$$(4.\ 11.\ 12):\ \sigma^2_{1.S} \le \sigma^2_{1.r}$$

عـــندما تكون r أى مجموعة جزئية من S، وهذا معناه أن تباين الباقى لا يمكن أن يزيد بإضافة المزيد من المتغيرات. إذن من (4. 11. 11) و(4. 11. 12) نجد أن:

$$(4.\ 11.\ 13):\ \rho^2_{1(2)} \le \rho^2_{1(23)} \le \rho^2_{1(234)} \le \cdots \le \rho^2_{1(23..n)} .$$

وهـــذا يوضح أن معامل الارتباط المتعدد $\rho_{1(S)}$ لا يمكن أن ينقص بإضافة المزيد من المتغيرات، ونستشف من العلاقة (4. 11. 13) أن بإضافة المزيد من المتغيرات المستقلة نجـــد أن $\rho_{1(23..n)}$ تقترب من الواحد الصحيح (1.0) بينما خطأ التقدير $\sigma_{1.23...n}$ يقترب مـــن الصفر، فإذا كان من الممكن أن ندخل فى أى مسألة كل المتغيرات المستقلة الوثيقة الصـــلة بها فإن $\rho_{1(23...n)}$ يمكن أن تساوى الواحد الصحيح ونحصل بذلك على تقديرات كاملة Perfect Estimates للمتغير X_1 بدلالة باقى المتغيرات.

لقـــد سبق أن ذكرنا فى بداية البند الحالى (4 ـ 11) أن معامل الارتباط الكلى بين المتغـــير X_1 والمستوى $\hat{X}_1$ ـ المعطى بالعلاقة (4. 11. 1b) يعتبر أكبر معامل ارتباط ممكـــن أن يوجـــد بيـــن X_1 وأى مستوى آخر أو أى دالة أخرى من الدرجة الأولى فى المتغـــيرات $X_2,...,X_n$ ويمكـــن إثـــبات ذلك رياضياً بتعميم العلاقة (4. 4. 3) من حالة متغيرين إلى حالة $n > 2$ من المتغيرات لإثبات أن:

$$(4.\ 11.\ 14):\ \rho_{1(23\ ..n)} = \rho\left(X_1, \hat{X}_1\right) \ge \left|\rho\left[X_1, g\left(x_2,...,x_n\right)\right]\right|$$

لأى دالة $g\left(X_2,...,X_n\right)$ فى المتغيرات $X_2,...,X_n$.

ملاحظـــة (4 ـ 11 ـ 1): يمكـــن الحصول على معامل الارتباط المتعدد بين X_i عـــندما $i \ne 1$ وبيـــن باقى المتغيرات من العلاقات (4. 11. 7) بكتابة i بدلاً من العدد 1 والعـــدد 1 بدلاً من العدد i. كما يمكن مراعاة ذلك فى كل الصيغ المقدمة فى كل العلاقات التالية للعلاقة (4. 11. 7).

(4 ـ 12) الانحدار الخطى التقريبى (المربعات الصغرى):

Approximate Linear Regression (Least Squares):

إن معـــادلات الانحدار السابقة تمثل انحدار خطى مضبوط Exactly Linear ولكن عندما يكون المجتمع مجتمعاً مشاهداً ــ أى مجتمع من المشاهدات وليس مجتمعاً نظرياً ــ يكون المتاح لدينا مشاهدات المجتمع وليس توزيعه الاحتمالى (النظرى) فيكون من النادر الحصـــول على علاقات انحدار بين المتغيرات فى شكل خطى منضبط ــ ولكن قد يتضح مـــن شـــكل انتشار المشاهدات أن الانحدار قريب بدرجة كافية من الصيغة الخطية ولكنه ليس خطياً منضبطاً ــ Not Exactly Linear ــ مما يدفعنا إلى توفيق خط مستقيم فى حالة متغيرين X_1 و X_2 لانحدار أحدهما على الأخر مثل العلاقة:

$$X_1 = \alpha_1 + \beta_{12} X_2$$

أو توفـــيق مســـتوى زائد Hyper plane فى حالة $n > 2$ من المتغيرات لانحدار أحدها على باقى المتغيرات مثل العلاقة (4. 6. 2). ويمكن توفيق علاقات خطية للمجتمعات المشـــاهدة الـــتى لا نعرف توزيعها الاحتمالى (أى التى لا نشترط لها توزيع معين) ولكن مشاهدات المجتمع متاحة لدينا، وذلك طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. فإذا كان لدينا مجتمع مـــتعدد المتغـــيرات $(X_1, ..., X_n)$ عـــدد متغـــيراته n ولدينا N من المشاهدات من هذا المجـــتمع هـــى: $(X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{ni})$; $i = 1, 2, ..., N$ فـــإذا ظهر من شكل انتشار المشـــاهدات أن انحـــدار X_1 مـــثلاً على باقى المشاهدات قريب جداً من العلاقة الخطية التالية:

$$(4.\ 12.\ 1a):\ X_1 = \beta_{12.q(12)} X_2 + \cdots + \beta_{1n.q(1n)} X_n$$

ولجميع المشاهدات تكون:

$$(4.\ 12.\ 1b):\ \underline{X_1} = [X]\underline{\beta}$$

ونرغـــب فـــى توفيق العلاقة الخطية السابقة طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى ــ أى نخـــتار قيم β's التى تجعل مربعات انحرافات المشاهدات X_{1J}'s عن مستوى الانحدار نهاية صغرى ــ فيتم ذلك باختيار قيم β's التى تحقق العلاقة التالية:

$$(4.\ 12.\ 2a):\ N\,\sigma^2_{1.23...n} = \sum_{i=1}^{N}\left[X_{1i} - \sum_{J=2}^{n}\beta_{1J.q(1J)} X_{Ji}\right]^2$$

$$= \text{minimum} = \text{نهاية صغرى}$$

أو فى صورة مصفوفية كما يلى:

$$(4.\ 12.\ 2b):\ N\,\sigma^2_{1\,23\ldots n} = S = \left[\underline{x}_1 - [x]\underline{\beta}\right]' \left[\underline{x}_1 - [x]\underline{\beta}\right]$$

$$= \text{minimum} = \text{نهاية صغرى}$$

فـإذا فرضـنا أن x's مقيسة من مركزها ونستخدم لها الرمز x's بدلاً من X's ــ وهـذا لا يؤدى إلى نقص فى العمومية ــ وأن $N > n$ فإن قيم β 's التى تحقق العلاقة السابقة هى نفسها قيم β 's التى تجعل:

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_{12}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_{1n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} = \underline{O}_{(n-1)\times 1}$$

ويمكن إثبات أن:

$$\frac{\partial \underline{\beta}' [x]' \underline{x}_1}{\partial \underline{\beta}} = \frac{\partial \underline{x}_1' [x]\underline{\beta}}{\partial \underline{\beta}} = [x]' \underline{x}_1$$

$$;\ \frac{\partial \underline{\beta}' [x]' [x]\underline{\beta}}{\partial \underline{\beta}} = 2[x]' [x]\underline{\beta}\ ;;\ \frac{\partial \underline{x}_1' \underline{x}_1}{\partial \underline{\beta}} = \underline{O}$$

وهذا يوصلنا إلى قيم β 's فى الصورة التالية:

$$(4.\ 12.\ 3):\ \underline{\beta}_{(n-1)} = \left([x]' [x]\right)^{-1} [x]' \underline{x}_1$$

(وذلك إذا كانت المصفوفة $[x]' [x]$ لها مقلوب) حيث:

$$\underline{\beta}'_{(n-1)} = \left(\beta_{12.q(12)}, \beta_{13.q(13)}, \ldots, \beta_{1n.q(1n)}\right).$$

والمصفوفة $[x]$ هى مشاهدات المتغيرات $X_2, \ldots, X_n$ و $\underline{X}_1$ هو متجه مشاهدات المتغير X_1 ــ أى أن:

$$(4.12.4): [x]' = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3N} \\ & \cdots\cdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nN} \end{bmatrix}_{(n-1)\times N}$$

و $\underline{x}_1' = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N}]_{N\times 1}$ و $N > n$. أنظر تمرين (4 ـ 8).

علمـــا بـــأن: $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0 \;\; , \;\; J = 1,2,\dots,n$ حيــث أن المشـــاهدات مقيسة من مركزها. إذن:

$$(4.12.5a): [x]'[x] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 & \sum_{1}^{N} x_{2i}\, x_{3i} & \cdots & \sum_{1}^{N} x_{2i}\, x_{ni} \\ \sum_{1}^{N} x_{3i}\, x_{2i} & \sum_{1}^{N} x_{3i}^2 & \cdots & \sum_{1}^{N} x_{3i}\, x_{ni} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \sum_{1}^{N} x_{ni}\, x_{2i} & \sum_{1}^{N} x_{ni}\, x_{3i} & \cdots & \sum_{1}^{N} x_{ni}^2 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= N \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{33} & \cdots & v_{3n} \\ & \cdots\cdots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث v_{ij} هو تغاير X_i و X_j .

وذلـــك لأن المتغـــيرات مقيســـة مـــن مركـــزها والمجتمع عبارة عن مجتمع من المشاهدات لذلك فإن:

$$(4.12.5b): Cov(X_i, X_j) = v_{ij} = \tfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_{it}\, x_{jt}$$

فإذا رمزنا لمصفوفة التغاير للمتغيرات $X_1,...,X_n$ بالرمز:

$$(4.\ 12.\ 6):\ V_n = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

إذن من (4. 12. 5, 6) يتضح أن:

$$(4.\ 12.\ 7):\ [x]'\,[x] = N\,V_n^{11}$$

حيــث V_n^{11} هى المصفوفة V_n بعد حذف الصف الأول والعمود الأول ــ أى أن V_n^{11} هى مصفوفة التغاير للمتغيرات $x_2,...,x_n$. كما يتضح من (4. 12. 4) أن:

$$(4.\ 12.\ 8):\ [x]'\,\underline{x_1} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\,x_{2i},...,\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\,x_{ni}\right)$$

$$= N\left(v_{12}, v_{13},...,v_{1n}\right) = N\underline{M}'$$

حيث $\underline{M}$ هو متجه تغايرات X_1 مع $X_2,...,X_n$. ومن (4. 12. 3, 7, 8) نجد أن:

$$(4.\ 12.\ 9):\ \underline{\beta}_{(n-1)} = \left(V_n^{11}\right)^{-1}\underline{M}$$

حيث V_n^{11} هى مصفوفة التغاير للمتغيرات $X_2,...,X_n$ و $\underline{M}$ هو متجه تغايرات X_1 مع $X_2,...,X_n$.

ويمكن كتابة العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$(4.\ 12.\ 10):\ V_n^{11}\,\underline{\beta}_{(n-1)} = \underline{M}$$

والعلاقــة الســابقة تمثل $(n-1)$ من المعادلات فى $(n-1)$ من المجاهيل وهى نفــس المعادلات المعطاة بالعلاقة (4. 6. 5) وبالتالى يكون لها نفس الحل السابق المعطى بالعلاقة (4. 6. 9) حيث نجد أن:

$$(4.\ 12.\ 11):\ \beta_{1k\,q(1k)} = \begin{cases} -\,c\left(V_n^{1k}\right)/c\left(V_n^{11}\right) & \text{أو} \\ -\,\nu^{1k}/\nu^{11} & \text{أو} \\ -\,\sigma_1 c\left(P_n^{1k}\right)/\sigma_k c\left(P_n^{11}\right) \end{cases}$$

حيث $c\left(V_n^{1k}\right)$ هو مرافق العنصر ν_{1k} فى المصفوفة V_n و ν^{1k} هو العنصر الذى ترتيبه $(1,k)$ ــ أى الموجود فى الصف الأول والعمود k ــ فى مقلوب المصفوفة V_n و $c\left(P_n^{1k}\right)$ هو مرافق العنصر ρ_{1k} فى مصفوفة معاملات الارتباط P_n وبالمثل نعرف $c\left(V_n^{11}\right)$ و $c\left(P_n^{11}\right)$.

وكما حصلنا على $\beta_{1k\,q(1k)}$ ــ وهو معامل الانحدار الجزئى للمتغير x_1 على المتغير x_k مع فرض ثبات باقى المتغيرات يمكن الحصول على معامل الانحدار $\beta_{ik.q(ik)}$ وذلك بافتراض أن المتغير التابع x_i هو المتغير الأول حيث أن ترتيب المتغيرات يعتبر فرضاً اختيارياً ــ كما يمكن الحصول عليه بأسلوب مشابه للعلاقة (4. 6. 10).

مما سبق يتضح أن مستوى الانحدار الخطى التقريبى طبقا لمبدأ المربعات الصغرى يعطى تماماً نفس معاملات الانحدار الخطى المضبوط. وعلى ذلك فإن كل النتائج التى قدمناها فى هذا الباب الخاصة بالانحدار الخطى المضبوط تكون صالحة كذلك فى حالة توفيق مستوى انحدار خطى تقريبى بالمربعات الصغرى للمجتمعات المشاهدة التى ليس لها توزيع معروف وإنما يتوافر لدينا مجموعة مشاهدات المجتمع.

وفى حالة متغيرين تكون

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{12} = -\,c\left(V_2^{12}\right)/c\left(V_2^{11}\right) = -(-1)^{1+2}\,\nu_{21}/\sigma_2^2 = \sum x_1 x_2 \Big/ \sum x_2^2$$

وبما أن المتغيرات مقيسة من مركزها إذن: $x_{.i} = X_{.i} - E\left(X_{.i}\right)$ وبما أن المجتمع مشاهد إذن: $E\left(X_{.i}\right) = \overline{X}_i$ إذن:

$$\beta_{12} = \sum_{i=1}^{N}\left(X_{1i} - \overline{X}_1\right)\left(X_{2i} - \overline{X}_2\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N}\left(X_{2i} - \overline{X}_2\right)^2$$

ومعادلة الانحدار هى:

$$x_1 = \beta_{12}\, x_2$$

$$\left(X_1 - \overline{X}_1\right) = \beta_{12}\left(X_2 - \overline{X}_2\right)$$

$$X_1 = \left(\overline{X}_1 - \beta_{12}\,\overline{X}_2\right) + \beta_{12}\, X_2 = \alpha_1 + \beta_{12}\, X_2$$

وهى نفس العلاقة (4. 2. 9).

(4 ــ 13) معاملات العينة Sample Coefficient:

(4 ــ 13 ــ 1) معاملات الارتباط والانحدار للعينة (حالة متغيرين):

فــى حالـــة المجــتمعات المشـــاهدة عند معرفة مشاهدات المجتمع دون توزيعه الاحــتمالى النظرى إذا لم تكن كل مشاهدات المجتمع متاحة أو ممكنة أو يصعب التعامل معهـــا لكـــبر حجمها وكان المتاح لدينا فقط عينة عشوائية من هذه المشاهدات حجمها N لمجــتمع متعدد عدد متغيراته n حيث $N > n$ ، قد يكون مطلوب حساب (أو تقدير) كل المعاملات السابقة للانحدار والارتباط من بيانات العينة. وعادة نسمى هذه المعاملات فى المجــتمع بـــــ "معـــالم أو ثوابـــت أو بارامترات" المجتمع وعند حساب (أو تقدير) هذه المعـــاملات مـــن العينة نقول أنها "إحصاءات" العينة المقابلة لمعالم المجتمع. فإذا رمزنا لمعالم المجتمع بالحروف الإغريقية ρ، β، ξ فإننا نرمز للإحصاءات المقابلة فى العينة بالـــرموز أو بالحـــروف الرومانية r، b، e على الترتيب. كذلك نرمز لمصفوفتى التغاير ومعاملات الارتباط فى المجتمع بالرمزين $V = \left(v_{ij}\right)$ ، $P = \left(\rho_{ij}\right)$ وفى العينة بالرمزين $S = \left(s_{ij}\right)$ ، $R = \left(r_{ij}\right)$ وعـــادة نستخدم كل الصيغ التى حصلنا عليها لمعاملات المجتمع المشـــاهد كصيغ للمعاملات المناظرة فى العينة مع إجراء التبديل اللازم من ρ، β، ξ وغير ذلك إلى r، b، e. وبهذا فإن معامل الانحدار $b_{1k.q(1k)}$ للعينة يمكن الحصول عليه بعلاقة مشابهة تماماً للعلاقة (4. 12. 11) للمجتمع فى الصورة:

$$(4.\ 13.\ 1):\ b_{1k.q(1k)} = \begin{cases} -\, c\left(S_n^{1k}\right) / c\left(S_n^{11}\right) & \text{أو} \\ -\, s^{1k} / s^{11} & \text{أو} \\ -\, s_1 c\left(R_n^{1k}\right) / s_k\, c\left(R_n^{11}\right)\ ;\ \left(s_1 = s_{11}\ ,\ s_k = s_{kk}\right) \end{cases}$$

حيــث $c\left(S_n^{1k}\right)$ هو مرافق العنصر s_{1k} فى المصفوفة S_n و $c\left(R_n^{1k}\right)$ هو مرافق العنصر r_{1k} فى المصفوفة R_n و s^{1k} هو العنصر $(1,k)$ فى مقلوب المصفوفة S_n. و:

$$(4.\ 13.\ 2):\ S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \ ;\ R_n = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

s_{ij} هــو تغايــر X_i, X_j المحسوب من بيانات العينة و r_{ij} هو معامل الارتباط بينهما المحسوب أيضاً من بيانات العينة.

وبتطبيق ذلك على حالة متغيرين X, Y نجد أن:

$$(4.\ 13.\ 3):\ b_{12} = \frac{\sum(x-\bar{x})(Y-\bar{Y})}{\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

و

$$b_{21} = \frac{\sum(Y-\bar{Y})(x-\bar{x})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

والمجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

كذلك من علاقة (4. 7. 6a) نجد أن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين X_1 و X_2 مع استبعاد تأثير $X_3,\ldots,X_n$ المحسوب من بيانات العينة هو:

$$(4.\ 13.\ 4):\ r_{12.34\ldots n} = \begin{cases} -\,c\left(S_n^{12}\right)\Big/\sqrt{c\left(S_n^{11}\right)\cdot c\left(S_n^{22}\right)} & \text{أو} \\ -\,s^{12}\Big/\sqrt{s^{11}\cdot s^{22}} & \text{أو} \\ -\,c\left(R_n^{12}\right)\Big/\sqrt{c\left(R_n^{11}\right)\cdot c\left(R_n^{22}\right)} \end{cases}$$

حيث S، R كما هى معرفة فى العلاقات (4. 13. 1,2).

وفى حالة متغيرين X و Y يكون:

$$(4.\ 13.\ 5):\ r_{12} = \frac{\sum(x-\bar{x})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\cdot\sum(Y-\bar{Y})^2}}\,.$$

والمجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

ملاحظـــة (4 ـ 13 ـ 1): مما هو جدير بالذكر أن كل إحصاءات العينة المناظرة لمعـــالم المجـــتمع يمكـــن الحصول عليها باستخدام نفس الصيغ السابقة المقدمة لمعالم المجتمـــع مع مجرد تبديل الحروف الإغريقية ρ ، β ، ξ ، .. بالأحرف المقابلة التالية r، b، e، .. والحصـــول علـــى عزوم العينة بنفس طريقة الحصول على عزوم المجتمع المشاهد كما فى العلاقة (4. 12. 5b) على أن تكون المجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

ومعـــاملات العينة (أو إحصاءات العينة) ما هى إلا متغيرات عشوائية (فهى تتغير من عينة لأخرى) نرغب فى الحصول على التوزيع الاحتمالى المضبوط أو التقاربى لكل مـــنها لفائدتـــه التطبيقية والعملية لذلك سنقدم فيما يلى بعضاً من هذه الإحصاءات تمهيداً لتقديم توزيعاتها الاحتمالية بعد ذلك فى باب توزيعات المعاينة.

(4 ـ 13 ـ 2) نســـبة الارتـــباط لمتغيرين: إذا كان لدينا عينة مسحوبة من مجتمع ثنائى وبياناتها مبوبة فى جدول تكرارى مزدوج $(t\times k)$ حسب فئات وتكرارات متغيرين X، Y. واتضـــح من الجدول أو من شكل انتشار البيانات أنها غير خطية، وكانت أعمدة الجـــدول تمـــثل تكـــرارات X المناظرة لمراكز فئات Y (العمود رقم J يمثل تكرارات X المناظرة لمركز الفئة Y_J)، فإن هذا الجدول يسمى جدول الارتباط $(t\times k)$ ويأخذ الشكل التالى:

جدول (4 ـ 13 ـ 1)

مراكز الفئات	Y_1	…	Y_J	…	Y_k	$n_{x.}$
x_1	n_{11}	…	n_{1J}	…	n_{1k}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	
x_i	n_{i1}	…	n_{iJ}	…	n_{ik}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	
x_t	n_{t1}	…	n_{tJ}	…	n_{tk}	n_t
$n_{.y}$	$n_{.1}$	…	$n_{.J}$	…	$n_{.k}$	$n_{..}=n$

ويمكـــن حســـاب "نســـبة ارتباط X على Y" من بيانات الجدول السابق باستخدام علاقـــــة مشابهة للعلاقة (4. 4. 8)، إذ نستخدم متوسطات المتغير X فى الأعمدة المختلفة (متوســـطات الأعمـــدة) ـ أى المتوســـطات $\overline{x}_J=\overline{x}|Y_J\ ;\ J=1,2,\ldots,k$ ـ بدلاً من معادلة انحدار X على Y، أى بدلاً من $E(x\mid Y)$. ونرمز لنسبة الارتباط هذه المحسوبة

مـــن العيـــنة بالرمـــز e_1 حيـــث كـــنا نرمز لها فى المجتمع بالرمز ξ_1. ومن العلاقة (4. 4. 8) ـــ بعد كتابة X بدلاً من Y و Y بدلاً من X ـــ نجد أن:

$$\xi_1^2 = \frac{v[E(x \mid Y)]}{v(x)}$$

وباستخدام متوسطات X فى الأعمدة المختلفة بدلاً من $E(X \mid y)$ وكتابة e_1 بدلاً من ξ_1 نجد أن نسبة ارتباط X على Y المحسوبة من الجدول التكرارى السابق هى e_1 حيث:

$$(4.\ 13.\ 6):\ e_1^2 = \frac{v(\overline{X} \mid Y)}{v(X)} = \sum_{J=1}^{k} n_{.J}(\overline{x}_J - \overline{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{t}\sum_{J=1}^{n_i}(x_{iJ} - \overline{x})^2$$

$$;\ x_{i1} = x_{i2} = \cdots = x_{ik} = x_i$$

$$= \sum_{J=1}^{k} n_{.J}(\overline{x}_J - \overline{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{t} n_{i.}(x_i - \overline{x})^2$$

وبأســـلوب ممـــاثل يمكن الحصول على نسبة ارتباط Y على X والتى نرمـــز لها بالرمـــز e_2 مـــن جـــدول (4 ـــ 13 ـــ 1) السابق باستخدام متوسطات Y فى الصفـــوف المخـــتلفـــة $(\overline{Y}_i = \overline{Y} \mid x_i\ ,,\ i = 1, \ldots, t)$ بدلاً من $E(Y \mid x)$ حيث نجـــد من علاقـــة (4. 4. 8) أن:

$$\xi_2^2 = v[E(Y \mid x)]/v(Y).$$

وباســـتخدام متوسطات Y فى الصفوف المختلفة بدلاً من $E(Y \mid x)$ وكتابة e_2 بدلاً من ξ_2 نجد أن نسبة ارتباط Y على X المحسوبة من الجدول التكرارى السابق هى e_2 حيث:

$$(4.\ 13.\ 7a):\ e_2^2 = v(\overline{Y} \mid x)/v(Y) = \sum_{i=1}^{t} n_{i.}(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 \div \sum_{J=1}^{k} n_{.J}(Y_J - \overline{Y})^2$$

وبمـــا أن: $\overline{Y}_i = \sum_{J=1}^{k} n_{iJ} Y_J \Big/ n_{i.}$ و $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{J=1}^{k} n_{.J}\, Y_J$ إذن يمكن تبسيط العمل الحسابى بكتابة الصيغة (4. 13. 7a) فى الصورة التالية:

$$(4.\ 13.\ 7b): e_2^2 = \left[\sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{J=1}^{k} n_{iJ} Y_J \right)^2 \Big/ n_{i.} - \left(\sum_{J=1}^{k} n_{.J} Y_J \right)^2 \Big/ n \right]$$

$$\div \left[\sum_{J=1}^{k} n_{.J} Y_J^2 - \left(\sum_{J=1}^{k} n_{.J} Y_J \right)^2 \Big/ n \right]$$

مـــثال (4 ـ 13 ـ 1): احســـب نسبة ارتباط Y على X بين المتغيرين X و Y من الجـــدول التكراري التالي، حيث X تمثل عمر الرجل المتزوج و Y تمثل عدد ما عنده من أطفال بين سن 7 سنوات و 18 سنة.

Y \ X	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -	$\sum (n_{.J})$
1	4	7	2	2			15
2	2	12	8	7		1	30
3	1	5	15	9	7	3	40
4		1	12	11	10	6	40
$\sum (n_{i.})$	7	25	37	29	17	10	125

(الحل)

لحساب $\nu(Y)$ نضيف العمودين $n_{.J}\ Y_J$ و $n_{.J}\ Y_J^2$ للجدول السابق:

$n_{.J}\ Y_J$	$n_{.J}\ Y_J^2$
15	15
60	120
120	360
160	640
355	1135

ولحساب $v\left(\overline{Y}\,|\,x\right)$ نضيف الصفين التاليين:

$\left(\sum_{J=1}^{k} n_{iJ}\, Y_J\right)$	11	50	111	87	61	35
$\dfrac{\left(\sum_{J=1}^{k} n_{iJ}\, Y_J\right)^2}{n_{i.}}$	17.29	100	333	261	218.88	122.5

ومجموع الصف الأخير هو:

$$\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{J=1}^{k} n_{iJ} Y_J\right)^2 \Big/ n_{i.} = 1052.67$$

وبتطبيق العلاقة (4. 13. 7b) نجد أن مربع نسبة ارتباط Y على X هى:

$$e_2^2 = \frac{1052.67 - (355)^2/125}{1135 - (355)^2/125} = 0.35$$

إذن نسبة ارتباط Y على X هى:

$$e_2 = 0.592$$

وتؤخـذ بـدون إشارة إذ أن العلاقة بين X و Y ليست خط مستقيم لذلك ليس من الضـروري أن تكـون طـردية (موجبة) أو عكسية (سالبة) لجميع قيم X و Y فقد تكون طردية فى جزء من منحنى العلاقة بين المتغيرين وعكسية فى جزء آخر.

(4 – 13 – 3) معامل ارتباط الرتب Rank Correlation Coefficient:

لحسـاب معـامل ارتـباط بيرسـون بين ظاهرتين (أو متغيرين) لابد أن تكون الظاهـرتان مـن الـنوع المقيس أى القابل للقياس العددى مثل الطول والوزن ودرجات الحـرارة وغـير ذلـك. ولكن كثيراً ما نرغب فى قياس الارتباط بين ظواهر يصعب أو يسـتحيل قياسـها عدديـاً. ويمكن التغلب على هذه الصعوبة بترتيب مفردات العينة طبقاً لمؤشر معين وتحديد رقم عددى لكل مفردة فى العينة يعبر عن ترتيبها يسمى رتبة المفردة وذلـك بالنسـبة لكلا الظاهرتين المرغوب فى إيجاد الارتباط بينهما وهذا يسمح بإمكانية ترتيـب مفـردات العينة تصاعدياً (أو تنازليا) بالنسبة لكل ظاهرة من الظاهرتين. وبهذا يكـون لدينا مفردات عددها n (هى حجم العينة) مرتبة Ranked طبقاً لظاهرتين مختلفتين (أو خاصيتين مختلفتين) ونحاول قياس الارتباط بين هاتين الظاهرتين بدلالة رتبهما. فإذا

كانـــت رتب هذه المفردات طبقاً لإحدى الظاهرتين (أو المتغيرين) هى: $x_1, x_2, ..., x_n$ وطبقاً للظاهرة الأخرى (أو المتغير الآخر) هى: $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ فإن كلٍ من x_i و Y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ تمـــثل عـــدداً من الأعداد الطبيعية $1, 2, ..., n$. وعلى هذا يمكن قياس الارتـــباط بين الرتب واستخدامه كمقياس للارتباط بين الظاهرتين. وتنحصر المشكلة فى إيجاد معامل ارتباط بيرسون بين هذه الرتب طبقاً للعلاقة (3. 8. 18) أو (4. 2. 15)، ويسمى فـــى هـــذه الحالـــة بـــ "معامل ارتباط الرتب" ونرمز له بالرمز r_R تمييزاً له عن معامل الارتـــباط بين قيم الظاهرتين (وليست رتبهما) المسمى بـــ "معامل ارتباط بيرسون" والذى نرمـــز له فـــى العينة بالرمز r. أى أن المعامل المطلوب هو معامل ارتباط بيرسون بين أزواج الرتـــب: $(x_1, Y_1), ..., (x_n, Y_n)$ حيث كلٍ من (x_i, Y_i) تمثل زوج من الأعداد $1, 2, ..., n$. وبذلك نجد أن:

$$\sum x = \sum Y = n(n+1)/2$$

$$\sum x^2 = \sum Y^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum (x-\overline{x})(Y-\overline{Y}) = \tfrac{1}{12}\left[(n^3-n) - 6\sum_i (x_i - Y_i)^2\right]$$

$$\sum (x-\overline{x})^2 = \sum (Y-\overline{Y})^2 = (n^3-n)/12$$

وبتطبـــيق العلاقـــة (3. 8. 18) أو (4. 2. 15) نجـــد أن معـــامل ارتباط الرتب بين الظاهرتين يأخذ الصورة:

$$(4.\ 13.\ 8):\ r_R = 1 - 6\sum_i d_i^2 \Big/ (n^3 - n)$$

حيث: $\sum_i d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - Y_i)^2$

ونلفت نظر القارئ أنه عند تساوى مجموعة من الرتب (لأى من المتغيرين) نعطى لكـــل رتـــبة رقمـــاً كما لو كانت هذه الرتب غير متساوية ثم نعتبر الوسط الحسابى لهذه الأرقـــام بمثابة رتبة موحدة لهذه الرتب المتساوية. فمثلاً إذا كانت $x_1 = x_2 = x_3 = 5$ فنعتبر أن $x_1 = 5$ ، $x_2 = 6$ ، $x_3 = 7$ ثم نحدد رتبة موحدة هى $(5+6+7)/3 = 6$ بحيث نضع $x_1 = x_2 = x_3 = 6$.

(4 ـ 13 ـ 4) معامل الارتباط داخل فئة Intra-class Correlation Coefficient :

فـــى كثير من الأحيان ــ خاصة فى الدراسات البيولوجية ــ يكون مطلوب تقدير معـــامل الارتـــباط بين مفردات من عائلة واحدة (أو فئة واحدة). فقد يكون مطلوب تقدير معامل الارتباط بين متغيرين (X,Y) ينتميان إلى فئة معينة مثل إيجاد الارتباط بين طول الأخوة بناء على بيانات مأخوذة من n أسرة، فى كل منها عدد من الأبناء (الأخوة). فإذا رمـــزنا لطول الفرد (الأخ داخل الأسرة) رقم s فى العائلة رقم i بالرمز X_{si}، إذن لتقدير الارتـــباط بيـــن طول الأخوة نحتاج إلى تكوين أزواج من القيم (X_{vi},X_{si}) حيث X_{vi} تمـــثل المفردة الأولى و X_{si} تمثل المفردة الثانية فى الزوج (X_{vi},X_{si}). وطبعاً لابد من الاتفـــاق على مبدأ معين لتحديد المفردة التى نعتبرها أولى والمفردة التى نعتبرها ثانية فى كل زوج. فلو اعتبرنا أن المفردة الأولى هى الأخ الأكبر والثانية الأخ التالى له فى العمر لكان معامل الارتباط المحسوب هو معامل للارتباط بين طول الأخ الأكبر والأخ التالى له فى العمر. وإذا اعتبرنا أن المفردة الأولى هى الأخ الأطول والثانية هى الأخ التالى له فى الطـــول لكـــان معامل الارتباط الناتج هو معامل للارتباط بين طول الأخ الأطول والأخ التالى له فى الطول، وهكذا. ولما كان المهم هو إيجاد معامل الارتباط بين أطوال الأخوة بصفة عامة، أى مع عدم تحديد المفردة الأولى والثانية على أساس العمر أو الطول وإنما على أساس القرابة فقط، لذلك لابد أن نأخذ كل مفردة (أى كل ابن من أبناء الأسرة) مرة كمفردة أولى ومرة أخرى كمفردة ثانية. فلو كانت الأسرة ــ أو بصفة عامة الفئة ــ رقم i لديها k_i من الأبناء أطوالهم كما يلى:

$$(4.13.9):\ (X_{i1},X_{i2},...,X_{ik_i})\ ;\quad i=1,2,...,n\,.$$

فيمكن تكوين جدول ارتباط يمثل أزواج من القيم بحيث أن كل مفردة من مفردات الأســـرة (i) أو الفـــئة (i) تظهر فى الجدول (k_i-1) مرة كمفردة أولى و (k_i-1) مرة كمفـــردة ثانية، وبذلك يكون لدينا $k_i(k_i-1)$ زوج من القيم من بيانات الأسرة رقم (i). وإذا وجدنـــا مفردتين متساويتين (لهما نفس القيمة) داخل الأسرة فإن الزوج المكون منهما يظهر فى الجدول مرتين. ومن الواضح أن عدد أزواج القيم فى جدول الارتباط كله (لكل الأســـر) يســـاوى: $N=\sum_{i=1}^{n}k_i(k_i-1)$ زوجاً من القيم، ومن هذه الأزواج يتم حساب معـــامل ارتـــباط "بيرســـون" العادى، فيكون هو "معامل الارتباط بين طول الأخوة" أى "معـــامل الارتباط داخل الفئة". وسنرمز لمعامل الارتباط داخل الفئة فى العينة بالرمز r_i وفى المجتمع بالرمز ρ_i تمييزاً له عن معامل ارتباط "بيرسون" الذى نرمز له فى العينة بالرمـــز r وفـــى المجـــتمع بالرمـــز ρ. وهـــنا (i) تشـــير إلـــى أول حرف فى كلمة

"Intra – class". ويمكن استخدام البيانات (4. 13. 9) مباشرة فى حساب r_i دون الحاجة إلى تكوين جدول ارتباط من أزواج القيم وذلك كما يلى:

ذكرنا أنه عند تكوين جدول ارتباط نكون أولا أزواج من القيم:

$$(4.\ 13.\ 10):\ (x_{vi}, x_{si})\ ;\ v \neq s\ ,\ v, s = 1, 2, ..., k_i\ ,\ i = 1, 2, ..., n\ .$$

وعدد أزواج القيم يساوى N حيث:

$$(4.\ 13.\ 11):\ N = \sum_{i=1}^{n} k_i (k_i - 1)\ .$$

فلو اعتبرنا قيم المفردة الأولى فى كل زوج تمثل قيم متغير عشوائى نرمز له بالرمز $x^{(1)}$ وقيم المفردة الثانية تمثل قيم متغير عشوائى $x^{(2)}$ فإن جدول الارتباط يحتوى على N قيمة للمتغير الثنائى $\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$، ويكون "معامل الارتباط داخل الفئة" المحسوب من هذه القيم هو نفسه "معامل ارتباط بيرسون" المعطى بالعلاقة:

$$(4.\ 13.\ 11'):\ r_i = r = \frac{Cov\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)}{\sqrt{V\left(x^{(1)}\right) \cdot V\left(x^{(2)}\right)}} = S_{12} \Big/ \sqrt{S_{11}\, S_{22}}$$

حيث S_{12} هو تغاير $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ المقدر من بيانات العينة و S_{11}^2 تباين العينة للمتغير $x^{(1)}$ و S_{22}^2 تباين العينة للمتغير $x^{(2)}$. ومن الواضح أن قيم المتغير $x^{(1)}$ هى نفسها قيم المتغير $x^{(2)}$. إذن متوسط $x^{(1)}$ يساوى متوسط $x^{(2)}$ وتباين $x^{(1)}$ يساوى تباين $x^{(2)}$، أى أن:

$$(4.\ 13.\ 12):\ E\left(x^{(1)}\right) = E\left(x^{(2)}\right) = \overline{x}$$

$$V\left(x^{(1)}\right) = V\left(x^{(2)}\right) = S_{11}^2 = S_{22}^2 = S^2$$

وبالتالى فإن:

$$(4.\ 13.\ 13):\ r_i = Cov\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) \Big/ S^2\ .$$

كما أن عدد قيم $x^{(1)}$ تساوى عدد قيم $x^{(2)}$ تساوى عدد أزواج القيم أى تساوى N. وحيث أن كل مفردة من مفردات الأسرة (i) تظهر كمفردة أولى $(k_i - 1)$ مرة وكمفردة ثانية $(k_i - 1)$ مرة أيضا إذن توقع كل من $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ هو:

$$(4.\ 13.\ 14):\ \overline{x} = E\left(x^{(1)}\right) = E\left(x^{(2)}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1) \sum_{J=1}^{k_i} x_{Ji}\ .$$

وتباين كل من $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ هو:

$$(4.13.15):\ S^2 = V\left(x^{(1)}\right) = V\left(x^{(2)}\right) = \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})^2 \cdot$$

وتغاير $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ هو:

$$(4.13.16):\ Cov\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) = S_{12} = \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{J,s=1\\ J\neq s}}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})(x_{si} - \overline{x})$$

$$= \tfrac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})\right]^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})^2\right\}$$

$$= \tfrac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i^2(\overline{x}_i - \overline{x})^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})^2\right\}$$

حيث $\overline{x}_i$ هو متوسط مفردات الأسرة (i):

$$(4.13.17):\ \overline{x}_i = \frac{1}{k_i}\sum_{J=1}^{k_i} x_{Ji}$$

إذن معامل الارتباط داخل الفئة هو:

$$(4.13.18):\ r_i = Cov\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)\big/ s^2$$

$$= \tfrac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i^2(\overline{x}_i - \overline{x})^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})^2\right\}$$

$$\div \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)\sum_{J=1}^{k_i}(x_{Ji} - \overline{x})^2$$

فـإذا كانـت أعـداد المفردات داخل الفئات ــ أى أعداد الأخوة داخل الأسر ــ متساوية فإن $k_i = k$ لجميع قيم i والعلاقة (4.13.18) يمكن تبسيطها فى الصورة التالية:

$$(4.13.19):\ r_i = \frac{k^2\, n S_{\overline{x}}^2 - k\, n\, S_x^2}{(k-1)k\, n\, S_x^2} = \frac{1}{(k-1)}\left[k S_{\overline{x}}^2 / S_x^2 - 1\right]$$

حيـــث: $S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i - \bar{x})^2$ هـــى تبايـــن متوســـطات الفـــئات و:

$S_x^2 = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{k}(x_{Ji} - \bar{x})^2$ هى $V(x^{(i)})$ ، $i = 1, 2$.

ملاحظة (4 – 13 – 4): بالنظر إلى الصيغة (4. 13. 19) يتضح أن r_i لا يمكن أن يقل عن $\left(\frac{-1}{k-1}\right)$ بالرغم من أنه يصل إلى $(+1)$ عندما $S_x^2 = S_{\bar{x}}^2$. وهذا يدل على أن معـــامل الارتـــباط ρ_i فـــى المجتمع (أو r_i فى العينة) يمكن اعتباره ملتو أى لا يحقق الخصائص القياسية فى معاملات الارتباط وهى أن يصل إلى (-1) كحد أدنى و $(+1)$ كحـــد أعلـــى ومعنى هذا أن القيمة السالبة للمعامل ρ_i (أو r_i) ليس لها نفس الدلالة المكافـــئة للقيمة الموجبة المساوية لها عددياً فى الاتجاه المضاد. لهذا لابد من مراعاة ذلك عند التعامل مع هذا المعامل.

وسنقدم المثال البسيط التالى لمجرد توضيح طريقة حساب r_i.

مـــثال (4 – 13 – 4): نفرض أن لدينا 4 أسر كل أسرة بها 3 أولاد وكانت أطوال الأولاد داخل الأسر كما يلى:

$$(167, 168, 168)\ ;\ (170, 171, 172)\ ;\ (173, 170, 170)\ ;\ (171, 172, 172)\cdot$$

أوجد معامل الارتباط بين طول الأخوة (r_i).

(الحل)

بطرح وسط فرضى (170) من كل القيم نجد أن قيم المتغيرات تصبح كما يلى:

$$(-3, -2, -2)\ ;\ (0, 1, 2)\ ;\ (3, 0, 0)\ ;\ (1, 1, 2)\cdot$$

ومن (4. 13. 14):

$$\bar{x} = \frac{(k-1)}{N}\left[\sum_{iJ} x_{iJ}\right]$$

حيث

$$k = 3\ ,\ n = 4\ ,\ N = nk(k-1) = 24$$
$$\bar{x} = \tfrac{1}{12}[-3-2-2+1+\cdots+2] = \tfrac{1}{4}$$

ومن (4. 13. 15):

$$S^2 = \frac{(k-1)}{N}\sum_{i=1}^{4}\sum_{J=1}^{3}(x_{Ji} - \bar{x})^2 = \tfrac{1}{12}\sum_{1}^{4}\sum_{1}^{3}x_{Ji}^2 - \bar{x}^2$$
$$= \tfrac{1}{12}\left[(-3)^2 + \cdots + (2)^2\right] - \tfrac{1}{16} = 3.020833\dot{3}$$

ومتوسطات الأسر هى:

$$\overline{x}_i : -\tfrac{7}{3}, \tfrac{3}{3}, \tfrac{3}{3}, \tfrac{4}{3}.$$

وانحرافاتها عن $\overline{x}$ هى:

$$(\overline{x}_i - \overline{x}) : -\tfrac{31}{12}, \tfrac{9}{12}, \tfrac{9}{12}, \tfrac{13}{12}.$$

$$S_{\overline{x}}^2 = \tfrac{1}{4}\left[\left(-\tfrac{31}{12}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{13}{12}\right)^2\right] = 2.243055\dot{5}$$

ومن (4. 18. 19):

$$r_i = \tfrac{1}{2}\left[\frac{3 \times 2.243055\dot{5}}{3.020833\dot{3}} - 1\right] = 0.613793103$$

ويمكن حل هذا المثال بتكوين جدول ارتباط من أزواج القيم التى يمكن تكوينها من أطـــوال كل أسرة. فمثلاً بالنسبة للأسرة الأولى إذا أخذنا كل مفردة كمفردة أولى، ستكون بالطبع كل مفردة أخرى مفردة ثانية، ويمكن تكوين الأزواج التالية:

$$(167,168), (167,168); (168,167), (168,168); (168,167), (168,168).$$

عدد الأزواج للأسرة الأولى هو $k(k-1) = 3 \times 2 = 6$ والمفردتان المتساويتان والتى قيمة كل منها 168 مكون منهما زوجان من القيم. وباستكمال باقى الأزواج من باقى الأسر وتفريغ البيانات فى جدول (ارتباط) مزدوج نحصل على الجدول التالى:

x_i	Y_j:	-3	-2	0	1	2	3	
	Y \ Y	167	168	170	171	172	173	$\sum = n_{x.}$
-3	167	—	2	—	—	—	—	2
-2	168	2	2	—	—	—	—	4
0	170	—	—	2	1	1	2	6
1	171	—	—	1	2	3	—	6
2	172	—	—	1	3	—	—	4
3	173	—	—	2	—	—	—	2
	$\sum = n_{.y}$	2	4	6	6	4	2	N = 24

والجـــدول السابق ما هو إلا جدول ارتباط عادى لكنه متماثل حول قطره الرئيسى ولابد أن يكون كذلك لأن كل مفردة تدخل مرة كمفردة أولى ومرة أخرى كمفردة ثانية فى أزواج المفـــردات التى يضمها الجدول. لذلك يمكن حساب معامل ارتباط بيرسون العادى مـــن هـــذا الجـــدول طبقاً للعلاقة (5 .13 .4) التى يمكن وضعها فى الصورة التالية نظراً للجدول التكرارى المزدوج وهو من الناحية الرمزية مماثل تماماً لجدول (4 ـ 13 ـ 1):

$$(4.\ 13.\ 20):\ r = \frac{N\sum\sum x_i\ Y_J\ n_{iJ} - \left(\sum x_i n_i\right)\left(\sum Y_J\ n_J\right)}{\sqrt{\left[N\sum x_i^2\ n_i - \left(\sum x_i\ n_i\right)^2\right]\left[N\sum Y_J^2\ n_J - \left(\sum Y_J\ n_J\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{24(46) - 6\times 6}{\sqrt{[24(74) - 6^2][24(74) - 6^2]}} = \frac{1068}{1740} = 0.613793103$$

وهى نفس النتيجة السابقة.

(4 ـ 13 ـ 5) معامل الارتباط رباعى النسق [جدول الارتباط (2×2)]:

Tetrachoric Correlation Coefficient [Correlation Table (2×2)]:

أحـــياناً يكـــون لدينا بيانات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ثنائى (X, Y) له توزيـــع معروف أو يمكن التكهن به وأحياناً لا يمكن معرفة توزيع المجتمع. سنتناول الآن الحالـــة التى يكون من الصعب فيها معرفة توزيع المجتمع والتى تكون فيها بيانات العينة مـــبوبة فـــى جـــدول (2×2) ذو أربعة خانات داخلية فقط. أما الحالة التى يكون توزيع المجتمع معلوم سنتناولها بعد ذلك عندما يكون المجتمع له توزيع معتاد ثنائى.

نفـــرض أن بيانات العينة مفرغة فى جدول (2×2) وكل ما نعرفه عن المجتمع الثـــنائى المسحوب منه هذه العينة ــ أى المجتمع (X, Y) ــ هى أن كلٍ من المتغيرين يأخذ إحدى قيمتين 0 أو 1 أو أننا نفترض ذلك تمشياً مع تصنيف بيانات العينة فى الجدول (2×2). وحتى فى مثل هذه الحالات الحدية عندما توجد قيمتان ممكنتان فقط (مثل 0،1) لكل متغير، يمكن الحصول نظرياً على قيمة لمعامل ارتباط بيرسون للعلاقة بين المتغيرين تكون مقبولة إلى حدٍ ما من الناحية النظرية. فمن الطبيعى لو كانت بيانات العينة التى لدينا بيانات تفصيلية موضحاً فيها القيمة العددية لكل مفردة من مفردات العينة لكان من السهل الحصـــول علـــى معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين حيث يكون من السهل حساب كل الكمـــيات الداخلة فى حساب معامل الارتباط r مثل تباينى العينة للمتغيران X وY وكذلك الـــتغاير بينهما. ولكن وجود بيانات العينة مدمجة فى جدول (2×2) يجعل من الصعب حســـاب تبايـــن العيـــنة لكل من X وY وكذلك تغايرهما. ومعامل الارتباط المحسوب من جـــدول (2×2) يســـمى "معـــامل الارتباط رباعى النسق" نسبة إلى أن البيانات المتاحة

مدمجة فى أربعة أقسام فقط ونرمز له بالرمز r_t فى العينة و ρ_t فى المجتمع حيث t هو الحـرف الأول مـن كلمـة tetrachoric أى رباعى النسق. فإذا كان لدينا عينة حجمها n مسـحوبة مـن مجـتمع ثـنائى (X, Y) ولـم تكـن بيانات العينة مفصلة فى الصورة $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ وإنما كانت مدمجة فى شكل جدول (2×2) على النحو التالى:

جدول (4 ــ 13 ــ 5 أ)

Y \ X	$x_1\ (=0)$	$x_2\ (=1)$	$\sum$
$Y_1\ (=0)$	a_1	b_1	a_1+b_1
$Y_2\ (=1)$	a_2	b_2	a_2+b_2
$\sum$	a_1+a_2	b_1+b_2	N

$$n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

ونحـاول مـن الجدول السابق تقدير ρ_t فى المجتمع وذلك بحساب الإحصاء أو معامل الارتباط r_t فى العينة. لذلك نفترض أن المتغير X فى المجتمع يأخذ إحدى قيمتين (0) أو (1) وكذلك Y يأخذ إحدى القيمتين 0 أو 1. فإذا كانت p_1 هى النسبة الحقيقية للقيم $X=1$ فـى المجـتمع و $(1-p_1)$ هـى النسبة الحقيقية للقيم $X=0$ و p_2 هى النسبة الحقيقية للقيم $Y=1$ و $(1-p_2)$ هى النسبة الحقيقية للقيم $Y=0$ فى المجتمع المسحوب مـنه العينة، والنسبة الحقيقية فى المجتمع للمفردات التى فيها $X=i$ و $Y=J$ هى p_{iJ} حيث $i, J = 0, 1$. إذن كل من المتغيرين X وY فى المجتمع يكون لهما توزيع برنوللى، أنظـر بـند (2 ــ 23 ــ 1 ب) وأنظـر كذلـك التوزيع ذو النقطتين فى الباب السابع بند (7 ــ 2) وكذلك تعريف (7 ــ 2 ــ 1 ب) ــ إذن:

$$(4.13.21):\ E(X) = p_1\ ,\ v(X) = p_1(1-p_1)$$

$$E(Y) = p_2\ ,\ v(Y) = p_2(1-p_2)$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X\,Y) - p_1\,p_2 = p_{11} - p_1\,p_2$$

وبذلك يكون معامل ارتباط بيرسون فى المجتمع بين X وY هو:

$$(4.13.22):\ \rho_t = \frac{p_{11} - p_1\,p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)\cdot p_2(1-p_2)}}$$

وعـند سـحب عيـنة عشـوائية مـن هذا المجتمع تكون بياناتها كبيانات جدول (4 ـ 13 ـ 5 أ) السـابق ونحسب معامل الارتباط r_t بنفس طريقة حساب معامل ارتباط المجـتمع ρ_t حيث يمكن استخدام الكمية $(b_1+b_2)/n$ بدلاً من p_1 و $(a_2+b_2)/n$ بـدلاً من p_2 و b_2/n بدلاً من p_{11} وبالتالى فإن معامل الارتباط r_t الذى نحسبه للعينة ونعتبره تقدير لمعامل ارتباط المجتمع ρ_t يكون فى الصورة التالية:

$$(4.\ 13.\ 23a):\ r_t = \frac{\left[\frac{b_2}{n} - \left(\frac{b_1+b_2}{n}\right)\left(\frac{a_2+b_2}{n}\right)\right]}{\sqrt{\left(\frac{b_1+b_2}{n}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{n}\right)\cdot\left(\frac{a_2+b_2}{n}\right)\left(\frac{a_1+b_1}{n}\right)}}$$

حيث $n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ إذن:

$$(4.\ 13.\ 23b):\ r_t = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\sqrt{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(a_1+b_1)(a_2+b_2)}}$$

حيـث a_1, a_2, b_1, b_2 هـى بيانات جدول (4 ـ 13 ـ 5 أ). والصيغة السابقة لن تعطـى إشارة (+ أو −) ذات دلالة لمعامل الارتباط r_t إلا إذا كانت القيم كما فى جدول (4 ـ 13 ـ 5 أ) السـابق حيث $x_2 > x_1$ وكذلك $Y_2 > Y_1$ أو العكس $x_2 < x_1$ وكذلك $Y_2 < Y_1$ ولكـن إذا عكسـنا قـيم أحد المتغيرين فقط دون الآخر فهذا يؤدى إلى تغيير إشارة r_t.

(4 ـ 13 ـ 6) معامل الارتباط ثنائى التسلسل ذات النقطة:

Point – biserial Correlation Coefficient:

قد تكون بيانات العينة التى نقدر منها معامل ارتباط المجتمع ليست مفصلة تفصيلاً كاملاً ولكنها أكثر تفصيلاً من الحالة السابقة ـ حالة جدول (2×2) ـ فقد تكون البيانات مدمجـة بالنسبة لمتغير واحد ولكنها مفصلة إلى حد ما بالنسبة للمتغير الآخر. فإذا رمزنا للمجـتمع الثنائى المسحوب منه العينة بالرمز (X, Y) وكانت بيانات العينة المتاحة لدينا مدمجـة بالنسبة للمتغير Y فى شكل فئتين اثنتين فقط لكنها مفصلة بالنسبة للمتغير X فى فـئات عددهـا t فـئة فإننا نقول أن البيانات مقسمة ثنائياً Dichotomy بالنسبة للمتغير Y ولكـنهـا مقسـمة تقسـيم مـتعدد بالنسبة للمتغير X وهذه الحالة نطلـق عليهـا حالة الجـدول $(2\times t)$.

لنفــترض أن Y متغــيراً يأخذ إحدى قيمتين اثنتين فقط (وقد تكون إحدى صفتين) يمكــن اعتــبار أن هاتين القيمتين هما 0 أو 1. ولنفترض أن بيانات المتغير X في العينة مفصلة تفصيلاً يكفي لتقدير توقعه $E(X)$ وتباينه $V(X)$ وتغايره مع Y، $Cov(X, Y)$. فــإذا كانت قيم X في العينة هي: $X : x_1, x_2, ..., x_t$ وقيم Y هي: $Y : Y_1, Y_2$ فإن بيانات العينة تمثل سلسلتين من أزواج القيم هي:

$$(Y_1, x_1), ..., (Y_1, x_t)$$

$$(Y_2, x_1), ..., (Y_2, x_t)$$

لذلك فإن معامل الارتباط بين X و Y يسمى معامل الارتباط ثنائي التسلسل وحيث أن Y تــأخذ إحدى قيمتين أو إحدى نقطتين هما 0 أو 1 لذلك نطلق على معامل الارتباط للبــيانات الســابقة اسم "معامل الارتباط ثنائي التسلسل ذو النقطة". ونرمز له في المجتمع بالرمــز ρ_{pb} وفــي العينة بالرمز r_{pb} والحرفان p، b هما الحرفان الأولان في كلمتي (Point – biserial). فــإذا رمــزنا لنسبة قيم Y التي تساوي الواحد في المجتمع بالرمز p، تكــون نسبة قيمها التي تساوي الصفر هي $(1 - p)$، ويكون المتغير Y في المجتمع في هــذه الحالــة لــه توزيــع "بــرنوللي" ـــ كمــا أشــرنا إلى ذلك في الحالة السابقة بند (4 ـــ 13 ـــ 5) ـــ حيث:

$$(4.\ 13.\ 24):\ E(Y) = p\ \ ,\ \ V(Y) = \sigma_Y^2 = p(1 - p)$$

ويكــون معامل الارتباط ρ في المجتمع بين المتغيــرين X و Y طبقــاً للعلاقــة (4. 13. 5) هو:

$$(4.\ 13.\ 25):\ \rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y} = [E(X\,Y) - E(X)E(Y)]/\sigma_X\ \sigma_Y$$

$$= [E(X\,Y) - pE(X)]/\sigma_X \sqrt{p(1 - p)}$$

فلــو رمزنا لعدد القيم في المجتمع التي فيها Y تساوي 1 بالرمز β_1 وعددها في العيــنة بالرمــز b_1 ورمــزنا لعدد القيم في المجتمع التي فيها Y تساوي 0 بالرمز β_2 وعددهــا فــي العيــنة بالرمز b_2 والعدد الكلي لقيم Y في العينة بالرمز $n = b_1 + b_2$ فيمكن تقدير القيم المجهولة في العلاقة (4. 13. 25) كما يلي:

نقــدر $E(X)$ باستخدام متوسط قيم X في العينة وهو $\bar{x}$ كما نقدر σ_X للمجتمع باستخدام الانحراف المعياري لقيم X في العينة وهو S_x ونقدر النسبة p باستخدام النسبة المقابلة لها في العينة وهي:

$$(4.13.26): \begin{cases} \hat{P} = p = \frac{b_1}{n} \\ (1-\hat{p}) = 1 - p = \frac{b_2}{n} \\ E(X) = \overline{x} \quad , \quad V(X) = \sigma_x = S_x \end{cases}$$

(حيث العلامة (^) تشير إلى التقدير)

كما يمكن تقدير $E(X\,Y)$ من بيانات العينة باستخدام العلاقة:

$$(4.13.27): \hat{E}(X\,Y) = \tfrac{1}{n}\sum_x\sum_y x\,y$$

وحيث أن Y تأخذ القيمتين 0 أو 1 فإن كل حدود الطرف الأيمن فى العلاقة السابقة التى فيها $Y = 0$ تختفى وكل الحدود التى فيها $Y = 1$ تساوى $x \cdot 1 = x$ مع الأخذ فى الاعتـــبار أن $Y = 1$ فى الفئة b_1 وتساوى الصفر فى الفئة b_2 إذن العلاقة (4.13.27) تأخذ الصورة التالية:

$$(4.13.28): \hat{E}(X\,Y) = \tfrac{1}{n}\sum_{i \cdot Y \in b_1} x_i = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{b_1} x_i = \tfrac{1}{n} b_1\,\overline{x}_1$$

حيـــث $\overline{x}_1$ هو متوسط x فى العينة فى الفئة b_1. وبالتعويض عن (4.13.26, 28) فى العلاقة (4.13.25) نجد أن:

$$(4.13.29): \hat{\rho}_{pb} = r_{pb} = \frac{(b_1\overline{x}_1/n) - p\,\overline{x}}{S_x\sqrt{p\,q}}$$

حيث: $p = b_1/n \;\; , \;\; q = b_2/n$.

ولكن $\overline{x}$ هى الوسط المرجح للوسطين $\overline{x}_1$ فى الفئة b_1 و $\overline{x}_2$ فى الفئة b_2 أى أن:

$$\overline{x} = (b_1\overline{x}_1 + b_2\overline{x}_2)/n$$

وبالـــتعويض عـــن ذلك فى (4.13.29) نجد أن معامل الارتباط ثنائى التسلسل ذو النقطة للمتغيرين X و Y المحسوب من العينة هو:

$$(4.13.30): \hat{\rho}_{pb} = r_{pb} = (\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\sqrt{p\,q}/S_x$$

حيث S_x هو الانحراف المعياري لقيم x في العينة و $\overline{x}_1$ هو متوسط x في الفئة b_1 و $\overline{x}_2$ هو متوسطها في b_2 و $p = b_1/n$ و $q = b_2/n$. حيث b_1 هي عدد القيم الثنائية (X, Y) التي فيها $Y = 1$ و b_2 عدد القيم (X, Y) التي فيها $Y = 0$ كما سبق أن ذكرنا و r_{pb} يسمى معامل الارتباط ثنائي التسلسل ذات النقطة فهو ثنائي التسلسل نسبة لأن بيانات العينة تمثل سلسلتين من أزواج القيم كما أنه ذات نقطة نسبة لأن المتغير Y يأخذ إحدى قيمتين أو نقطتين هما $Y = 0$ أو $Y = 1$.

مثال (4 – 13 – 6 أ):

في اختبارات القبول لإحدى الكليات العسكرية تقدم 6175 طالب وكانت نتيجة الاختبارات كما يلي:

Age of Candidate عمر المتقدم x_i	Successful ناجح $c_{1i} : Y \in b_1$	Failed راسب $c_{2i} : Y \in b_2$	Total المجموع c_i
17	580	550	1130
18	700	990	1690
19	500	880	1380
20	325	800	1125
21	250	400	650
22	50	150	200
Σ	2405	3770	6175

والمطلوب تقدير معامل الارتباط بين العمر والنجاح في الاختبارات (r_{pb}).

(الحل)

نأخذ العدد "1" للمتقدم الناجح والعدد "0" للمتقدم الراسب ونرمز للعمر بالرمز x إذن:

$$\overline{x}_1 = \sum_{i:Y\in b_1} x_i\, c_{1i} \Big/ \sum c_{1i} = \frac{44810}{2405} = 18.632$$

$$\overline{x}_2 = \sum_{i:Y\in b_2} x_i\, c_{2i} \Big/ \sum_i c_{2i} = \frac{71590}{3770} = 18.9894$$

$$n = 6175\ ,\ n_1 = 2405\ ,\ n_2 = 3770$$

$$\overline{x} = \left(n_1\,\overline{x}_1 + n_2\,\overline{x}_2\right)/n = 18.8502$$

$$S_x^2 = \tfrac{1}{n}\sum c_i\, x_i^2 - \overline{x}^2 = 1.878$$

$$S_x = 1.37$$

$$p = \frac{2405}{6175} = 0.3895$$

إذن من (4. 13. 30)

$$r_{pb} = \frac{(18.632 - 18.9894)\sqrt{0.3895 \times 0.6105}}{1.37} = -0.127$$

أى أن معامل الارتباط بين العمر والنجاح فى الاختبارات صغير.

(4 ـ 13 ـ 7) الاقتران فى جداول (2×2) :

Association in (2×2) Tables:

فى المتغيرات الوصفية قد نهتم بوجود (presence) أو عدم وجود (absence) صفة (attribute) معينة أو أكثر فى مجتمع ما أو فى مجموعة من المفردات. وحصر عدد المفردات التى تتصف (أو لا تتصف) بهذه الصفة هو ما نطلق عليه "إحصاءات الصفات". ويمكن تصنيف المجتمع إلى فئتين متميزتين طبقاً لكل صفة، أحدهما الفئة التى تتكون من المفردات التى تتصف بهذه الصفة والفئة الثانية تتكون من المفردات التى لا تتصف بها. وهذا هو أبسط أنواع التصنيف ويسمى تصنيفاً (أو تقسيماً) ثنائياً "Dichotomy"، أما فى حالة تقسيم المجتمع إلى أكثر من فئتين يكون التصنيف متعدداً "Manifold". وهذا يحدث عند تقسيم المجتمع إلى s فئة $A_1,\ldots,A_s$ ثم تقسيم كل فئة من فئات A إلى t فئة $B_1,\ldots,B_t$ ثم تقسيم كل فئة من فئات B إلى m فئة وهكذا. وعادة نرمز للصفات بالحروف اللاتينية الكبيرة $A, B, C,\ldots$ فالمفردة التى تتصف بالصفة A ــ أو التى توجد بها الصفة A ــ نرمز لها بالرمز A والفئة (أو المجموعة) التى تتكون من كل المفردات

التى تتصف بالصفة A تسمى بـــ "الفئة A" "Class A" والمفردة التى لا تتصف بالصفة A ــ أو الــتى لا توجــد بها الصفة A ــ نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ والفئة التى تنتمى إليها هى الفئة "$\overline{A}$". كما نستخدم الرمز $A\,B$ للإشارة إلى المفردة التى توجد بها الصفتان A و B معـــا وكذلـــك $A\,\overline{B}$ تشـــير إلى المفردة التى توجد بها الصفة A ولا توجد بها الصفة B وهكذا. ونستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة المحصورة داخل العلامة « » أى الأحرف «a», «b», «c»,... للدلالة على عدد المفردات التى تتصف بالصفات $A, B, C,\ldots$ على الترتيب، فمثلا «a» هى عدد المفردات التى تتصف بالصفة A أو التى تنتمى للفئة A و «$\bar{a}$ b» عـــدد المفردات التى تنتمى للفئة $\overline{A}\,B$، وهكذا. وسنتناول الآن حالة مجتمع عدد مفرداته N ومصنف طبقاً لصفتين A و B حسب وجود أو عدم وجود كل صفة حيث يمكن تقسـيم هـــذا المجتمع إلى 4 فئات يمكن تمثيلها بجدول مكون من صفين وعمودين يسمى جدول (2×2) فيأخذ الشكل التالى:

جدول (4 ــ 13 ــ 7 أ)

الصفة Attribute	B	$\overline{B}$	Total
A	«a b»	«a $\bar{b}$»	«a»
$\overline{A}$	«$\bar{a}$ b»	«$\bar{a}$ $\bar{b}$»	«$\bar{a}$»
Total	«b»	«$\bar{b}$»	N

N = «a» + «$\bar{a}$» = «b» + «$\bar{b}$»

وأحيانا نكتب الجدول السابق فى الصورة التالية:

جدول (4 ــ 13 ــ 7 ب)

الصفة Attribute	B	$\overline{B}$	Σ
A	a_1	b_1	$a_1 + b_1$
$\overline{A}$	a_2	b_2	$a_2 + b_2$
Σ	$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	N

$$N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

عند استقلال الصفتين A و B نتوقع أن تكون نسبة المفردات التى توجد بها الصفة A داخل الفئة B تساوى نسبة المفردات التى توجد بها A داخل الفئة $\overline{B}$ كما تساوى أيضاً نسبة المفردات التى توجد بها A فى المجتمع كله أى أن:

$$(4.\ 13.\ 31):\ \frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{b_1}{b_1+b_2}=\frac{a_1+b_1}{N}$$

وبالمثل:

$$(4.\ 13.\ 32):\ \begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1+a_2}=\dfrac{b_2}{b_1+b_2}=\dfrac{a_2+b_2}{N}\\[2mm]\dfrac{a_1}{a_1+b_1}=\dfrac{a_2}{a_2+b_2}=\dfrac{a_1+a_2}{N}\\[2mm]\dfrac{b_1}{a_1+b_1}=\dfrac{b_2}{a_2+b_2}=\dfrac{b_1+b_2}{N}\end{cases}$$

من العلاقة (4. 13. 31) نجد أن:

$$(4.\ 13.\ 33):\ a_1=(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N$$

العلاقـــة السابقة تم اشتقاقها بناء على افتراض استقلال الصفتين A و B فإذا وجدنا فى جدول ما أن:

$$(4.\ 13.\ 34):\ a_1>(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N$$

كـــان معنى ذلك أن نسبة المفردات التى توجد بها الصفة A فى الفئة B أكبر من تلك النسبة فى المجتمع وبالتالى أكبر من تلك النسبة فى الفئة $\overline{B}$ وفى هذه الحالة نقول أن الصـــفتان A و B "مقترنـــتان اقـــتران موجب" "Positively Associated" أو بلفظ مختصر "مقترنتان" "Associated" وبالعكس إذا كانت:

$$(4.\ 13.\ 35):\ a_1<(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N$$

نقول أن الصفتان A و B "مقترنتان اقتران سالب" Negatively Associated أو بلفظ مختصر "غير مقترنتان" Disassociated.

مـــن العلاقـــة (4. 13. 33) نـــرى أن الكمية $(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N$ هى عدد المرات (التكرارات) المتوقع لاقتران (أى تلازم) الصفتين A و B فى حالة استقلالهما، فإذا كـــان عدد المرات الفعلى بالجدول (2×2) لتلازم الصفتين A و B ــ وهو العدد a_1 ــ

أكبر من العدد المتوقع كما فى العلاقة (4. 13. 34) قلنا بوجود "اقتران موجب" أو اختصاراً بوجود "اقتران" وعلى العكس من ذلك إذا كان العدد الفعلى a_1 أقل من العدد المتوقع كما فـــى العلاقة (4. 13. 35) قلنا بوجود "اقتران سالب" أو اختصاراً "عدم وجود اقتران". لذلك يمكــن اســتخدام الفرق بين العدد الفعلى a_1 لتلازم الصفتين A وB وبين العدد المتوقع $(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N$ كمؤشـــر لقياس شدة الاقتران بين الصفتين A وB. وعلى هذا يمكــن قــياس الاقــتران بمقارنة التكرارات الفعلية المشاهدة فى الجدول (2×2) وهى a_1, a_2, b_1, b_2 بالــتكرارات المتوقعة المناظرة لها التى نتوقع أننا كنا سنحصل عليها لو كانت الصفتان A وB مستقلتان وهى التكرارات التالية:

$$(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N\,,\ (a_2+b_2)(a_1+a_2)/N$$

$$(a_1+b_1)(b_1+b_2)/N\,,\ (a_2+b_2)(b_1+b_2)/N$$

فلــو رمـــزنا للفرق بين أى تكرار مشاهد من التكرارات الأربعة a_1, a_2, b_1, b_2 الموجــودة داخل جدول (2×2) وبين التكرار المناظر له فى حالة الاستقلال بالرمز D ســيكون لديــنا أربعـــة فروق هى فى الواقع متساوية فى القيمة العددية والاختلاف بينها يكــون فى الإشارة فقط وذلك لأن التكرارات الهامشية (مجموع الصفوف وكذلك مجموع الأعمـــدة) فى الجدول (2×2) ثابتة لا تتغير لذلك إذا كان الفرق بين التكرار المشاهـــد (الفعلـــى) والـــتكرار المـــناظر له فى حالة الاستقلال فى الخلية الأولى من الصف الأول يســـاوى $+D$ مـــثلاً فإن الفرق فى الخلية الثانية من نفس الصف لابد أن يساوى $-D$ وذلـــك لأن مجمـــوع الصـــف ثابـــت (يساوى a_1+b_1) وكذلك الحال بالنسبـــة للصف الـــثانـــــى وكذلك بالنسبة للأعمدة. لذلك يمكن حساب الفرق D بصورة محـــددة من أى خلـــيــــة فـــى الجـــدول ــ لتكــن مثلاً الخلية الأولى من الصف الأول حيث نجـــد من جـــدول (4 ــ 13 ــ 7ب) أن:

$$(4.\ 13.\ 36):\ D = a_1-(a_1+b_1)(a_1+a_2)/N = (a_1 b_2 - b_1 a_2)/N$$

حيث $N = a_1+a_2+b_1+b_2$.

فـــى الواقع كلما كانت D كبيرة كلما كان الفرق بين التكرارات المشاهدة (الفعلية) والتكرارات المتوقعة فى حالة الاستقلال كبيراً وهذا يدل على أن الفرق D يعبر عن شدة الاقتران وعندما $D=0$ يكون التكرار الفعلى مساوٍ للتكرار المتوقع المناظر له فى حالة الاستقلال كما يتضح من (4. 13. 36) إذن $D=0$ عندما تكون الصفتان A وB مستقلتان ولهـــذا يمكـــن استخدام D لقياس الاقتران. ولكن عادة نفضل أن يكون مقياس الاقتران له صـــفات قياسية (كأى مقياس جيد). أى يجب أن يكون المقياس فى صورة معامل (القياس الاقـــتران) لـــه حدود أو مدى معين يتغير خلاله، فيكون له حد أدنى يصل إليه فى حالة

الاقـــتران الســـالب الكامل لا يقل عنه وقيمة مركزية يصل إليها فى حالة الاستقلال وحد أعلى فى حالة الاقتران الموجب الكامل لا يتعداه.

والدراســـات الخاصـــة بتحديد العلاقة بين الظواهر الوصفية بدأت منذ عام 1900 وتطـــورت حـــتى أمكـــن تقديـــم معـــامل للاقـــتران نرمـــز لـــه بالرمـــز M_1، Coefficient of Association, ونعرفه بالعلاقة التالية:

$$(4.\ 13.\ 37):\ M_1 = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 b_2 + b_1 a_2} = \frac{N D}{a_1 b_2 + b_1 a_2}$$

حيث $N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ و D كما فى (4. 13. 36).

هـــذا المعامل، M_1، يساوى الصفر عندما تكون الصفتان A و B مستقلتان إذ فى هذه الحالة تكون $D = 0$، ويساوى $(+1)$ عندما تكون $b_1 a_2 = 0$ أى عندما $b_1 = 0$ أو $a_2 = 0$ وبمقارنة جدولى (4 ـ 13 ـ 7 أ وب) نعلم أن $b_1 = «a\bar{b}» = 0$ عندما لا توجد مفردات لديها الصفة A وليست لديها الصفة B كما أن $a_2 = «\bar{a}b» = 0$ عندما لا توجـــد مفـــردات لديها الصفة B وليست لديها الصفة A ومعنى هذا أن كل مفردة تتصف بالصفة B تتصف أيضاً بالصفة A وهذا يحدث فى حالة الاقتران الموجب الكامل. كما أن $M_1 = (-1)$ عـــندما $a_1 b_2 = 0$ أى عـــندما $a_1 = 0$ أو $b_2 = 0$ وبمقارنـــة جدولى (4 ـ 13 ـ 7 أ وب) نجـــد أن $a_1 = «ab» = 0$ عندما لا توجد مفردات تحمل الصفتان A و B معـــاً كمـــا أن $b_2 = «\bar{a}\bar{b}» = 0$ عندما لا توجد مفردات خالية من الصفتان معاً وهذا لا يحدث إلا فى حالة عدم الاقتران الكامل. كما أن معامل الاقتران M_1 يزيد بزيادة D وينقص بنقصانها.

ملاحظة (4 ـ 13 ـ 7 أ): إذا ضربنا تكرارات كل الفئات التى تحتوى على الصفة A فى ثابت معين (أو قسمناها على ثابت معين) فإن قيمة معامل الاقتران M_1 لا تتغير، ونفس الشىء بالنسبة للصفات $\bar{A}$ و B و $\bar{B}$ وعلى القارئ إثبات ذلك.

وقـــد اقـــترح "يول" Yule معامل آخر للاقتران يسمى "معامل الائتلاف" ونرمز له بالرمز M_2 "Coefficient of Colligation" حيث:

$$(4.\ 13.\ 38):\ M_2 = \left[1 - \sqrt{b_1 a_2 / a_1 b_2}\right] \div \left[1 + \sqrt{b_1 a_2 / a_1 b_2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{a_1 b_2} - \sqrt{b_1 a_2}}{\sqrt{a_1 b_2} + \sqrt{b_1 a_2}}$$

ويمكن إثبات أن:

$$(4.13.39):\ M_1 = 2M_2 / \left[1 + M_2^2\right]$$

ومعـــامل الائتلاف M_2 يحقق نفس مواصفات معامل الاقتران M_1 فهو يساوى الصـــفر فـــى حالة الاستقلال ويساوى $(+1)$ فى حالة الاقتران الموجب الكامل ويساوى (-1) فـــى حالـــة عـــدم الاقـــتران (أى فى حالة الاقتران السالب الكامل) وبالتالى فإن استخدامه لا يضيف جديد.

ويوجـــد معـــامل ثالث للاقتران نرمز له بالرمز M_3 ونسميه بـــ "معامل ارتباط الصفات" هو:

$$(4.13.40):\ M_3 = \frac{(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}}$$

$$= \frac{N D}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}}$$

حيث $N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ وD كما فى (4.13.36).

ومعـــامل الاقـــتران M_3 يســـاوى الصفر عندما $D = 0$ أى فى حالة الاستقلال ويساوى $(+1)$ عندما $a_2 = 0$ و $b_1 = 0$ أى فى حالة الاقتران الكامل ويساوى (-1) عـــندما $b_2 = 0$ و $a_1 = 0$ أى فى حالة عدم الاقتران الكامل. والفرق بين المعامل M_3 والمعامليـــن M_1 و M_2 هو أن M_3 يساوى $(+1)$ عندما يتلاشى تكراران فى الجدول (2×2) أى عـــندما كل من a_2 و b_1 يساوى الصفر بينما كل من M_1 و M_2 يساوى $(+1)$ عـــندما يتلاشـــى تكرار واحد على الأقل من التكرارين a_2 و b_1. كما أن M_3 يســـاوى (-1) عـــندما يتلاشى التكراران a_1, b_2 معاً فى حين أن كل من M_1 و M_2 يساوى (-1) عندما يتلاشى واحد على الأقل من التكرارين b_2 و a_1.

ملاحظة (4 ــ 13 ــ 7 ب): معامل الاقتران M_3 المعطى بالعلاقة (4.13.40) مع أنه يقيس الاقتران بين ظاهرتين وصفيتين إلا أن له نفس صيغة معامل الارتباط رباعى النســـق المعطـــى بالعلاقـــة (4.13.23b) الذى يقيس الارتباط بين ظاهرتين كميتين من جدول (2×2). لذلك أطلقنا على معامل الاقتران M_3 اسم "معامل ارتباط الصفات".

ملاحظـــة (4 ــ 13 ــ 7 جـ): نلاحظ فى تقديمنا لمعاملات الاقتران، عندما يكون معامل الاقتران مساوياً للصفر نقول أن الصفتان A وB "مستقلتان" وهذا اللفظ لنا تحفظ

علـيه، كما ذكرنا قبل ذلك فى حالة الارتباط فى ملاحظة (3 ـ 8 ب)، حيث ذكرنا أنه قد تكون هناك علاقة من نوع ما بين متغيرين كميين وبالرغم من ذلك يكون معامل الارتباط بيـنهما صـفر لذلك عندما يكون معامل الارتباط مساوياً الصفر نقول أن المتغيران غير مرتـبطان ولا نقـول مسـتقلان ولهذا فإننا نفضل عندما يكون معامل الاقتران مساوياً الصـفر أن نقـول أن الظاهرتان غير مقترنتان ولا نقول مستقلتان ولكننا استخدمنا لفظ غـير مقترنـتان للدلالة على الاقتران السالب عندما يكون معامل الاقتران سالب لذلك لا يمكـن اسـتخدام نفس اللفظ للدلالة على الحالة التى يكون فيها معامل الاقتران يساوى الصـفر. لذلـك فإننا فى الحالة التى يكون فيها معامل الاقتران مساوياً الصفر نقول أن الظاهرتان مستقلتان تجاوزاً حتى لا نستخدم لفظ "عدم الاقتران" الذى نستخدمه فى حالة الاقتران السالب. لهذا عندما يكون معامل الاقتران مساوياً الصفر لا يكون معنى ذلك أن الظاهـرتان لا توجد بينهما علاقة من أى نوع ولكن عندما لا توجد علاقة من أى نوع بين الظاهرتان يكون معامل الاقتران بينهما مساوياً للصفر.

(4 ـ 13 ـ 8) الاقتران الجزئى Partial Association:

معـاملات الاقـتران M_1 و M_2 و M_3 التى قدمناها فى البند السابق تقيس شدة الاقتران (أو التلازم) بين صفتين بصورة عامة. ولكن أحياناً يكون الاقتران بين صفتيـن (A و B مـثلا) مـتأثراً باقتران كل منهما بصفة ثالثة C. وفى هذه الحالة إذا كان معامل الاقتران M_i $(i = 1,2,3)$ بين A و B كبيراً فليس معنى هذا أن شدة الاقتران بين A و B عالـية وإنما قد يكون السبب فى ذلك هو أن A مقترنة مع C وكذلك B مقترنة مع C وأن اقتران كل منهما مع C كان له أثر كبير فى وجود هذا الاقتران العالى بين A و B فى حين أنه فى غياب الصفة C قد يكون الاقتران بين A و B ليس بهذه القوة. لذلك فإننا نكون فى حاجـة إلـى إيجاد معامل الاقتران بين A و B مع تحييد أثر C على هذا الاقتران. ونعبر عـن ذلك بلغة الإحصاء قائلين: أننا فى حاجة إلى إيجاد الاقتران بين A و B بشرط تثبيت أثـر C، وذلك يمكن إجراءه بتقسيم المجتمع الكلى إلى فئتين كبيرتين هما الفئة التى تظهر فـى مفـرداتها الصـفة C (أى الفئة C) والفئة التى لا تظهر فى مفرداتها الصفة C (أى الفـئـة $\overline{C}$)، ثم نحسب معامل الاقتران بين الصفتان A و B فى كلٍ من الفئتين C و $\overline{C}$ على حدة.

وهذا نعبر عنه بلغة الإحصاء بالقول أننا نوجد معامل الاقتران بين الصفتين A و B فـى المجتمعيـن الجزئيين C و $\overline{C}$ وذلك باعتبار أن الفئة C مجتمع جزئى أى جزء من المجـتمع الكلـى وكذلك $\overline{C}$. ونسمى معامل الاقتران فى هذه الحالة بـ "معامل الاقتران الجزئى" Coefficient of Partial Association ونرمز لمعامل الاقتران بين A و B فى الفئة C (أو فـى المجتمع الجزئى C) بالرمز $M_i(AB.C)$ وفى المجتمع الجزئى $\overline{C}$ بالرمز $M_i(AB.\overline{C})$ وذلـك لجمـيع قيم $i = 1,2,3$. ولتوضيح ذلك بمثال عملى، نفرض أننا نرغـب فى دراسة أثر التطعيم بمصل معين على مقاومة الماشية لمرض معين، علماً بأن

الماشــية إما أن تكون موجودة فى جمعيات متخصصة فى تربية الماشية وبالتالى تخضع لــنظام غذائـــى جيد وإما أن تكون موجودة عند الفلاح العادى فى حظيرة منزله وبالتالى تخضع لنظام غذائى أقل جودة من تلك الموجودة فى جمعيات تربية الماشية. فلو أحضرنا 100 رأس مـــن الماشية منها 60 رأس من الجمعيات المتخصصة فى تربية الماشية و40 رأس مـــن الماشية الموجودة عند الفلاحين العاديين فى حظائر منازلهم، ثم طعمنا نصف الماشية المأخوذة من الجمعيات وكذلك نصف الماشية المأخوذة من عند الفلاحين بالمصل المـــراد اختباره وتركنا النصف الآخر بدون تطعيم. وبعد ذلك حقنا الماشية المائة جميعها الخاضـــعة للاختـــبار بجرعة بها ميكروب المرض الذى صنع المصل من أجل مقاومته. وبعد فترة تم فحص الماشية كلها لتحديد الماشية التى قاومت المرض ولم تصب به وتلك الــتى أصيبت ولم تستطيع مقاومة المرض، وذلك لبيان أثر المصل المختبر على مقاومة الإصـــابة بهذا المرض. فلو رمزنا للماشية التى تم تطعيمها بالمصل بالرمز A وتلك التى لــم يـــتم تطعيمها بالرمز $\overline{A}$ ولماشية الجمعيات بالرمز B وللماشية المأخوذة من منازل الفلاحيـــن بالرمز $\overline{B}$ وللماشية التى قاومت الإصابة بالرمز C ولتلك التى أصيبت بالرمز $\overline{C}$. ســنجد أن لديـــنا ثـــلاث صفات هى A التطعيم وB (التغذية) وC (مقاومة الإصابة) ونرغـــب فى إيجاد معامل الاقتران بين أثر التطعيم ومقاومة المرض أى بين A وC. فلو أهملـــنا التفرقة بين الماشية المأخوذة من جمعيات تربية الماشية وتلك المأخوذة من منازل الفلاحيـــن واعتبرنا أنهما مجتمع واحد فإن معامل الاقتران فى هذا المجتمع بين A وC لا يعـــبر تمامـــاً عن العلاقة بين التطعيم ومقاومة المرض وذلك لأن جانب كبير من مقاومة المـــرض بالنســـبة لماشية جمعيات تربية الماشية قد يكون راجعاً لحالتها الصحية الجيدة نتـــيجة للـــتغذية الجـــيدة التى تتلقاها وليس بسبب التطعيم وحده. لذلك لكى يكون معامل الاقتران بين A وC معبراً عن أثر التطعيم وحده على مقاومة المرض لابد من تثبيت أثر الـــتغذية (الصفة B) وذلك بحساب معامل الاقتران بين A وC فى المجتمع الجزئى B أى فـــى مجـــتمع ماشية الجمعيات وهو معامل الاقتران الجزئى بين A وC مع تثبيت أثر B ونرمز له بالرمز $M_i(AC.B)$. وكذلك معامل الاقتران بين A وC فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$ أى $M_i(AC.\overline{B})$. كمـــا يمكـــن إيجـــاد معامل الاقتران بين أثر التغذية B ومقاومة المرض C مع تثبيت أثر التطعيم A ونرمز له بالرمز $M_i(BC.A)$، وكذلك يمكن إيجاد $M_i(BC.\overline{A})$. وبصـــورة مشابهة للعلاقة (4. 13. 34) نقول أن الصفتان A وC مقترنتان (أو مقترنتان اقتران موجب) فى المجتمع الجزئى B إذا كانت:

$$(4.\ 13.\ 41):\ «a\,c\,b» > \frac{«a\,b»\ «c\,b»}{«b»}$$

حيث «a c b» يمثل عدد المفردات التى تحمل الصفات A وB وC فى آن واحد و «a b» عـــدد المفردات التى تحمل الصفتان A وB و «c b» عدد المفردات التى تحمل الصـــفتان C وB و «b» عـــدد المفـــردات التى تحمل الصفة B وذلك فى المجتمع كله.

وبأسلوب مماثل لما هو متبع فى حالة صفتين يمكن تكوين جدول اقتران (2×2) فى حالة المجتمع الجزئى B مشابه لجدول (4 ـ 13 ـ 7 أ) فى الصورة التالية:

جدول (4 ـ 13 ـ 8 أ)

الجدول (2×2) فى المجتمع الجزئى B

الصفة Attribute	C B	$\overline{C}$ B	Σ
A B	«a c b»	«a $\overline{c}$ b»	«a b»
$\overline{A}$ B	«$\overline{a}$ c b»	«$\overline{a}$ $\overline{c}$ b»	«$\overline{a}$ b»
Σ	«c b»	«$\overline{c}$ b»	«b»

وبمقارنة الجدول السابق بالجدول (4 ـ 13 ـ 7 أ) نجد أن الحرف C الممثل للصفة C مكتوب بدل الحرف B الممثل للصفة B مع إضافة الصفة B إلى رموز الصفات بعد إجراء هذا التعديل فى الصف الأول والعمود الأول. كما أن العدد b الممثل لعدد مرات ظهور الصفة B فى المجتمع مضاف إلى جميع رموز أعداد الصفات داخل الأقواس «.» فى باقى خلايا الجدول، حيث أن مجتمع الجدول السابق هو المجتمع الجزئى B ولذلك فإن العدد «b» فى الجدول السابق يقابل العدد N فى جدول (4 ـ 13 ـ 7 أ). ويمكن بصورة مشابهة للجدول (4 ـ 13 ـ 7 ب) وضع الجدول السابق فى الصورة التالية:

جدول (4 ـ 13 ـ 8 ب)

الجدول (2×2) فى المجتمع الجزئى B

الصفة Attribute	C B	$\overline{C}$ B	Σ
A B	$a_1(b)$	$c_1(b)$	$a_1(b)+c_1(b)$
$\overline{A}$ B	$a_2(b)$	$c_2(b)$	$a_2(b)+c_2(b)$
Σ	$a_1(b)+a_2(b)$	$c_1(b)+c_2(b)$	«b»

وبأسلوب مماثل للعلاقة (4. 13. 37) يمكن تعريف معامل الاقتران الجزئى بين الصفتان A وC فى المجتمع الجزئى B (أى مع تحييد أثر B) من جدول (4 ـ 13 ـ 8 ب) فى الصورة التالية:

$$(4.13.42):\ M_1(AC\cdot B)=\frac{a_1(b)\cdot c_2(b)-c_1(b)\cdot a_2(b)}{a_1(b)\cdot c_2(b)+c_1(b)\cdot a_2(b)}$$

ومعامل الائتلاف الجزئى بين A وC فى المجتمع الجزئى B فى الصورة التالية:

$$(4.13.43):\ M_2(AC\cdot B)=\frac{\sqrt{a_1(b)\cdot c_2(b)}-\sqrt{c_1(b)\cdot a_2(b)}}{\sqrt{a_1(b)\cdot c_2(b)}+\sqrt{c_1(b)\cdot a_2(b)}}$$

كما يمكن إثبات أن:

$$(4.13.44):\ M_1(AC\cdot B)=2M_2(AC\cdot B)/\left[1+M_2^2(AC\cdot B)\right]$$

كما يمكن إيجاد معامل الارتباط الجزئى بين A وC فى المجتمع الجزئى B فى الصورة التالية:

$$(4.13.45):\ M_3(AC\cdot B)$$

$$=\frac{a_1(b)\cdot c_2(b)-c_1(b)\cdot a_2(b)}{\sqrt{[a_1(b)+a_2(b)][c_1(b)+c_2(b)][a_1(b)+c_1(b)][a_2(b)+c_2(b)]}}$$

ومعاملات الاقتران الجزئية السابقة لها نفس خواص معاملات الاقتران M_1, M_2, M_3 المعطاة بالعلاقات (4. 13. 37, 38, 40) مع اعتبار أن المجتمع الكلى هو المجتمع الجزئى B كما أن لها نفس الصيغ. ونقدم فيما يلى المثال التوضيحى التالى.

مثال (4 ـ 13 ـ 8): فى تجربة لاختبار التطعيم بمصل جديد فى مقاومة إصابة الماشية بمرض معين تم إحضار 100 رأس من الماشية (الأبقار مثلاً) منها 60 رأس من جمعيات تربية الماشية وهى ماشية معروف عنها أنها تخضع لنظام غذائى جيد و40 رأس من الماشية الموجودة فى حظائر منازل الفلاحين ومعروف أنها تتلقى نظام غذائى عادى. وتم تطعيم نصف ماشية الجمعيات ونصف ماشية الفلاحين بهذا المصل وبعد فترة معينة تم حقن الماشية جميعها بجرعة بها ميكروب المرض الذى يقاومه هذا المصل وبعد فترة أخرى محددة تم فحص الماشية جميعها وتحديد الماشية التى أصيبت بالمرض وتلك التى قاومت الإصابة والسؤال الآن: هل يمكن أن تكون مقاومة الماشية للمرض سببها الوحيد هو التطعيم بالمصل الجديد؟ أم أن المقاومة تعود إلى سببين أحدهما المصل الجديد والثانى الحالة الصحية الجيدة لماشية الجمعيات نتيجة للتغذية الجيدة؟ وهل يمكن تحديد مساهمة كل من هذين السببين فى المقاومة؟.

لبيان ذلك نرمز لماشية الجمعيات التى تخضع لنظام غذائى جيد بالرمز B ولماشية الفلاحيـــن التى تتلقى الغذاء العادى بالرمز $\overline{B}$ وللماشية التى تم تطعيمها بالمصل الجديد بالرمز A ولتلك التى لم يتم تطعيمها بالرمز $\overline{A}$ وللماشية التى قاومت الإصابة بالمرض بالرمـــز C وتلـــك التى أصيبت ولم تقاوم بالرمز $\overline{C}$ وبالتالى يكون لدينا الفئات الثمانية التالية:

$$ABC\ ,\ AB\overline{C}\ ,\ \overline{A}BC\ ,\ \overline{A}B\overline{C}\ ,\ A\overline{B}C\ ,\ A\overline{B}\overline{C}\ ,\ \overline{A}\overline{B}C\ ,\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

حيث ABC تمثل ماشية تم تطعيمها وتخضع لنظام غذائى جيد وقاومت الإصابة و $AB\overline{C}$ تمـــثل ماشـــية تـــم تطعيمها وتخضع لنظام غذائى جيد ولم تقاوم الإصابة ... وهكذا لباقى الفئات.

نفرض أننا وجدنا بعد فحص الماشية طبياً أن أعداد الماشية فى كل فئة من الفئات الثمانية السابقة كما يلى:

$$«a\,b\,c» = 28\ ,\ «a\,b\,\overline{c}» = 2\ ,\ «\overline{a}\,b\,c» = 24$$

$$«\overline{a}\,b\,\overline{c}» = 6\ ,\ «a\,\overline{b}\,c» = 17\ ,\ «a\,\overline{b}\,\overline{c}» = 3$$

$$«\overline{a}\,\overline{b}\,c» = 14\ ,\ «\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}» = 6$$

ويمكن من البيانات السابقة عمل الآتى:

أولاً: حساب معامل الاقتران (الكلى) بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة أى بين الصفتين A وC.

ثانياً: حساب معامل الاقتران (الكلى) بين نظام التغذية ومقاومة الإصابة أى بين الصفتين B وC.

ويـــتم إيجاد البندين السابقين أولاً وثانياً بتكوين جدول على غرار أى من الجدولين (4 ــ 13 ــ 7 أ وب).

ثالـــثاً: إيجـــاد معامل الاقتران الجزئى بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة فى مجـــتمع الـــتغذية الجـــيدة (المجـــتمع الجـــزئى B) أى معـــامل الاقـــتران الجزئى $M(AB\cdot C)$.

رابعـــاً: إيجـــاد معامل الاقتران الجزئى بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة فى مجـــتمع الـــتغذية العاديـــة (المجـــتمع الجـــزئى $\overline{B}$) أى معـــامل الاقتران الجزئى $M(AC\cdot\overline{B})$.

ويـــتم إيجـــاد البنديـــن ثالثاً ورابعاً بتكوين جدول لكل معامل على غرار أى من الجدولين (4 ـ 13 ـ 8 أ وب).

أولاً: معامل الاقتران بين A و C (بين التطعيم ومقاومة الإصابة):

لتكويـــن جـــدول علـــى غرار الجدول (4 ـ 13 ـ 7 أ) نحتاج لمعرفة التكرارات التالية:

$$«a\,c» \;,\; «a\,\bar{c}» \;,\; «\bar{a}\,c» \;,\; «\bar{a}\,\bar{c}»$$

وهذه يمكن حسابها من التكرارات الثمانية السابقة:

$$«a\,c» = «a\,b\,c» + «a\,\bar{b}\,c» = 45$$

$$«a\,\bar{c}» = «a\,b\,\bar{c}» + «a\,\bar{b}\,\bar{c}» = 5$$

$$«\bar{a}\,c» = «\bar{a}\,b\,c» + «\bar{a}\,\bar{b}\,c» = 38$$

$$«\bar{a}\,\bar{c}» = «\bar{a}\,b\,\bar{c}» + «\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}» = 12$$

مـــن هـــذه البيانات نجد أن نسبة الماشية التى قاومت الإصابة بين الماشية التى تم تطعيمها تساوى:

$$\frac{«a\,c»}{«a»} = \frac{45}{50} = 90\,\%$$

وهـــذا يدل على وجود اقتران موجب بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C. كما أن نسبة الماشية التى قاومت الإصابة بين الماشية التى لم يتم تطعيمها تساوى:

$$\frac{«\bar{a}\,c»}{«\bar{a}»} = \frac{38}{50} = 76\,\%$$

مما يدل على أن مقاومة الإصابة نسبتها أعلى فى المجتمع الجزئى للماشية التى تم تطعيمها عن نفس النسبة فى المجتمع الجزئى للماشية التى لم يتم تطعيمها، وهذا يدل على وجود اقتران موجب بين التطعيم ومقاومة الإصابة. ونبدأ الآن بإعداد جدول الاقتران بين A و C لحســـاب معـــامل الاقـــتران بين التطعيم ومقاومة الإصابة. ويمكن وضع البيانات السابقة فى الجدول التالى، على غرار جدول (4 ـ 13 ـ 7 ب)

الصفة	C	$\bar{C}$	Σ
A	45	5	50
$\bar{A}$	38	12	50
Σ	83	17	100

إذن معـــامل الاقـــتران M_1 ومعامل الائتلاف M_2 ومعامل الارتباط M_3 بين الصفتين A و C حسب العلاقات (4. 13. 37, 38, 40) هى:

$$M_1 = \frac{45 \times 12 - 5 \times 38}{45 \times 12 + 5 \times 38} = 0.4795$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{45 \times 12} - \sqrt{5 \times 38}}{\sqrt{45 \times 12} + \sqrt{5 \times 38}} = 0.2554$$

$$M_3 = \frac{45 \times 12 - 5 \times 38}{\sqrt{83 \times 17 \times 50 \times 50}} = 0.1864$$

نلاحـــظ فـــى المعاملات الثلاثة السابقة أن الاقتران بين التطعيم ومقاومة الإصابة موجب.

ثانياً: معامل الاقتران بين B و C (بين نظام التغذية ومقاومة الإصابة):

ومثل ما اتبعناه فى أولا نجد أن:

$$«b\,c» = 52 \;,\; «\bar{b}\,c» = 31 \;,\; «b\,\bar{c}» = 8 \;,\; «\bar{b}\,\bar{c}» = 9$$

ومن هذه البيانات يتضح أن نسبة الماشية التى قاومت الإصابة بين الماشية الجيدة التغذية هى:

$$\frac{«b\,c»}{«b»} = \frac{52}{60} = 86.67\,\%$$

فى حين أن نسبة الماشية التى قاومت الإصابة بين الماشية العادية التغذية هى:

$$\frac{«\bar{b}\,c»}{«\bar{b}»} = \frac{31}{40} = 77.5\,\%$$

نبدأ الآن بإعداد جدول لحساب معامل الاقتران بين المقارمة والتغذية الجيدة ويمكن وضع البيانات السابقة فى الجدول التالى على غرار جدول (4 ـ 13 ـ 7 ب):

الصفة	C	$\bar{C}$	Σ
B	52	8	60
$\bar{B}$	31	9	40
Σ	83	17	100

وتكـــون المعـــاملات الـــثلاثة M_1, M_2, M_3 بيـــن B و C حســـب العلاقـــات (4. 13. 37, 38, 40) كما يلي:

$$M_1 = \frac{52\times9 - 31\times8}{52\times9 + 31\times8} = 0.3073$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{52\times9} - \sqrt{31\times8}}{\sqrt{52\times9} + \sqrt{31\times8}} = 0.1574$$

$$M_3 = \frac{52\times9 - 31\times8}{\sqrt{83\times17\times60\times40}} = 0.1196$$

ونلاحـــظ فـــى المعاملات الثلاثة السابقة أن الاقتران بين نظام التغذية B ومقاومة المـــرض C موجـــب ولكـــنه أقل من الاقتران بين التطعيم A والمقاومة C. ويمكن عمل المقارنة التالية بين البندين أولا وثانيا:

B و C	A و C
$M_1 = 0.3073$	$= 0.4795$
$M_2 = 0.1574$	$= 0.2554$
$M_3 = 0.1196$	$= 0.1864$

وهـــذا يوضـــح أن الاقـــتران بين التطعيم A والمقاومة C أقوى من الاقتران بين التغذية B والمقاومة C حسب المعاملات الثلاثة.

ثالـــثا: معـــامل الاقتران الجزئى بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C فى مجتمع التغذية الجيدة B:

للحصـــول على معامل الاقتران الجزئى $M(AC\cdot B)$ نحتاج لتكوين جدول مثل جدول (4 ـ 13 ـ 8 أ) بين A و C مع تثبيت B باستخدام التكرارات الثمانية التى بدأنا بها. ولكن قبل إعداد الجدول نلاحظ الآتى:

فى مجتمع ماشية الجمعيات المغذية تغذية جيدة (المجتمع الجزئى B) نجد أن نسبة الماشية التى تم تطعيمها وقاومت الإصابة ABC بين كل الماشية التى قاومت الإصابة BC تساوى:

$$\frac{«a\,b\,c»}{«b\,c»} = \frac{28}{52} = 53.85\%$$

(أ) أى أن 53.58% مــن الماشـــية التى قاومت الإصابة فى المجتمع الجزئى B كانت من الماشـــية التى تم تطعيمها وبالتالى فإن 46.15% فقط من الماشية التى قاومت الإصابة كانت من الماشية التى لم يتم تطعيمها. كما أن نسبة الماشية التى تم تطعيمها ولم تقاوم الإصابة من بين كل الماشية التى لم تقاوم الإصابة فى المجتمع الجزئى B تساوى:

$$\frac{«a\,b\,\bar{c}»}{«b\,\bar{c}»} = \frac{2}{8} = 25\%$$

(ب) أى أن 25% مــن الماشـــية التى لم تقاوم الإصابة فى المجتمع الجزئى B كانت من الماشـــية التى تم تطعيمها وبالتالى فإن 75% من الماشية التى لم تقاوم الإصابة كانت من الماشية التى لم يتم تطعيمها.

من أ و ب نلاحظ أن الاقتران بين التطعيم ومقاومة الإصابة فى المجتمع الجزئـــى (B) اقتران موجب. ونحاول الآن حساب معامل الاقتران بتكوين جدول الاقتران كما يلى:

الصفة	B C	$B\bar{C}$	Σ
A B	28	2	30
$\bar{A}$ B	24	6	30
Σ	52	8	60

إذن معـــامل الاقـــتران الجـــزئى $M_1(AC\cdot B)$ ومعـــامل الائـــتلاف الجـــزئى $M_2(AC\cdot B)$ ومعـــامل الارتـــباط الجـــزئى $M_3(AC\cdot B)$ بين الصفتين A وC فى المجتمع الجزئى B حسب العلاقات (4. 13. 42, 43, 45) هى:

$$M_1(AC\cdot B) = \frac{28\times 6 - 2\times 24}{28\times 6 + 2\times 24} = 0.5556$$

$$M_2(AC\cdot B) = \frac{\sqrt{28\times 6} - \sqrt{2\times 24}}{\sqrt{28\times 6} + \sqrt{2\times 24}} = 0.3033$$

$$M_3(AC\cdot B) = \frac{28\times 6 - 2\times 24}{\sqrt{52\times 8\times 30\times 30}} = 0.1961$$

رابعـــا: معـــامـــل الاقـــتـــران بيـــن التطعيم A ومقاومة الإصابة C فى مجتمع التغذية العاديـــة $\overline{B}$:

(جـــ) نســـبة الماشـــية التى تم تطعيمها وقاومت الإصابة $A\,\overline{B}\,C$ بين كل الماشية التى قاومت الإصابة $\overline{B}\,C$ فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$ هى:

$$\frac{«a\,\overline{b}\,c»}{«\overline{b}\,c»}=\frac{17}{31}=54.84\,\%$$

مما يدل على وجود اقتران موجب بين A وC فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$.

(د) نســـبة الماشـــية التى تم تطعيمها ولم تقاوم الإصابة $A\,\overline{B}\,\overline{C}$ بين كل الماشية التى لم تقاوم الإصابة $\overline{B}\,\overline{C}$ فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$ هى:

$$\frac{«a\,\overline{b}\,\overline{c}»}{«\overline{b}\,\overline{c}»}=\frac{3}{9}=33.33\,\%$$

وبالـــتالى فـــإن 66.67 % مـــن الماشية التى لم تقاوم الإصابة كانت من المواشى غير المطعمة فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$.

مـــن جـــ و د نلاحظ أن التطعيم A ومقاومة الإصابة C فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$ بينها اقتران موجب. ونحاول الآن حساب معامل هذا الاقتران من الجدول التالى:

الصفة	$\overline{B}\,C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	Σ
$A\,\overline{B}$	17	3	20
$\overline{A}\,\overline{B}$	14	6	20
Σ	31	9	40

إذن معـــامل الاقـــتران الجـــزئى $M_1\left(AC\cdot\overline{B}\right)$ ومعـــامل الائـــتلاف الجـــزئى $M_2\left(AC\cdot\overline{B}\right)$ ومعـــامل الارتـــباط الجـــزئى $M_3\left(AC\cdot\overline{B}\right)$ بين الصفتين A وC فى المجتمع الجزئى $\overline{B}$ حسب العلاقات (4. 13. 42, 43, 45) هى:

$$M_1(AC\cdot\overline{B})=\frac{17\times6-3\times14}{17\times6+3\times14}=0.4167$$

$$M_2(AC\cdot\overline{B})=\frac{\sqrt{17\times6}-\sqrt{3\times14}}{\sqrt{17\times6}+\sqrt{3\times14}}=0.2183$$

$$M_3(AC\cdot\overline{B})=\frac{17\times6-3\times14}{\sqrt{31\times9\times20\times20}}=0.1796$$

من ثالثاً ورابعاً يمكن وضع المعاملات $M(AC\cdot B)$ و $M(AC\cdot\overline{B})$ فى الشكل التالى للمقارنة بينها:

$$M_1(AC\cdot B)=0.5556\ ,,\ M_1(AC\cdot\overline{B})=0.4167$$

$$M_2(AC\cdot B)=0.3033\ ,,\ M_2(AC\cdot\overline{B})=0.2183$$

$$M_3(AC\cdot B)=0.1961\ ,,\ M_3(AC\cdot\overline{B})=0.1796$$

نلاحظ أن معامل الاقتران الجزئى M_1 (وكذلك M_2 و M_3) بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C دائماً موجب مما يدل على وجود اقتران بين A وC كما أن هذا الاقتران أقوى عندما تكون التغذية جيدة لأنه فى المجتمع B أعلى منه فى المجتمع $\overline{B}$.

(4 – 13 – 9) الاقتران فى جداول التوافق $(t\times s)$:

Association in Contingency Tables $(t\times s)$:

نفرض أن لدينا مجتمع مشاهد عدد مفرداته N مصنف طبقاً لصفتين A وB وكانت الصفة A لها s من الأوجه $A_1, A_2, ..., A_s$ والصفة B لها t من الأوجه $B_1, B_2, ..., B_t$ أى أن كل من A وB مصنفة تصنيفاً متعدداً (ليس ثنائياً)، يكون لدينا t s من الفئات من النوع $A_i\,B_j$ يمكن وضعها فى جدول يسمى بـ "جدول التوافق" Contingency Table مكون من t من الصفوف وs من الأعمدة فى الصورة التالية:

جدول (4 ـ 13 ـ 9 أ)

الصفة Attribute	A_1	A_2	…	A_s	Σ
B_1	«$a_1\, b_1$»	«$a_2\, b_1$»	⋯	«$a_s\, b_1$»	«b_1»
B_2	«$a_1\, b_2$»	«$a_2\, b_2$»	⋯	«$a_s\, b_2$»	«b_2»
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_t	«$a_1\, b_t$»	«$a_2\, b_t$»	⋯	«$a_s\, b_t$»	«b_t»
Σ	«a_1»	«a_2»		«a_s»	N

$$N = \sum_{1}^{s} «a_i» = \sum_{1}^{t} «b_j» .$$

وجـــدول الـــتوافق يعتـــبر تعميماً لجدول (2×2)، أى الجدول (4 ـ 13 ـ 7 أ). ولدراســـة العلاقة بين A و B لا يكون الهدف معرفة الاقتران بين وجه معين من أوجه A ووجـــه معين آخر من أوجه B ولكن الهدف هو معرفة شدة العلاقة بين الظاهرتين A و B ككـــل. ويـــتم هـــذا بحســـاب معـــامل يطلق عليه اسم "معامل التوافق" Coefficient of Contingency. وللوصول إلى هذا المعامل يمكن اتباع نفس الأسلوب الذى توصلنا به إلى معامل الاقتران فى جدول (2×2) فى حالة التصنيف الثنائى للظاهرتين A و B كما يلى:

إذا كانـــت الصفتان A و B فى المجتمع مستقلتان فإننا نتوقع الحصول على علاقة مماثلـــة تماماً للعلاقة (4. 13. 33) بالنسبة لأعداد المفردات «$a_i\, b_j$» و «a_i» و «b_j» لجميع قيم i و J فى جدول التوافق (4 ـ 13 ـ 9 أ) فى الصورة التالية:

(4. 13. 46): $«a_i\, b_j» = «a_i» \cdot «b_j»/N$

فإذا وجدنا فى جدول التوافق أن:

(4. 13. 47): $«a_i\, b_j» > «a_i» \cdot «b_j»/N$

كـــان معنى ذلك ـــ كما فى حالة جدول (2×2) تماماً ـــ أن نسبة المفردات التى توجـــد بهـــا الصفة A_i فى الفئة B_J أكبر من تلك النسبة المتوقعة فى المجتمع وبالتالى نقول أن الصفتان A_i و B_J مقترنتان. وبالعكس إذا كانت:

(4. 13. 48): $«a_i\, b_j» < «a_i» \cdot «b_j»/N$

نقـــــول أن الصفتان A_i و B_J "غير مقترنتان". وكما هو واضـــح من العلاقـــة (4. 13. 46) إذا كانـــت الظاهـــرتان A و B ليستا مستقلتان تماماً فإن الأعداد «$a_i\, b_j$» و

$«a_i» \cdot «b_J»/N$ لـن تكـون متسـاوية لجمـيع قـيم i و J ومعـنى هـذا أن الفرق $«a_i b_J» - [«a_i» \cdot «b_J»/N]$ لجمـيع قـيم i و J يكون معبراً إلى حد ما عن استقلال الظاهرتين A و B فإذا استخدمنا الرمز:

$$(4.13.49a):\ D_{iJ} = «a_i b_J» - «a_i» \cdot «b_J»/N$$

للدلالـة على الفرق بين التكرار الفعلى $«a_i b_J»$ فى الجدول $(t \times s)$ والتكرار المـتوقع المـناظر لـه فـى حالة استقلال الظاهرتين A و B سنجد أن هذا الفرق يحقق الخصائص التالية:

$$(4.13.49b):\ (1)\quad D_{iJ} \neq D_{Ji}$$

$$(4.13.49c):\ (2)\quad \sum_{J=1}^{t} D_{iJ} = 0$$

لجميع قيم $i = 1, 2, \ldots, s$.

ونلاحـظ أن عـدد الكميات (الفروق) D_{iJ} التى يمكن تكوينها من جدول التوافق السـابق تساوى $t \times s$ كمية وطبقاً للعلاقة (4.13.49c) نجد أن لكل i تكون $(t-1)$ فقط من هذه الكميات مستقلة، وبالمثل لكل J تكون $(s-1)$ منها فقط مستقلة. إذن العدد الكلى للكميات أو الفروق D_{iJ} المستقلة يساوى $(t-1)(s-1)$ فرقاً.

ممـا سبق يتضح أن الكمية D_{iJ} تعتبر مؤشراً للاقتران بين A_i و B_J لذلك فإن كل الفروق D's يمكن اعتبارها مؤشراً للاقتران بين الظاهرتين A و B ويكون الهدف الآن هو بناء معامل للاقتران من كل هذه الفروق مجتمعة لقياس الاقتران بين الظاهرتين A و B . ومن الواضح عدم إمكانية استخدام مجموع الكميات D's كمقياس للاقتران إذ أن مجموع هـذه الكميات يساوى الصفر لذلك فإننا نهدف إلى بناء مقياس أو معامل يكون مستقلاً عن إشارات الفروق D's. وقد قدم "بيرسون" Pearson معامل للاقتران يعتمد على كل الفروق D's مـتحررة مـن الإشـارة يسـمى معـامل "بيرسـون للـتوافق" Pearson's Coefficient of Contingency فى الصورة التالية:

$$(4.13.50):\ C = \sqrt{X^2/(X^2 + N)}$$

حيث

$$(4.13.51):\ X^2 = N\sum_{i=1}^{s}\sum_{J=1}^{t} D_{iJ}^2/«a_i» \cdot «b_J»$$

و D_{IJ} كما فى (4. 13. 49a) و N هى مجموع التكرارات فى جدول (4 ـ 13 ـ 9 أ) ـ جدول التوافق $(t \times s)$.

والجـــذر التربـــيعى فى العلاقة (4. 13. 50) يؤخذ بدون إشارة حيث أن المعامل C يوضح فقط مجرد أن الصفتان A و B مستقلتان أم غير مستقلتان وبما أن الكمية X^2 تمثل مجمـــوع مـــربعات مقسوم على كميات موجبة فهى لا يمكن أن تكون سالبة وهى تساوى الصفر فى حالة واحدة هى عندما تكون كل قيم $D_{IJ} = 0$ فى هذه الحالة تكون الظاهرتان A و B مستقلتان وخلاف ذلك تكونا مقترنتان.

ملاحظـــة (4 ـ 13 ـ 9 أ): ذكرنا سابقاً أن صيغ المعاملات (ارتباط أو انحدار أو اقـــتران أو غير ذلك) التى تستخدم فى حالة المجتمعات المشاهدة هى نفسها الصيغ التى تســـتخدم فـــى حساب هذه المعاملات من بيانات العينات العشوائية. وعلى ذلك فإن كل الصـــيغ السابقة المقدمة فى البندين (4 ـ 12) و(4 ـ 13) تستخدم للمجتمعات المشاهدة والعينات العشوائية على حد سواء.

ملاحظـــة (4 ـ 13 ـ 9 ب): لقـــد ذكرنا فى ملاحظة (4 ـ 13 ـ 7 ب) أن معامل الاقـــتران M_3 المعطـــى بالعلاقـــة (4. 13. 40) له نفـــس صيغة معامل الارتباط رباعى النســـق r_t المعطى بالعلاقة (4. 13. 23b) ويمكن فى حالة جدول (2×2) إثبات أن:

$$(4.\ 13.\ 52):\ M_3 = r_t^2 = X^2/N$$

حيث X^2 كما فى (4. 13. 51). وهذا متروك للقارئ لإثباته.

ومما هو جدير بالذكر أن العلاقة (4. 13. 50) تحتاج إلى جهد حسابى لإيجاد معامل الـــتوافق C من الجدول (4 ـ 13 ـ 9 أ) ـ جدول التوافق ـ وذلك لاعتمادها على الكمية X^2 الـــتى تمثل دالة معقدة حسابياً إلى حد ما فى الكميات «$a_I\, b_J$» و «a_I» و «b_J»، لذلـــك يمكـــن وضـــع معـــامل الـــتوافق C فى صيغة أخرى تمكننا من استخدام الكميات «$a_I\, b_J$» و «a_I» و «b_J» مباشرة مما يسهل العمل الحسابى، حيث يمكن وضع معامل بيرسون للتوافق المعطى بالعلاقة (4. 13. 50) فى الصورة التالية:

$$(4.\ 13.\ 53):\ C = \sqrt{(W - N)/W}$$

حيث:

$$W = N \sum_{IJ} [«a_I\, b_J»]^2 \Big/ «a_I» \cdot «b_J»$$

ومتروك إثبات ذلك للقارئ.

(4 ـ 14) التمثيل الهندسى لمعاملات الارتباط الكلية والجزئية:

Geometrical Representation of Total and Partial Correlation Coefficients:

(4 ـ 14 ـ 1) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط الكلى:

لقــد أثبتــنا جبرياً فيما سبق أن كل المعاملات الجزئية للارتباط والانحدار وكذلك تبايــنات وتغايرات الأخطاء (أو البواقى) يتم تحديدها تماماً بالتباينات ومعاملات الارتباط (أو التبايــنات ومعــاملات الانحدار) الكلية التى من الدرجة صفر. وقد يكون من المفيد والمــرغوب فيه بيان ذلك هندسياً. فإذا كان لدينا عينة حجمها N من المشاهدات المأخوذة من مجتمع له توزيع متعدد عدد متغيراته p $(N > p)$ وكانت مشاهدات العينة كما يلى:

$$(4.\ 14.\ 1):\ [x] = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N) = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & & \\ x_{p1} & \cdots & x_{pN} \end{bmatrix}$$

فإن متجه متوسطات العينة (متوسطات صفوف المصفوفة السابقة) يكون:

$$(4.\ 14.\ 2):\ \underline{\overline{x}} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\underline{x}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_{1t} \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_{pt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_p \end{pmatrix}$$

ومصفوفة تباينات العينة تكون:

$$(4.\ 14.\ 3):\ \hat{V}_{p\times p} = S_{p\times p} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\underline{x}_t - \underline{\overline{x}})(\underline{x}_t - \underline{\overline{x}})'$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{t=1}^{N}(x_{it} - \overline{x}_i)(x_{Jt} - \overline{x}_J)\right]$$

$$= [s_{iJ}]_{p\times p} \quad ; \quad i, J = 1, 2, \ldots, p$$

حيث $\hat{V}$ هو تقدير تباين المجتمع و S هى مصفوفة تغاير العينة.

ويكون تقدير التباين σ_i^2 للمتغير رقم i من بيانات العينة هو:

$$(4.\ 14.\ 4):\ \hat{\sigma}_i^2 = s_{ii} = \tfrac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(x_{it} - \bar{x}_i\right)^2$$

حيث x_{it} هى المشاهدة رقم t فى المتغير رقم i و $\bar{x}_i$ هو متوسط المتغير رقم i.

كما أن تقدير معامل الارتباط للمتغيرين رقمى i و J هو:

$$(4.\ 14.\ 5):\ \hat{\rho}_{iJ} = r_{iJ}$$

$$= \sum_{t=1}^{N}\left(x_{it} - \bar{x}_i\right)\left(x_{Jt} - \bar{x}_J\right) \div \sqrt{\left[\sum_t x_{it}^2 - N\bar{x}_i^2\right]\left[\sum_t x_{Jt}^2 - N\bar{x}_J^2\right]}$$

$$= \hat{\sigma}_{iJ} \Big/ \sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\,\hat{\sigma}_{JJ}} = s_{iJ} \Big/ \sqrt{s_{ii}\,s_{JJ}}$$

حيــث $\hat{\rho}_{iJ}$ هــو تقدير معامل الارتباط فى المجتمع بين المتغيرين i و J و r_{iJ} هو معامل الارتباط فى العينة بين المتغيرين i و J.

والتمثــيل الهندســى الملائم لهذه العينة يكون بدلالة صفوف المصفوفة $[x]$ حيث يمكن كتابة مشاهدات العينة المعطاة بالعلاقة (4. 14. 1) فى الصورة التالية:

$$(4.\ 14.\ 6):\ [x] = [\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1J} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{iJ} & \cdots & x_{iN} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pJ} & \cdots & x_{pN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_i \\ \vdots \\ \underline{z}_p \end{bmatrix}$$

حيث:

$$(4.\ 14.\ 7):\ \underline{z}_i = \left(x_{i1} \ldots x_{il} \ldots x_{iN}\right) \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

يمــثل مشاهدات المتغير رقم i وهو الصف رقم i فى المصفوفة $[x]$ السابقة. أى أن $\underline{z}_i$ مــتجه صــفى و $\underline{z}_i'$ متجه عمودى. وفى بقية هذا البند سنرمز للمتجه الصفى $\underline{z}$ بدون شرطة وعندما نضع شرطة يكون المتجه عمودى. المتجه الصفى $\underline{z}_i$ يمكن اعتباره مــتجه Vector فى الفراغ ذو الــ N بعداً إحداثيه رقم l عند إحدى نقطتى طرفيه هو x_{il}

والطـــرف الآخر عند نقطة الأصل. وعلى هذا فإن مشاهدات العينة يمكن تمثيلها بدلالة p مـــن المـــتجهات (أو p من النقط) فى الفراغ الاقليدى ذو الـــ N بعداً ـــ نقطة وحيدة لكل متغير.

نفرض أن $\underline{O} = [0 \cdots 0]$ هى نقطة الأصل وأن المتجه $\bar{\underline{z}}_i$ هو المتجه الذى نقطة بدايته $\underline{O}$ ونقطة نهايته $\underline{z}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN})$.

إذن مـــربع طول هذا المتجه (أى مربع البعد بين نقطة الأصل $\underline{O}$ ونقطة النهاية $((x_{i1}, \dots, x_{iN}))$ هو:

$$(4.14.8): \left\| \overrightarrow{\underline{Z}_i} \right\|^2 = \underline{Z}_i \, \underline{Z}_i' = \sum_{l=1}^{N} x_{il}^2$$

($\underline{z}_i$ متجه صفى و $\underline{z}_i'$ متجه عمودى)

وإذا رمزنـــا إلى الزاويـــة بين المتجهين $\bar{\underline{z}}_i$ و $\bar{\underline{z}}_J$ بالرمز θ ـــ كمـــا فى شـــكل (4 ـــ 14أ) التالى ـــ فيمكن إثبات أن جيب تمام الزاوية θ هى:

$$(4.14.9): \operatorname{Cos}\theta = \underline{z}_i \, \underline{z}_J' \Big/ \sqrt{\left(\underline{z}_i \, \underline{z}_i'\right) \cdot \left(\underline{z}_J \, \underline{z}_J'\right)}$$

$$= \sum_{l=1}^{N} x_{il} \, x_{Jl} \Big/ \sqrt{\sum_{l=1}^{N} x_{il}^2 \sum_{l=1}^{N} x_{Jl}^2} = r_{iJ}$$

ملاحظـــة (4 ـــ 14 ـــ 1): لو كانت مشاهدات المتغيـــرات مقيســـة من مركزهـــا (أى $\sum x_{il} = 0$) كانـــت الصيغة السابقة هى صيغة تقدير معامل الارتباط بين المتغير رقـــم i والمتغـــير رقـــم J والـــذى نرمـــز له بالرمز $\hat{\rho}_{iJ}$ أو r_{iJ} أى أنه عندما تكون المتغـــيرات مقيســـة من مراكزها يكون تقدير معامل الارتباط بين المتغيرين رقمى i و J هو:

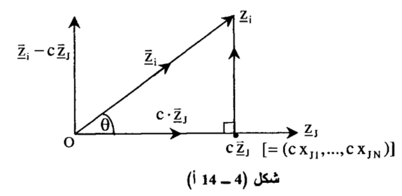
$$(4.14.10): \hat{\rho}_{iJ} = r_{iJ} = Cos\,\theta \qquad i, J = 1, 2, \dots, p$$

حيـــث θ هى الزاوية المحصورة بين المتجهين $\bar{\underline{z}}_i$ و $\bar{\underline{z}}_J$. كما أن تقدير تباين المتغير رقم i ($\hat{\sigma}_i^2$) يكون معطى بالعلاقة:

$$(4.14.11): N\,\hat{\sigma}_i^2 = N\,s_i^2 = N\,s_{ii} = \sum_{l=1}^{N} x_{il}^2 = \underline{z}_i \, \underline{z}_i' \qquad i = 1, 2, \dots, p$$

وافـتراض أن المتغـيرات مقيسـة من مراكزها لا يؤدى إلى نقص فى عمومية النـتائج إذ دائمـاً نصـل من الحالة التى تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها إلى الحالـة الـتى لا تكون فيها مقيسة من مراكزها (عندما $\sum x_i \neq 0$) بكتابة $x_{il} - \bar{x}_i$ بـدلاً من x_{il}. ومع ذلك يمكن إعطاء تمثيل هندسى للحالة التى لا تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها حيث تكون صيغة r_{ij} كما فى علاقة (4.14.5).

ونعـود الآن إلى إثبات العلاقة (4. 14. 9). لو اخترنا العدد c بحيث يكون المتجه $c \cdot \bar{\underline{z}}_J$ متعامد على المتجه $\bar{\underline{z}}_i - c \cdot \bar{\underline{z}}_J$ كما فى الشكل التالى:



شكل (4 ــ 14 أ)

إذن (من التعامد) $c \cdot \bar{\underline{z}}_J \left(\bar{\underline{z}}_i - c\,\bar{\underline{z}}_J\right)' = 0$ وبهذا يكون:

$$c = \underline{z}_J\, \underline{z}_i' / \underline{z}_J\, \underline{z}_J'$$

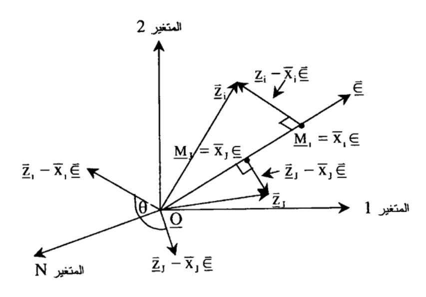
ومن الشكل السابق نجد أن $\text{Cos}\,\theta$ تساوى طول المتجه $c\bar{\underline{z}}_J$ مقسوماً على طول المتجه $\underline{z}_i$ أى أن:

$$\text{Cos}\,\theta = \sqrt{[c\,\underline{z}_J][c\,\underline{z}_J]' / \underline{z}_i\, \underline{z}_i'} = \sqrt{c\,\underline{z}_J\, \underline{z}_J'\, c / \underline{z}_i\, \underline{z}_i'}$$

وبالتعويض عن c نحصل على علاقة (4. 14. 9) وهو المطلوب إثباته.

ونقـدم التمثـيل الهندسى للحالة التى لا تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها فيمـا يلـى:

نفرض أن الخط المستقيم $\overleftrightarrow{O\in}$ يمر بنقطة الأصل $\underline{O}$ وبالنقطة $\underline{\in} = (1, 1, \ldots, 1)$ وهو يسمى بالخط المتساوى الزوايا The Equiangular Line كما فى الشكل التالى:



شكل (4 ـ 14 ب)

نفـرض أن $\underline{M}_i = \overline{x}_i \underline{\in}$ و $\underline{M}_j = \overline{x}_j \underline{\in}$ نقطـتان على الخط المتساوى الزوايا $\overleftrightarrow{\underline{O}\underline{\in}}$، فـي هـذه الحالة يكون الخطان $\overleftrightarrow{\underline{M}_i \underline{z}_i}$ و $\overleftrightarrow{\underline{M}_j \underline{z}_j}$ عموديان على الخط المتساوى الـزوايا $\overleftrightarrow{\underline{O}\underline{\in}}$، وذلـك لأن أطـوال القطع المستقيمة $\overline{O\underline{z}_i}$ و $\overline{O\underline{M}_i}$ و $\overline{\underline{M}_i \underline{z}_i}$ تحقق العلاقات التالية:

$$\left(\overline{O\underline{z}_i}\right)^2 = \sum_{l=1}^{N} x_{il}^2 \ , \ \left(\overline{O\underline{M}_i}\right)^2 = N\,\overline{x}_i$$

$$, \left(\overline{\underline{M}_i \underline{z}_i}\right)^2 = \sum_{l}\left(x_{il} - \overline{x}_i\right)^2 = \sum_{l=1}^{N} x_{il}^2 - N\,\overline{x}_i^2$$

أى أن: $\left(\overline{O\underline{z}_i}\right)^2 = \left(\overline{\underline{M}_i \underline{z}_i}\right)^2 + \left(O\underline{M}_i\right)^2$

وطبقاً لنظرية فيثاغورث يكون الخط $\overleftrightarrow{\underline{M}_i \underline{Z}_i}$ عمودى على الخط $\overleftrightarrow{O\underline{M}_i}$ أى على الخـط $\overleftrightarrow{\underline{O}\underline{\in}}$. وبالمـثل يمكـن إثبات أن الخط $\overleftrightarrow{\underline{M}_j \underline{z}_j}$ عمودى على الخط $\overleftrightarrow{\underline{O}\underline{\in}}$. إذن المـتجهان $\underline{z}_i - \overline{x}_i \underline{\in}$ و $\overline{x}_i \underline{\in}$ مـتعامدان و $\overline{x}_i \underline{\in}$ هـو مسـقط المتجه $\underline{z}_i$ على الخط المتسـاوى الزوايا $\overleftrightarrow{\underline{O}\underline{\in}}$. وبنقل المتجهان $\underline{z}_i - \overline{x}_i \underline{\in}$ و $\underline{z}_j - \overline{x}_j \underline{\in}$ بحيث أن كل منهما

تكـــون نقطـــة بدايته هى نقطة الأصل $\underline{O}$ فيكون الإحداثى رقم l للمتجه $\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}}$ هو $(x_{il} - \overline{x}_i)$ وللمـــتجه $\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}}$ هو $(x_{Jl} - \overline{x}_J)$ إذن مربع طول المتجه $\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}}$ يكـــون $\sum_{l=1}^{N}(x_{il} - \overline{x}_i)^2$ وهى نفس صيغة تقدير تباين المتغير رقم i مضروبا فى N من هذا يتضح أن تقدير تباين المتغير رقم i $(\hat{\sigma}_i^2)$ يحقق العلاقة التالية:

$$(4.\ 14.\ 12):\ N\,\hat{\sigma}_i = N\,s_i^2 = N\,s_{ii} = \sum_{l=1}^{N}(x_{il} - \overline{x}_i)^2$$

$$= (\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}})(\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}})'\ ;\ i = 1,2,\ldots,p\cdot$$

كما أن جيب تمام الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}}$ و $\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}}$ هو:

$$(4.\ 14.\ 13):\ \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{(\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}})(\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}})}{\sqrt{(\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}})(\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \in)' \cdot (\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}})(\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}})'}}$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{N}(x_{il} - \overline{x}_i)(x_{Jl} - \overline{x}_J)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N}(x_{il} - \overline{x}_i)^2 \cdot \sum_{l=1}^{N}(x_{Jl} - \overline{x}_J)^2}} = r_{iJ}$$

وهـــى نفس صيغة معامل الارتباط الكلى بين المتغير رقم i والمتغير رقم J والتى نرمز لها بالرمز r_{iJ} أو $\hat{\rho}_{iJ}$، أى أن:

$$(4.\ 14.\ 14):\ \hat{\rho}_{iJ} = r_{iJ} = \mathrm{Cos}\,\theta$$

حيث θ هى الزاوية المحصورة بين المتجهين $(\underline{\underline{z}}_i - \overline{x}_i \underline{\underline{\in}})$ و $(\underline{\underline{z}}_J - \overline{x}_J \underline{\underline{\in}})$.

ولكى نعتبر أن كل المتغيرات مقيسة من مراكزها نضع $X_{il} = x_{il} - \overline{x}_i$ فى هذه الحالـــة $\sum_{l=1}^{N} X_{il} = 0$ و $\overline{X}_i = 0$ لجمـــيع قـــيم $i = 1, 2, \ldots, p$ وهذا يوصلنا إلى الحالة

السابقة التى حصلنا فيها على العلاقات (4. 14. 10) و(4. 14. 11). لذلك يمكن الوصول من الحالـــة التى نفترض فيها أن المتغيرات مقيسة من مركزها إلى الحالة التى لا يتحقق فيها هذا الفرض وبالعكس من خلال كتابة العلاقتين $\left(x_{il}-\bar{x}_i\right)$ و X_{il} كلٍ مكان الآخر. لهذا فإن هذا الفرض لا يؤدى إلى نقص فى عمومية ما نتوصل إليه من نتائج بصفة عامة.

مما سبق يمكن القول أن كل العلاقات بين النقط $\left(x_{i1},\ldots,x_{iN}\right)$ فى الفراغ ذو الـــ N بعـــداً يمكن أن توضع بدلالة أطوال المتجهات $\underline{\bar{z}}_i$ $\left(i=1,\ldots,p\right)$ والزوايا المحصورة بيـــن هذه المتجهات واستخدام حساب المثلثات لاشتقاق كل العلاقات التى سبق تقديمها فى هـــذا الـــباب. وســـنعرض فـــيما يلى جانباً من هذه العلاقات التى سوف نحتاج إليها فى توزيعات المعاينة فيما بعد.

(4 – 14 – 2) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط الجزئى:

نفرض أن النقطة:

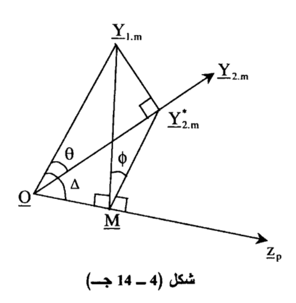
$$(4.\ 14.\ 15a):\ \underline{Y}_{1\cdot h}=\left(Y_{11\cdot h},\ldots,Y_{1N\cdot h}\right)$$

حيـــث $h=23\cdots p$، إحداثياتها هى الـــ N مشاهدة للخطأ (أو للبواقى) $Y_{l1.2\ldots p}$ حيث:

$$(4.\ 14.\ 15b):\ Y_{l1.2\ldots p}=x_{1l}-E\left(x_{1l}\mid x_{2l},\ldots,x_{pl}\right)\ ,\ l=1,2,\ldots,N\,.$$

وطبقاً للعلاقة (4. 6. 14) يكون المتجه $\underline{\bar{Y}}_{1.2\ldots p}$ (الذى نقطة بدايته نقطة الأصل $\underline{O}$ ونقطـــة نهايـــته $\underline{Y}_{1.2\ldots p}$) مـــتعامداً علـــى كل المتجهات $\underline{\bar{Z}}_2,\ldots,\underline{\bar{Z}}_p$ حيث $\underline{Z}_i$ كما فى (4. 14. 7)، ومـــن ثم متعامداً على الفراغ ذو الـــ $(p-1)$ بعداً المُنشأ بواسطة Spanned by هـــذه المـــتجهات. ومـــتجهى الخطـــأ (أو مـــتجهى الـــبواقى) $\underline{\bar{Y}}_{1\cdot m}$ و $\underline{\bar{Y}}_{2\cdot m}$، حيث $m=34\cdots(p-1)$ الموضـــحان فى شكل (4 ــ 14 جـــ) التالى كل منهما متعامد على الفراغ الجزئى المنشأ بالمتجهات $\underline{z}_3,\ldots,\underline{z}_{(p-1)}$. وجيب تمام الزاوية θ المحصورة بين المتجهيـــن $\underline{\bar{Y}}_{1\cdot m}$ و $\underline{\bar{Y}}_{2\cdot m}$ هو معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين الأول والثانى عند ثبات باقى المتغيرات، طبقاً لـــ (4. 14. 10, 14)، أى أن:

$$(4.\ 14.\ 16):\ \hat{\rho}_{12.m}=r_{12.m}=\text{Cos}\,\theta\,.$$



شكل (4 ـ 14 جـ)

إذا كانـــت $\underline{M}$ هى نقطة تقاطع العمود الساقط من النقطة $\underline{Y}_{1m}$ على المتجه $\bar{\underline{z}}_p$ و $\underline{Y}^*_{2.m}$ نقطة على المتجه $\bar{\underline{Y}}_{2m}$ بحيث يكون المتجه $\overrightarrow{\underline{Y}^*_{2.m}M}$ عمودى على $\underline{z}_p$ أيضا. إذن المـــتجهان $\overrightarrow{M\underline{Y}_{1.m}}$ و $\overrightarrow{M\underline{Y}^*_{2.m}}$ كـــل منهما عمودى على الفراغ المنشأ بالمتجهات $\bar{\underline{z}}_3, \bar{\underline{z}}_4, ..., \bar{\underline{z}}_p$ وإذا رمـــزنا للزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{M\underline{Y}_{1.m}}$ و $\overrightarrow{M\underline{Y}^*_{2.m}}$ بالرمز ϕ فإن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين الأول والثانى عند ثبات باقى المتغيرات هو:

$$(4.\ 14.\ 17):\ r_{12\ mp} = \text{Cos}\,\phi$$

يتضح من (4. 14. 16, 17) أنه للحصول على $r_{12.mp}$ بدلالة $r_{12.m}$ يجب الحصول على الزاوية ϕ بدلالة الزاوية θ.

ويمكـــن الآن إهمـــال العلامة * الموجودة فى $\underline{Y}^*_{2.m}$ ونكتبها $\underline{Y}_{2.m}$ بدون هذه العلامـــة، بتصـــور تحريك النقطة $\underline{Y}^*_{2.m}$ حتى تنطبق على النقطة $\underline{Y}_{2.m}$ وذلك لتبسيط وســـهولة الكـــتابة وهذا لن يؤثر على النتائج التى نتوصل إليها. ومن العلاقة بين أضلاع المثلث (أو من نظرية فيثاغورث) فى المثلث $\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}\,\underline{Y}_{2.m}$ نعلم أن:

$$(4.14.18): \left(\overline{\underline{Y}_{1.m}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)^2 = \left(\overline{O\,\underline{Y}_{1.m}}\right)^2 + \left(\overline{O\,\underline{Y}_{2.m}}\right)^2 - 2\left(\overline{O\,\underline{Y}_{1.m}}\right)\left(\overline{O\,\underline{Y}_{2.m}}\right)\cos\theta$$

ومن المثلث $\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}\,\underline{Y}_{2.m}$:

$$= \left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)^2 + \left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)^2 - 2\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)\cos\phi.$$

ومن المثلث القائم الزاوية $\underline{M}$ $\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}\,\underline{M}$:

$$(4.14.19): \left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)^2 = \left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)^2 + \left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)^2$$

ومن المثلث القائم الزاوية $\underline{M}$ $\underline{O}\,\underline{Y}_{2.m}\,\underline{M}$:

$$(4.14.20): \left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)^2 = \left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)^2 + \left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)^2$$

من (4. 14. 18, 19, 20) نجد أن:

$$\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)\cos\phi = \left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)\cos\theta - \left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)^2$$

أى أن:

$$(4.14.21): \frac{\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)}\cdot\frac{\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)}\cos\phi = \cos\theta - \frac{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)}\cdot\frac{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{2.m}}\right)}.$$

ولكن:

$$\frac{\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)} = \sin\Delta$$

و

$$\frac{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}\right)} = \cos\Delta$$

حيث Δ هى الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}$ و $\bar{\underline{Z}}_p$. وبما أن المتجه $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{Y}_{1.m}}$ متعامد على الفراغ المنشأ بالمتجهات $\bar{\underline{Z}}_3,\ldots,\bar{\underline{Z}}_{(p-1)}$ فإن الزاوية المحصورة

بيــن $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}$ و $\bar{\underline{Z}}_p$ لا تتغــير إذا أسقطنا المتجه $\bar{\underline{Z}}_p$ عموديا على الفراغ المشار إليه. وهذا يتحقق إذا استبدلنا المتجه $\bar{\underline{Z}}_p$ بالمتجه $\bar{\underline{Z}}_{p.m}$.

وجيب تمام الزاوية $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}$ و $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{Y}}_{p.m}$ هو $r_{1p.m}$ إذن:

$$(4.14.22):\ \frac{\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{M}}}{\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}} = r_{1p.m}$$

كما أن:

$$(4.14.23):\ \frac{\left(\overline{\underline{M}\,\underline{Y}}_{1.m}\right)}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}\right)} = \frac{\sqrt{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}\right)^2 - \left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)^2}}{\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{M}}\right)^2}{\left(\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{1.m}\right)^2}} = \sqrt{1 - r_{1p.m}^2}$$

وبالمثل:

$$(4.14.24):\ \frac{\overline{\underline{O}\,\underline{M}}}{\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{2.m}} = r_{2p.m}$$

كما أن:

$$(4.14.25):\ \frac{\overline{\underline{M}\,\underline{Y}}_{2.m}}{\overline{\underline{O}\,\underline{Y}}_{2.m}} = \sqrt{1 - r_{2p.m}^2}$$

وبالـــتعويض عن (4. 14. 22, 23, 24, 25) وكذلك عن (4. 14. 17, 18) في (4. 14. 21) نجد أن:

$$\sqrt{1 - r_{1p.m}^2}\,\sqrt{1 - r_{2p.m}^2}\; r_{12.mp} = r_{12.m} - r_{1p.m}\, r_{2p.m}$$

إذن:

$$(4.14.26):\ r_{12.mp} = \frac{r_{12.m} - r_{1p.m}\, r_{2p.m}}{\sqrt{\left(1 - r_{1p.m}^2\right)\left(1 - r_{2p.m}^2\right)}}$$

وهـي نفـس النتـيجـة (4.10.5) الـتى سـبق الحصـول عليهـا حيـث $n = p$, $q(12n) = q(12p) = m$ و $q(12) = mp$.

ملاحظة (4 ـ 14 ـ 2 أ): إذا استخدمنا بيانات المجتمع بدلاً من بيانات العينة فإن كـل الصيغ السابقة تظل صحيحة مع كتابة ρ بدلاً من r و σ بدلا من s للحصول على صيغ لمعالم المجتمع مماثلة لصيغ إحصاءات العينة.

(4 ـ 14 ـ 3) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط المتعدد:

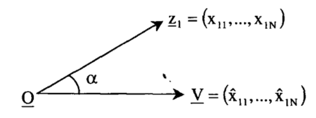
يمكـن تمثـيل معامل الارتباط المتعدد $r_{1(2..p)}$ هندسيا كما فعلنا فى حالة معامل الارتباط الجزئى فى البند (4 ـ 14 ـ 2) وذلك كما يلى:

نعلم من العلاقة (4.11.4) فى معامل الارتباط المتعدد أن:

$$(4.14.27):\ \hat{\rho}_{1(23\ldots p)} = r_{1(23..p)} = \frac{E(x_1\,\hat{x}_1)}{\sqrt{E(x_1^2)E(\hat{x}_1^2)}}$$

حيـث $\hat{x}_1$ (كما فى 4.11.1b) هو أفضـل تقديـر خطـى (طبقا لمبدأ المربعات الصـغرى) يجعـل $\sigma^2_{1.2\ldots p}$ (تبايـن الـباقى $Y_{1.23\ldots p}$) أقل ما يمكن. أى يجعل المقدار $E(x_1 - \hat{x}_1)^2$ نهايـة صغرى. وبافتراض أن النقط $\underline{O}, \underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_p$ معرفة كما فى البـند السـابق (4 ـ 14 ـ 2) يمكـن إنشـاء فـراغ ذو $(p-1)$ بعـداً من المتجهات $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_2}, \ldots, \overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_p}$ فإذا اخترنا نقطة $\underline{V}$ فى الفراغ ذو الـ $(p-1)$ بعداً بحيث يكون طول القطعة المستقيمة $\overline{\underline{z}_1\,\underline{V}}$ أصغر ما يمكن، فإن هذا الاختيار يجعل الزاوية α المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_1}$ و $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$ أصغر ما يمكن حيث:

$$(4.14.28):\ \underline{z}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1l}, \ldots, x_{1N}).$$



والاختيار الذى يحقق هذا الهدف هو أن تكون إحداثيات النقطة $\underline{V}$ هى:

$$(4.14.29): \underline{V} = \left(\hat{x}_{11}, \ldots, \hat{x}_{1I}, \ldots, \hat{x}_{1N}\right)$$

حيث $\hat{x}_{1I}$ هى المشاهدة رقم I للمتغير $\hat{x}_1$.

ومن العلاقة (4.11.1b):

$$(4.14.30): \underline{V} = \left(\sum_{J=2}^{p} \beta_{1J.q(1J)}\, x_{J1}, \ldots, \sum_{J=2}^{p} \beta_{1J.q(1J)}\, x_{JN}\right)$$

حيث $\hat{x}_1$ كما فى (4.11.1b) و x_{JI} هى المشاهدة رقم I للمتغير x_J، $J = 1, 2, \ldots, p$، $I = 1, 2, \ldots, N$.

ومن العلاقة (4.14.27) والعلاقة (4.14.10) يتضح أن معامل الارتباط المتعدد $r_{1(23..p)}$ هو جيب تمام الزاوية المصغرة α المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_1}$ و $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$ أى أن:

$$(4.14.31): \hat{\rho}_{1(23..p)} = r_{1(23...p)} = \text{Cos}\,\alpha$$

حيث α هى الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_1}$ و $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$.

وحيث أن المتجه $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$ يقع فى الفراغ الجزئى ذو الـ $(p-1)$ بعداً، إذن $r_{1(23..p)}$ هو جيب تمام الزاوية المحصورة بين المتجه $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_1}$ والفراغ الجزئى ذو الـ $(p-1)$ بعداً ذاته وذلك لأن خلاف ذلك لن تكون الزاوية نهاية صغرى.

فإذا كان $r_{1(23..p)}(=\text{Cos}\,\alpha) = 0$، أى أن جيب تمام الزاوية بين $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$ والفراغ الجزئى ذو الـ $(p-1)$ بعداً مساوياً للصفر، يكون المتجه $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{V}}$ متعامداً على هذا الفراغ الجزئى وبذلك تكون x_1 غير مرتبطة مع $x_2, \ldots, x_p$ وغير مرتبطة كذلك مع أى علاقة خطية فى هذه المتغيرات.

كذلك إذا كان $r_{1(23...p)}(=\text{Cos}\,\alpha) = 1$ يكون المتجه $\overrightarrow{\underline{O}\,\underline{z}_1}$ واقعاً فى الفراغ الجزئى ذو $(p-1)$ بعداً أى أن x_1 تمثل علاقة خطية صحيحة فى المتغيرات $x_2, \ldots, x_p$.

تمارين الباب الرابع

(4 ـ 1): أثبت صحة العلاقات التالية:

(أ) العلاقة (4. 2. 4).

(ب) العلاقة (4. 2. 7).

(جـ) العلاقة (4. 4. 12).

(4 ـ 2): العلاقة (4. 4. 14) توضح أن معامل الارتباط بين X و Y هو: $\rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y.X}}{\sigma^2_Y}}$، والعلاقة (4. 2. 15) توضح أن: $\rho = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}$. بين أن العلاقتين متكافئتين أى أن: $\sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{Y.X}}{\sigma^2_Y}} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}$.

(4 ـ 3): إذا كانــت معادلة انحدار Y على X معطاة بالعلاقة $Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$ فأثبت أن:

$$E\left[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X\right]^2 = E\left[Y - m_2(X)\right]^2 + E\left[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21} X)\right]^2$$

حيث $m_2(x) = E(Y \mid x)$.

[العلاقة السابقة هى العلاقة (4. 4. 18)]

(4 ـ 4): إذا كان $(X_1, \ldots, X_n)$ متغير عشوائى مشترك و $u(X_2, \ldots, X_n)$ دالة ما فى المتغيرات العشوائية $X_2, \ldots, X_n$ فأثبت أن: $E\left[X_1 - u(x_2, \ldots, x_n)\right]^2$ تكون نهاية صغرى عندما:

$$u(x_2, \ldots, x_n) = E(X_1 \mid x_2, \ldots, x_n).$$

أنظر العلاقة (4. 6. 1c).

(4 ـ 5): أوجد قيمة $\beta_{1k.23...(k-1)(k+1)...n}$ لقيم $k = 2, 3, ..., n$ ، التى تجعل التوقع:

$$E\left[X_1 - \beta_{12.34...n} X_2 - \cdots - \beta_{1n.23...(n-1)} X_2\right]^2$$

نهاية صغرى. أنظر العلاقات (4. 6. 9).

(4 ـ 6): أثبت صحة العلاقة (4. 7. 3).

(4 ـ 7): أثبت صحة العلاقة (4. 7. 6a).

(4 ـ 8): أثبت صحة العلاقة (4. 12. 3).

(4 ـ 9): فـيما يلـى المتوسطات الحسابية $\bar{x}$'s والانحرافات المعيارية σ's ومعاملات الارتباط الكلية ρ's لثلاث متغيرات X_1, X_2, X_3 .

$$\bar{x}_1 = 28.02 \;\;;;\;\; \sigma_1 = 4.42 \;\;;;\;\; \rho_{12} = 0.8$$

$$\bar{x}_2 = 4.91 \;\;;;\;\; \sigma_2 = 1.1 \;\;;;\;\; \rho_{13} = -0.4$$

$$\bar{x}_3 = 594 \;\;;;\;\; \sigma_3 = 85 \;\;;;\;\; \rho_{23} = -0.56$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معـــاملات الارتباط الجزئية $\rho_{12.3}$ و $\rho_{13.2}$ و $\rho_{23.1}$ باستــــخدام العلاقــات (4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) الانحرافات المعيارية (من الدرجة الثانية) $\sigma_{1.23}$ و $\sigma_{2.13}$ و $\sigma_{3.12}$ باستخدام العلاقة (4. 6. 17) ثم باستخدام العلاقات (4. 9. 1, 2, 3, 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(3) معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 .

(4) معـــاملات الارتـــباط المـــتعددة $\rho_{1(23)}$ و $\rho_{2(31)}$ و $\rho_{3(12)}$ وذلك باستخدام العلاقات (4. 11. 7) ثم باستخدام العلاقة (4. 9. 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(4 ـ 10): لدينا 4 متغيرات عشوائية هى:

X_1 : عـــدد وفـــيات الأطفال الرضع الذين يقل عمرهم عن عام واحد لكل ألف حالة ولادة ـــ أى X_1 هى معدل وفيات الأطفال الرضع.

X_2 : عدد السيدات المتزوجات للمرة الثانية فى الألف حالة زواج.

X_3 : عدد وفيات الأشخاص الذين تقل أعمارهم عن 5 سنوات لكل عشرة آلاف.

X_4 : عـــدد الأشخاص الذين يعيشون اثنين أو أكثر فى حجرة واحدة (لكل ألف نسمة).

فـــإذا كانـــت البـــيانات التالية تمثل هذه المتغيرات فى 30 قرية كبيرة فى إحدى الدول:

$$\overline{X}_1 = 164 \;;;\; \sigma_1 = 20 \;;;\; \rho_{12} = 0.49$$

$$\overline{X}_2 = 158 \;;;\; \sigma_2 = 47.9 \;;;\; \rho_{13} = 0.78$$

$$\overline{X}_3 = 143 \;;;\; \sigma_3 = 22.4 \;;;\; \rho_{14} = 0.20$$

$$\overline{X}_4 = 205 \;;;\; \sigma_4 = 130$$

$$\rho_{23} = 0.15 \;;\; \rho_{24} = -0.37 \;;\; \rho_{34} = 0.23$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معـــاملات الارتباط الجزئية $\rho_{12.34}$ و $\rho_{13.24}$ و $\rho_{14.23}$ و $\rho_{23.14}$ و $\rho_{24.13}$ و $\rho_{34.12}$ باســـتخدام العلاقات (4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) الانحـــرافات المعـــيارية (من الدرجة الثالثة) $\sigma_{1.234}$ و $\sigma_{2.134}$ و $\sigma_{3.124}$ و $\sigma_{4.123}$ باستخدام العلاقات (4. 6. 17) ثم باستخدام العلاقات (4. 9. 1, 2, 3, 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(3) معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 و X_4.

(4) معاملات الارتباط المتعدد $\rho_{1(23)}$ و $\rho_{1(234)}$ وذلك باستخدام العلاقات (4. 11. 7) ثم باستخدام العلاقة (4. 9. 4) ومطابقة النتائج.

(4 ـ 11): فـــى بعـــض المـــدن الأمريكية الكبيرة بالولايات المتحدة الأمريكية فى إحدى السنوات كانت المتغيرات X_1 و X_2 و X_3 و X_4 و X_5 تعبر عما يلى:

X_1 : معدل الجريمة.

X_2 : النسبة المئوية للذكور فى المجتمع.

X_3 : النسبة المئوية للمواطنين (بالتجنس) الذكور فى المجتمع.

X_4 : عدد الأولاد (أقل من 5 سنوات) لكل ألف امرأة متزوجة فى العمر من 15 إلى 44 سنة.

X_5 : عدد الأشخاص الذين يمارسون الشعائر الدينية بانتظام.

وبتتبع هذه المتغيرات فى عدد كبير من المدن حصلنا على النتائج التالية:

$$\overline{X}_1 = 19.9 \quad ;; \ \sigma_1 = 7.9 \quad ;; \ \rho_{12} = 0.44$$

$$\overline{X}_2 = 49.2 \quad ;; \ \sigma_2 = 1.3 \quad ;; \ \rho_{13} = -0.34$$

$$\overline{X}_3 = 10.2 \quad ;; \ \sigma_3 = 4.6 \quad ;; \ \rho_{14} = -0.31$$

$$\overline{X}_4 = 481.4 \ ;; \ \sigma_4 = 74.4 \ ;; \ \rho_{15} = -0.14$$

$$\overline{X}_5 = 41.6 \quad ;; \ \sigma_5 = 10.8 \ ;; \rho_{23} = 0.25$$

$$\rho_{24} = -0.19 \ ; \ \rho_{25} = -0.35 \ ; \ \rho_{34} = 0.44$$
$$\rho_{35} = 0.33 \ , \ \rho_{45} = 0.85$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معـــاملات الارتباط الجزئية $\rho_{15.3}$ و $\rho_{15.4}$ و $\rho_{15.34}$ باســـتخدام العلاقـــات (4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) معادلة انحدار X_1 على المتغيرات الأربعة الباقية.

(3) معامل الارتباط المتعدد $\rho_{1(2345)}$ باستخدام العلاقات (4. 11. 7) ثم بالعلاقـــة (4. 9. 4) ومطابقة النتائج.

(4) ناقش تأثير الانتظام فى ممارسة الشعائر الدينية على الجريمة.

(4 ــ 12): فى حالة وجود n من المتغيرات بين أن:

(1) عدد معاملات الارتباط الكلية (من الدرجة صفر) = $\binom{n}{2}$.

(2) عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الأولى = $(n-2)\binom{n}{2}$.

(3) عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الثانية $= \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

(4) عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة $k = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k}$.

(5) عدد معاملات الارتباط بصفة عامة $= n(n-1)2^{(n-3)}$.

(6) عدد معاملات الانحدار بصفة عامة $= n(n-1)2^{(n-2)}$.

(7) عدد معاملات الارتباط المتعدد من الدرجة $k = n\binom{n-1}{k}$.

(8) العدد الإجمالى لمعاملات الارتباط المتعدد $= n\left[2^{n-1}-1\right]$.

(4 ـ 13): إذا كانــت جمــيع معاملات الارتباط من الدرجة صفر متساوية وتساوى ρ فأثبــت أن جمــيع معــاملات الارتباط الجزئية من الدرجة k متساوية وتساوى $\frac{\rho}{(1+k\rho)}$. وتحــت نفس الشروط إذا كانت جميع معاملات الارتباط المتساوية (ρ) سالبة وعدد المتغيرات المشاهدة n فأثبت أن نهاية القيمة ρ تحقق العلاقة التالية: $|\rho| \le \frac{1}{n-1}$.

(4 ـ 14):(أ) إذا كانــت: $X_3 = aX_1 + bX_2$ للمتغيرات الثلاثة X_1, X_2, X_3. أوجد معاملات الارتباط الجزئية $\rho_{23.1}$ و $\rho_{12.3}$ و $\rho_{13.2}$.

(ب) وإذا كانــت: $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ فــأوجد معــاملات الارتــباط الجزئية: $\rho_{23.1}$ و $\rho_{13.2}$ و $\rho_{12.3}$.

(4 ـ 15): أثبت صحة العلاقة (4. 11. 9).

الفصل الخامس

الدوال المميزة

Characteristic Functions (C. F.'s)

(5 ـ 1) تعريف وخصائص الدوال المميزة:

في هذا الباب نقدم مبادئ النظرية العامة للدوال المميزة، فالدالة المميزة ما هي إلا أداة رياضية وإحصائية هامة وتكتسب أهميتها مما لها من خصائص رياضية مفيدة، سواء في تحديد عزوم المتغيرات العشوائية أو تحديد توزيعاتها الاحتمالية أو دراسة استقلال هذه المتغيرات. وبصفة خاصة يعتبر هذا الجزء الذي نقدمه من نظرية الدوال المميزة حالة خاصة من النظرية العامة لتحويلات فورييه، حيث أن الدوال التي نتعامل معها في دراستنا ما هي إلا دوال كثافة احتمال أو توزيعات احتمالية في حين أن النظرية العامة لتحويلات فورييه تتعامل مع أي دوال رياضية بصفة عامة دون تخصيص.

(5 ـ 1 ـ 1) تعريف الدالة المميزة:

إذا كان X متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ فإننا نعرف الدالة المميزة (C. F.) للمتغير X (أو للتوزيع $F(x)$) بأنها توقع المتغير العشوائي e^{itx} حيث $i=\sqrt{-1}$ و t عدد حقيقي، ونرمز لها بالرمز $\phi(t)$ حيث $\phi(t)$ دالة معرفة لجميع قيم t. وبما أن $e^{itx}=Cos\,t\,x+i\,Sin\,t\,x$ إذن يمكن كتابة $\phi(t)$ في الصورة التالية:

$$(5.1.1):\ \phi(t)=E\left(e^{itx}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,d\,F(x)\ \ ....\ \ (a)$$

$$=u(t)+i\,v(t)\ \ ....\qquad (b)$$

حيث:

$$(5.1.2):\ u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Cos\,(t\,x)\,d\,F(x)\ \ ...\ \ (a)$$

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Sin\,(t\,x)\,d\,F(x)\ \ ...\ \ (b)$$

فــإذا كــان الــتوزيع الاحتمالى $F(x)$ توزيعاً مستمراً وله دالة كثافة احتمال $f(x)=F'(x)$ فإن:

$$(5.1.3):\ \phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

وإذا كانت $F(x)$ دالة قفازة بقفزات P_r عند النقطة $x=x_r$ فإن:

$$(5.1.4):\ \phi(t)=\sum_r P_r\, e^{itx_r}$$

ومن الحقيقة الرياضية التالية:

$\left|e^{itx}\right|=1$ لجميع قيم t الحقيقية نستنتج أن:

$$(5.1.5):\ \left|\phi(t)\right|\le 1 \qquad ,,\ (-\infty<t<\infty)$$

أى أن التكامل (5. 1. 1) دائماً موجود لجميع التوزيعات الاحتمالية وهذا يوضح أن الدالة المميزة دائماً موجودة ومعرفة لجميع المتغيرات العشوائية.

(5 ـ 1 ـ 2) بعض الخصائص الهامة للدالة المميزة:

إذا كانــت $\phi(t)=u(t)+i\,v(t)$ هــى الدالــة المميزة للمتغير العشوائى X ذى الــتوزيع الاحــتمالى $F(x)$ فيمكن تقديم بعض الخصائص الهامة للدالة $\phi(t)$ من خلال النظريات التالية:

نظرية (5 ـ 1 ـ 2 أ):

الدالة المميزة $\phi(t)$ دالة مستمرة استمراراً منتظماً Uniformally Continuous لجميع قيم t الحقيقية وتحقق العلاقة التالية:

$$(5.1.6):\ \phi(0)=1$$

(الإثبات)

فــى الواقــع العلاقــة (5. 1. 6) تتضح مباشرة من تعريف الدالة $\phi(t)$، فبوضع $t = 0$ فى العلاقة (5. 1. 1) نجد أن:

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot d\,F(x) = 1$$

كذلــك يمكن إثبات الاستمرار المنتظم للدالة $\phi(t)$ بإثبات أنه لكل عدد موجب $\in$ يمكــن إثبات أن القيمة الموجبة للفرق $\phi(t+h)-\phi(t)$ أقل من $\in$ حيث h عدد صغير موجب وذلك لجميع قيم t الحقيقية. إذ أن الفرق

$$\phi(t+h)-\phi(t) = \int e^{itx}\left(e^{ixh}-1\right) d\,F(x)$$

$$\left|\phi(t+h)-\phi(t)\right| \le \int \left|e^{ixh}-1\right| d\,F(x)$$

وبفــرض أن $\in > 0$ عــدد حقيقى اختيارى arbitrary يمكن اختيار عدد A بحيث يكون كبيراً بما يكفى لتحقيق العلاقة التالية

$$\int_{|x|>A} d\,F(x) < \frac{\in}{4}$$

كما يمكن اختيار h صغيرة بما يكفى لتحقيق العلاقة

$$\left|\left(e^{ixh}-1\right)\right| < \frac{\in}{2}$$

وذلك لجميع قيم $|x| < A$.

إذن:

$$\left|\phi(t+h)-\phi(t)\right| \le \int_{-A}^{A} \left|e^{ixh}-1\right| d\,F(x) + 2\int_{|x|\ge A} d\,F(x) \le \in$$

وهذا يثبت صحة النظرية.

هـ. ط. ث

نظرية (5 ـ 1 ـ 2 ب):

إذا كان $Y = a\,X + b$ حيث X و Y متغيران عشوائيان و a و b ثابتان فإن:

$$(5.1.7):\ \phi_y(t) = e^{itb}\,\phi_x(a\,t)$$

حيث $\phi_x(t)$ و $\phi_y(t)$ هما الدالتان المميزتان للمتغيران X و Y على الترتيب.

(الإثبات)

$$\phi_y(t) = E\left[e^{it(aX+b)}\right] = e^{itb}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iatx}\,dF(x) = e^{itb}\,\phi_x(a\,t)$$

هـ. ط. ث.

نتيجة (5 ـ 1 ـ 2 أ): وكحالة خاصة للنظرية السابقة عندما $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ حيث μ ، σ^2 هما توقع وتباين X نجد أن:

$$\phi_y(t) = e^{-it\mu/\sigma}\,\phi_x\left(\tfrac{t}{\sigma}\right)$$

نتيجة (5 ـ 1 ـ 2 ب): إذا كان X متغير عشوائى دالته المميزة $\phi_x(t)$ فإن الكمية المرافقة للدالة المميزة $\phi_x(t)$ والتى نرمز لها بالرمز $\overline{\phi}_x(t) = u_x(t) - i\,v_x(t)$ هى الدالة المميزة للمتغير $(-X)$. ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة بوضع $b = 0$ و $a = -1$ فى النظرية السابقة أى أن:

$$(5.1.8):\ \phi_{-x}(t) = \overline{\phi}_x(t) = u_x(t) - i\,v_x(t) = \phi_x(-t)$$

نظرية (5 ـ 1 ـ 2جـ):

الدالة المميزة $\phi(t)$ للمتغير العشوائى X تكون دالة حقيقية، إذا وفقط إذا، كانت X لها توزيع احتمالى $F(x)$ متماثل حول الصفر، أى إذا كانت:

$$F(x) = 1 - F(-x+0)$$

(الإثبات)

الشرط "إذا" "شرط الكفاية":

نفــرض أن X متغــير عشوائى له توزيع احتمالى متماثل حول الصفر وأن دالة توزيعه الاحتمالى هى $F(x)$ إذن:

$$\phi(t) = u(t) + i\, v(t)$$

حيــث $u(t)$ و $v(t)$ كمــا فــى (2 .1 .5) وحيــث أن $\mathrm{Sin}(t\,x)$ دالة فردية و $\mathrm{Cos}(t\,x)$ دالة زوجية وتوزيع X متماثلا إذن: $v(t)$ يمثل تكامل دالة فردية فى الفترة $(-\infty, \infty)$ فهو يساوى الصفر كما أن:

$$u(t) = 2\int_0^{\infty} \mathrm{Cos}(t\,x)\, d\,F(x) \neq 0$$

إذن $\phi(t)$ دالة حقيقية.

الشرط "وفقط إذا" "شرط اللزوم":

لكــى تكون $\phi(t)$ دالة حقيقية لابد أن تكون $v(t) = 0$ و $u(t) \neq 0$ وهذا يتطلب أن تكــون الدالة المكاملة فى $v(t)$ فردية وبالنسبة لــ $u(t)$ زوجية وهذا يحدث فقط إذا كان توزيع X متماثلا حول الصفر.

هـــ. ط. ث

نظرية (5 ــ 1 ــ 2 د):

إذا كــان العزم الرائى حول الصفر μ'_r للمتغير العشوائى X موجود Exists، فإن الدالـــة المميزة $\phi(t)$ للمتغير X تكون قابلة للتفاضل r مرة، ويمكن لجميع قيم $r \geq J$ إيجاد μ'_J بالصيغة التالية:

$$(5.1.9):\ \mu'_J = (i)^{-J}\, \phi^{(J)}(0)$$

حيث $\phi^{(J)}(0)$ هى المشتقة التفاضلية من الدرجة J للدالة $\phi(t)$ عندما $t = 0$.

(الإثبات)

بمفاضلة الدالة الموجودة تحت علامة التكامل فى العلاقة (5. 1. 1) J مرة $(J \leq r)$ نحصل على التكامل التالى:

$$(5.\,1.\,10):\ \int_{-\infty}^{\infty} i^J\, x^J\, e^{itx}\, d\,F(x) = \phi^{(J)}(t)$$

وحيث أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| i^J\, x^J\, e^{itx} \right| d\,F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x^J \right| d\,F(x) = \nu'_J$$

حيث ν_J هو العزم المطلق حول الصفر للمتغير X ومن فرض النظرية يكون μ'_J موجود وبالتبعية يكون ν'_J موجود. وعلى هذا يكون التكامل المعطى بالعلاقة (5. 1. 10) موجود وبالتالى يكون من المسموح به مفاضلة الصيغة الخاصة بالدالة $\phi(t)$ تحت علامة التكامل. وبوضع $t = 0$ فى (5. 1. 10) نجد أن

$$\phi^{(J)}(0) = i^J \int x^J\, d\,F(x) = i^J\, \mu'_J$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (5. 1. 9).

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 ـ 1 ـ 2 أ): النظرية السابقة تعنى أنه إذا كان μ'_J موجود فإنه يساوى $(i)^{-J}\, \phi^{(J)}(0)$ ولكن العكس غير مؤكد، أى أن وجود $\phi^{(J)}(0)$ لا يعنى وجود μ'_J، ومعنى هذا أن هذه النظرية تقدم شرطاً كافياً لوجود المشتقة $\phi^{(J)}(0)$ من الدرجة J عندما $t = 0$ هذا الشرط هو وجود μ'_J، ولكنه ليس شرطاً ضرورياً لوجود $\phi^{(J)}(0)$. ويمكن إثبات أن هذا الشرط (أى وجود μ'_J) يعتبر كافياً ولازماً (ضرورياً) عندما تكون J عدد زوجى. وهذا ما سنقدمه فى النظرية التالية.

نظرية (5 ـ 1 ـ 2 هـ):

إذا كانت الدالة المميزة $\phi(t)$ للمتغير العشوائى X لها مشتقة تفاضلية محدودة (موجودة) من الدرجة الزوجية $2m$ عند النقطة $t = 0$، فإن العزوم من جميع الدرجات $1, 2, ..., 2m$ للمتغير X تكون موجودة.

(الإثبات)

بتطبيق المبادىء الأولية لعملية التفاضل باستخدام الفروق المتماثلة نجد أن المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $\phi(t)$ هى:

$$\phi'(t)=\lim_{h\to 0}\left[\Delta\,\phi(t)/2\,h\right].$$

حيث

$$\Delta\phi(t)=\phi(t+h)-\phi(t-h)$$

ومن (5. 1. 1)

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left(e^{ihx}-e^{-ihx}\right)d\,F(x)$$

إذن:

$$(5.\,1.\,11):\ \phi'(t)=\lim_{h\to 0}\Delta\phi(t)/2h\quad ....\qquad (a)$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left[\frac{e^{ihx}-e^{-ihx}}{2\,h}\right]d\,F(x)\ ....\ (b)$$

وبالمثل:

$$\phi''(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\,\phi'(t)}{2\,h}=\lim_{h\to 0}\tfrac{1}{2h}\left[\phi'(t+h)-\phi'(t-h)\right]$$

ومن (5. 1. 11) نجد أن:

$$\phi''(t)=\lim_{h\to 0}\tfrac{1}{2h}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\,\phi(t+h)}{2\,h}-\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\,\phi(t-h)}{2\,h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\tfrac{1}{(2h)^2}\Delta\left[\Delta\,\phi(t)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2\,\phi(t)}{(2h)^2}$$

وهكذا يمكن بالاستنتاج الرياضى إثبات أن:

$$\phi^{(2m)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{2m}\,\phi(t)}{(2h)^{2m}}$$

وبالتعويض عن $\phi(t)$ من (5. 1. 1) نحصل على العلاقة التالية:

$$(5.1.12):\ \phi^{(2m)}(t)=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^{2m}\left(e^{itx}\right)}{(2h)^{2m}}\,dF(x)$$

ولكن الفرق المتماثل $\Delta^{2m}\left(e^{itx}\right)$ يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$(5.1.13):\ \Delta\left(e^{itx}\right)=e^{i(t+h)x}-e^{i(t-h)x}=e^{itx}\left(e^{ihx}-e^{-ihx}\right)$$

و

$$\Delta^{2}\left(e^{itx}\right)=\Delta\left[\Delta\left(e^{itx}\right)\right]=\left(e^{ihx}-e^{-ihx}\right)\Delta\left(e^{itx}\right)$$
$$=e^{itx}\left(e^{ihx}-e^{-ihx}\right)^{2}$$

وهكذا بالاستنتاج الرياضى نجد أن:

$$\Delta^{2m}\left(e^{itx}\right)=e^{itx}\left(e^{ihx}-e^{-ihx}\right)^{2m}$$

وبالتعويض عن $\Delta^{2m}\left(e^{itx}\right)$ في معادلة (5. 1. 12) نجد أن:

$$(5.1.14):\ \phi^{(2m)}(t)=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left(\frac{e^{ihx}-e^{-ihx}}{2h}\right)^{2m}dF(x)$$

إذن:

$$(5.1.15):\ \phi^{(2m)}(0)=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ihx}-e^{-ihx}}{2h}\right)^{2m}dF(x)$$

وبما أن:

$$e^{ihx}-e^{-ihx}=2i\,\mathrm{Sin}\,hx$$

و

$$(i)^{2m}=(-1)^{m}$$

إذن:

$$(5.1.16):\ \left|\phi^{(2m)}(0)\right|=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,hx}{h}\right)^{2m}dF(x)$$

ولأى فترة محدودة (a,b) نجد أن:

$$(5.1.17a):\ \lim_{h\to 0}\int_a^b\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)^{2m} dF(x)=\int_a^b\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)^{2m} dF(x)$$

$$=\int_a^b x^{2m}\, dF(x)$$

وفـــى العلاقة السابقة أمكن إبدال علامتى النهاية والتكامل لأن الدالة $\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)$ دالـــة محـــدودة بانتظام فى الفترة المحدودة (a,b) كما أن: $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)=x$ وهذه النهاية محدودة كذلك طالما أن $a<x<b$. إذن:

$$(5.1.17b):\ \int_a^b x^{2m}\, dF(x)=\lim_{h\to 0}\int_a^b\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)^{2m} dF(x)$$

$$\leq \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Sin} hx}{h}\right)^{2m} dF(x)$$

ومن $(5.1.16)$

$$=\left|\phi^{(2m)}(0)\right|$$

إذن:

$$(5.1.18):\ \int_a^b x^{2m}\, dF(x)\leq\left|\phi^{(2m)}(0)\right|$$

وبهذا أثبتنا أن $\int_a^b x^{2m}\, dF(x)$ أقل من أو يساوى كمية لا تعتمد على a أو b هى الكمية المطلقة $\left|\phi^{(2m)}(0)\right|$ وهى كمية محدودة حسب فرض النظرية، كما أن كل من a و b ثوابـــت اختيارية يمكن اختيارها كبيرة كبراً كافياً كما نشاء، وهذا يترتب عليه أن العزم

الزوجى μ'_{2m} يكون موجود لأنه يكون دائماً أقل من كمية محدودة إذ عندما $a \to -\infty$ و $b \to \infty$ يتضح من العلاقة (5. 1. 18) أن:

$$\mu'_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m}\, d\,F(x) \le \left| \phi^{(2m)}(0) \right|.$$

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 ـ 1 ـ 2 ب): وجود المشتقة الفردية $\phi^{(2m+1)}(t)$ عند النقطة $t = 0$ ليس كافياً لوجود العزم الفردى μ'_{2m+1} وذلك لأن العلاقة (5. 1. 17) لا تتحقق إلا إذا كانت الكمية $\left(\frac{Sin\,hx}{h}\right)$ مرفوعة إلى قوة زوجية حتى تكون كمية موجبة أما إذا كانت مرفوعة إلى قوة فردية $(2m \pm 1)$ مثلاً فهذا لا يضمن صحة العلاقة (5. 1. 17b).

(5 ـ 1 ـ 3) الدالة المولدة للعزوم:

The Moment Generating Function (m. g. f.):

الدالة المولدة للعزوم دالة رياضية يمكن الحصول عليها باستخدام توزيع المتغير العشوائى مباشرة كما يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة باستخدام العلاقة (5. 1. 19) التالية ونرمز لها بالرمز $M(t)$ إذ هى دالة فى العدد الحقيقى t. وقد سميت $M(t)$ بالدالة المولدة للعزوم لأن عزوم المتغير العشوائى تظهر كمعاملات لقوى t فى مفكوك $M(t)$ بدلالة قوى t التصاعدية.

تعريف (5 ـ 1 ـ 3 أ) "الدالة المولدة للعزوم":

إذا كان X متغير عشوائى له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X تعرف بأنها توقع المتغير e^{tX}، إذا كان هذا التوقع موجود، وذلك لجميع قيم t الحقيقية فى الفترة $-h < t < h$ ، $h > 0$. ونرمز لها بالرمز $M(t)$ وهى بذلك يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة $\phi(t)$ بكتابة $\left(\frac{t}{i}\right)$ بدلاً من t كما يلى:

$$\text{(5. 1. 19): } M(t) = \phi\left(\tfrac{t}{i}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, d\,F(x) \quad \ldots \quad (a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad \ldots \quad (b)$$

إذا كان X متغير مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$

$$= \sum_r e^{tx_r} P(x_r) \quad ... \quad (c)$$

إذا كـــان X متغـــير مـــتقطع يأخذ القيم $X_1, X_2, ...$ ودالة احتماله عند النقطة $X = x_r$ هى $P(x_r)$.

والدالـــة المولـــدة للعـــزوم $M(t)$ ليســـت موجودة دائما بالنسبة لكل التوزيعات الاحتمالية ولجميع قيم t مثل الدالة المميزة، لذلك فنحن نهتم عادة بالدالة $M(t)$ فى جوار ما حول النقطة $t = 0$ أى لجميع قيم t التى تحقق العلاقة $-h < t < h$ حيث $h > 0$. ومع ذلك إذا كانت الدالة $M(t)$ موجودة فإنها تكون دالة مستمرة وتفاضلية بالنسبة لـــ t فى الفترة $-h < t < h$، وإذا كان العزم الرائى حول الصفر μ'_r للمتغير X موجود فإن الدالـــة المولدة للعزوم $M(t)$ تكون قابلة للتفاضل r مرة، ويمكن لجميع قيم $r \geq J$ إيجاد μ'_J بالصيغة التالية:

$$(5.1.20): \mu'_J = M^{(J)}(0)$$

والعلاقـــة الســـابقة هـــى التى تقابل العلاقة (5. 1. 9) بالنسبة للدالة المميزة. ومن الواضح أن:

$$(5.1.21): M(0) = 1$$

(5 ــ 1 ــ 4) الدالة المولدة للاحتمالات:

The Probability Generating Function (p. g. f.):

المتغـــيرات العشوائية المتقطعة التى تأخذ قيم صحيحة $0,1,2,...$ دائما لها أهمية خاصـــة من بين كل المتغيرات المتقطعة بصفة عامة. ودراسة خصائص هذه المتغيرات يمكـــن تبسيطها باستخدام أداة رياضية هامة تسمى بالدالة المولدة للاحتمالات. وهى دالة يمكن استخدامها فى إيجاد العزوم العاملية لمثل هذه المتغيرات بطريقة ميسرة لذلك فأحيانا نطلق عليها اسم الدالة المولدة للعزوم العاملية.

تعريف (5 ــ 1 ــ 4 أ) "الدالة المولدة للاحتمالات":

إذا كان المتغير العشوائى X من النوع المتقطع الذى يأخذ القيم $0,1,2,...$ ودالة احتماله $P^*(x)$ فإن الدالة:

$$\textbf{(5.1.22)}: P(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x P^*(x) \quad ; \quad -1 \leq t \leq 1$$

تسمى بالدالة المولدة للاحتمالات.

والدالـــة المولـــدة للاحتمالات، إذا كانت موجودة، يمكن الحصول عليها من الدالة المولـــدة للعزوم بوضع $\ln t$ بدلاً من t فى العلاقة (5. 1. 19 ; c) آخذين فى الاعتبار أن x_r هى القيم $0, 1, 2, \ldots$ وذلك كما يلى:

$$(5.\ 1.\ 23):\ P(t) = M(\ln t) = E(t^x) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x\ P^*(x).$$

ومن العلاقة السابقة يتضح أنه إذا أمكن إيجاد مفكوك $P(t)$ فى شكل متسلسلة فى قـــوى t التصـــاعدية فـــإن معامل t^x هو $P(x)$ أى هو دالة احتمال المتغير X. والدالة المولدة للاحتمالات سميت بهذا الاسم لأنها تتميز بخاصيتين هامتين هما:

(1) معامل t^x فى مفكوك $P(t)$ هو احتمال أن المتغير X يأخذ القيمة x.

(2) $P(1) = 1$ أى يساوى مجموع الاحتمالات.

والدالـــة المولدة للاحتمالات مفيدة أيضاً فى تحديد العزوم العاملية للمتغير المتقطع X حيث يمكن استخدام العلاقة:

$$(5.\ 1.\ 24):\ P^{(r)}(t)\big|_{t=1} = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

حيـــث $P^{(r)}(t)\big|_{t=1}$ هـــو تفاضـــل الدالة $P(t)$ مرات عددها r ثم وضع $t = 1$، فنحصل بذلك على العزم العاملى من الدرجة r للمتغير X والذى تمثله العلاقة السابقة فى جانبها الأيمن.

وإذا كتبـــنا $(1+t)$ بـــدلاً مـــن t فى العلاقة (5. 1. 22) أو فى العلاقة (5. 1. 23) نحصـــل علـــى دالـــة تعـــرف باســـم "الدالـــة المولـــدة للعـــزوم العاملـــية" "Factorial Moment Generating Function" نرمز لها بالرمز $P(1+t)$ حيث:

$$(5.\ 1.\ 25):\ P(1+t) = M[\ln(1+t)] = \sum_{x=0}^{\infty} (1+t)^x\ P^*(x)$$

حيث $P^*(x)$ هى دالة احتمال X.

ويمكن تحديد العزوم العاملية من هذه الدالة باستخدام العلاقة التالية:

$$(5.\ 1.\ 26):\ P^{(r)}(1+t)\big|_{t=0} = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

حيـــث $P^{(r)}(1+t)|_{t=0}$ هــو تفاضل $P(1+t)$ بالنسبة لــ t مرات عددها r ثم وضع $t=0$ فنحصل على العزم العاملى من الدرجة r للمتغير المتقطع X.

(5 ـ 1 ـ 5) مفكوك الدالة المميزة فى صورة متسلسلة ماكلورين بدلالة العزوم:

إذا كـــان العـــزم الرائى μ'_r للمتغير العشوائى موجود فيمكن إيجاد مفكوك الدالة المميـــزة $\phi(t)$ بدلالة قوى t التصاعدية حول النقطة $t=0$ فى شكل متسلسلة ماكلورين Maclaurin's Series حيـــث يكون العزم μ'_r هو معامل $\frac{(it)^r}{r!}$ فى المفكوك مع وجود حد باقٍ يؤول إلى الصفر عندما $t \to 0$. والنظرية التالية تقدم لنا هذا المفكوك.

نظرية (5 ـ 1 ـ 5 أ):

إذا كـــان العـــزم الـــرائى μ'_r للمتغـــير العشوائى X موجود (Exists) فإن الدالة المميـــزة $\phi(t)$ للمتغـــير X يمكـــن وضعها فى شكل متسلسلة ماكلورين بدلالة قوى t التصاعدية حول النقطة $t=0$ (أى فى جوار ما لهذه النقطة) وذلك فى الصورة التالية:

$$(5.\ 1.\ 27):\ \phi(t) = 1 + \sum_{J=1}^{r} \frac{(it)^J}{J!}\mu'_J + 0(t^r) \quad (as\ t \to 0)$$

حيث $\lim_{t\to 0} \frac{0(t^r)}{t^r} = 0$

(الإثبات)

فـــى تعريف الدالة المميزة فى علاقة (5. 1. 1, a) نلاحظ أن الدالة e^{itx} الموجودة تحـــت علامة التكامل دالة مستمرة ومحدودة لجميع قيم t و x (حيث $\left|e^{itx}\right| \le 1$) كما أن المشتقة التفاضلية من الدرجة r $\left(\frac{d^r e^{itx}}{dt^r}\right)$ دالة مستمرة لأى عدد صحيح موجب r ولأى عدد حقيقى t لذلك يمكن وضعها فى شكل مفكوك ماكلورين على الصورة التالية:

$$e^{itx} = 1 + \sum_{J=1}^{r-1} \frac{(itx)^J}{J!} + \frac{(itx)^r}{r!} e^{it'x} \quad , 0 < t' < t$$

وبالـــتعويض عن العلاقة السابقة فى (5. 1. 1, a) يمكن كتابة الدالة المميزة $\phi(t)$ فى الصورة التالية:

$$(5.1.28):\ \phi(t) = 1 + \sum_{J=1}^{r-1} \frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J + \frac{(i\,t)^r}{r!}\mu'_r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu'_r} x^r e^{i t' x}\, d\,F(x)\ ,\ 0 < t' < t$$

$$= 1 + \sum_{J=1}^{r-1} \frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J + \frac{(i\,t)^r}{r!}\mu'_r Q(t,r)$$

حيث

$$(5.1.29):\ Q(t,r) = \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{i t' x}\, d\,F(x)\ ,\ 0 < t' < t.$$

نلاحظ أن:

$$|\,Q(t,r)\,| \le \frac{\nu'_r}{|\,\mu'_r\,|}$$

حيث ν'_r هو العزم المطلق من الدرجة r. إذن $Q(t,r)$ كمية محدودة حيث أن كل من μ'_r و ν_r محدودة. كما أن:

$$\lim_{t\to 0} Q(t,r) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{i t' x}\, d\,F(x)$$

لو أدخلنا علامة النهاية داخل علامة التكامل سيكون نتيجة التكامل السابق تساوى $\frac{\mu'_r}{\mu'_r} = 1$ ومادام مبادلة علامتى النهاية والتكامل يؤدى إلى تكامل محدود فهو مسموح به، إذن:

$$(5.1.30):\ \lim_{t\to 0} Q(t,r) = \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0} x^r e^{i t' x}\, d\,F(x)\ ;\ t' \to 0 \text{ as } t \to 0.$$

$$= \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, d\,F(x) = 1$$

وبوضع:

$$e^{it'x} = 1 + \left(e^{it'x} - 1\right)$$

يمكن كتابة $Q(t, r)$ من (5. 1. 29) فى الصورة التالية:

$$(5.\ 1.\ 31):\ Q(t,r) = 1 + H(t,r)$$

حيث:

$$(5.\ 1.\ 32):\ H(t,r) = \frac{1}{\mu'_r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{it'x} - 1\right)d\,F(x).$$

و

$$(5.\ 1.\ 33):\ \lim_{t\to 0} H(t,r) = 0$$

إذن من (28 .1 .5) و(32 .1 .5) نجد أن:

$$(5.\ 1.\ 34):\ \phi(t) = 1 + \sum_{J=1}^{r}\frac{(i\,t)^r}{r!}\mu'_J + \frac{(i\,t)^r}{r!}\mu'_r\,H(t,r)$$

حيث:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^r}\frac{(i\,t)^r}{r!}\mu'_r\,H(t,r) = 0$$

لهذا يمكن كتابة (34 .1 .5) فى الصورة المبسطة التالية:

$$(5.\ 1.\ 35):\ \phi(t) = 1 + \sum_{J=1}^{r}\frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J + 0\left(t^r\right)$$

حيث

$$\lim_{t\to 0}\frac{0\left(t^r\right)}{t^r} = 0$$

هـ. ط. ث

وإذا كانــت كل العزوم μ'_J موجودة لجميع قيم $J = 1, 2, 3, \ldots$ فيمكن كتابة الدالة المميزة $\phi(t)$ المعطاة بالعلاقة (27 .1 .5) فى الصورة التالية:

$$(5.\ 1.\ 36):\ \phi(t) = 1 + \sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J\,.$$

ويمكن إيجاد مفكوك الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ فى شكل متسلسلة ماكلورين مثل الدالة المميزة $\phi(t)$ تماماً كما فى العلاقتين (5. 1. 35) و(5. 1. 36) فى الصورة التالية:

$$(5.\,1.\,37):\; M(t)=\phi\left(\tfrac{t}{i}\right)=1+\sum_{J=1}^{r}\frac{t^{J}}{J!}\mu_J'+0\left(t^{r}\right)$$

حيث:

$$\lim_{t\to 0}\frac{0\left(t^{r}\right)}{t^{r}}=0$$

وفى حالة وجود كل العزوم تكون:

$$(5.\,1.\,38):\; M(t)=1+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{t^{r}}{r!}\mu_J' \,.$$

ملاحظة (5 ــ 1 ــ 5 أ) الدالة المميزة المركزية Central C. F.:

فـــى نظـــرية (5 ــ 1 ــ 5 أ) الســـابقة قدمنا مفكوك الدالة المميزة $\phi(t)$ بدلالة العـــزوم حـــول الصـــفر والدالة $\phi(t)$ هى توقع المتغير e^{itX} وهى تعتبر دالة مولدة للعـــزوم حـــول الصفر ولكن إذا اعتبرنا المتغير $e^{it(X-\mu)}$ حيث μ هى توقع X فيمكن تقديـــم دالة مولدة للعزوم المركزية لنرمز لها بالرمز $\phi_C\,(t)$ حيث نعرف هذه الدالة بالعلاقة التالية:

$$(5.\,1.\,39):\; \phi_C\,(t)=E\left(e^{it(X-\mu)}\right)=e^{-it\mu}\,\phi\,(t).$$

أى أن الدالة المولدة للعزوم المركزية $\phi_C\,(t)$ هى حاصل ضرب الدالة المولدة للعزوم حول الصفر $\phi(t)$ فى الكمية $e^{-it\mu}$. وهى فى نفس الوقت دالة مميزة للمتغير $Y=X-\mu$ لذلـــك فإن مفكوك الدالة $\phi_C\,(t)$ فى شكل متسلسلة ماكلورين يكون هو نفس مفكوك الدالة $\phi(t)$ كما فى نظرية (5 ــ 1 ــ 5 أ) مع كتابة العزوم المركزية بدلاً مـــن العزوم حول الصفر. ونفس الشىء بالنسبة للدالة المولدة للعزوم حيث تكون الدالة المولدة للعزوم المركزية هى:

$$(5.\,1.\,40):\; M_C\,(t)=e^{-t\mu}M\,(t)$$

ومفكـــوك $M_C\,(t)$ يكـــون هو نفس المفكوك (5. 1. 37) أو (5. 1. 38) مع كتابة العزوم المركزية بدلاً من العزوم حول الصفر.

ملاحظة (5 ـ 1 ـ 5 ب): لقد ذكرنا سابقاً أن الدالة المميزة $\phi(t)$ دائماً موجودة لكـل المتغـيرات العشوائية ولجميع قيم t. كما ذكرنا من قبل أيضاً أن عزوم أى متغير عشوائى ليس من الضرورى أن تكون كلها موجودة، فبعض المتغيرات العشوائية تكون عزومها حتى درجة معينة موجودة وباقى العزوم غير موجودة فى حين أن عزوم بعض المتغـيرات تكون كلها موجودة، وهذا لا يتعارض مع وجود الدالة المميزة دائماً لجميع المتغـيرات العشـوائية. فمـثلاً توزيع كوشى المعطى فى مثال (3 ـ 2 ـ 2 د) أثبتنا أن توقعـه (العزم الأول حول الصفر) غير موجود وبالتالى تكون كل عزومه غير موجودة، علماً بأن الدالة المميزة لهذا التوزيع موجودة ومعطاة بالعلاقة التالية:

$$\phi(t)=e^{-|t|}$$

[كمـا سيتضـح فيما بعد فى مثال (5 ـ 1 ـ 11 ب)] ومفكوك هذه الدالة بدلالة قـوى t التصاعديـة يأخذ الشكـل التالـى:

$$\phi(t)=1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

إذا كانت $t>0$

$$=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

إذا كانـت $t<0$. أى أنـه يوجـد صيغتين لمفكوك $\phi(t)$ يختلفان فى إشارة معـاملات t، t^3، t^5، ... طبقاً لكون $t>0$ أو $t<0$. وبهذا لا يوجد مفكوك وحيد للدالـة المميزة $\phi(t)$ فى قوى t حول النقطة $t=0$ وحيث أن معامل t فى الصيغتين مخـتلف فى الإشارة فإن هذا يدل على أن التوقع غير موجود وبالتالى تكون كل عزوم هـذا التوزيع غير موجودة كما سبق أن أثبتنا فى مثال (3 ـ 2 ـ 2 د) تماماً. لهذا عند إيجـاد مفكـوك الدالة المميزة لأى متغير عشوائى فى شكل متسلسلة ماكلورين لابد أن يكون المفكوك فى حدود العزوم الموجودة فقط ولقيم t فى جوار حول القيمة $t=0$ كما فى العلاقة (5.1.27).

(5 ـ 1 ـ 6) المتراكمات Cumulants:

مـن دراستنا للعزوم يمكن القول أن العزوم تعتبر مجموعة من الثوابت التى تحدد خصـائص المجـتمع (أو التوزيع الاحتمالى) محل الدراسة، لذلك فهى تعرف بأنها أدلة توصيف المجتمعات. والعزوم ليست هى المجموعة الوحيدة (أو الأفضل) من الثوابت التى تحـدد خصـائص المجتمعات. والآن سنقدم مجموعة أخرى من الثوابت يمكن بواسطتها تحديـد خصـائص التوزيعات الاحتمالية (أو خصائص المجتمعات)، هذه الثوابت تسمى بالمتراكمات ولها خصائص تجعلها ذات فائدة كبيرة من الوجهة النظرية البحتة. وسنرمز للمتراكمات بالرموز $k_1,k_2,\ldots,k_r,\ldots$ حيث k_r تعرف بالمتراكمة الرائية أو المتراكمة

من الدرجة r وسنقدم فيما يلى دالة رياضية تعرف بالدالة المولدة للمتراكمات Cumulant Generating Function (c. g. f.) يمكن بواسطتها تحديد متراكمات التوزيع الاحتمالى.

تعــريف (5 ــ 1 ــ 6 أ): الدالة المولدة للمتراكمات للمتغير العشوائى X الذى له دالـــة مميزة $\phi(t)$ هى دالة فى الثابت t حيث t عدد حقيقى ونرمز لها بالرمز $K(t)$ وهى عبارة عن لوغاريتم الدالة المميزة $\phi(t)$ وتكتب فى الصورة التالية:

$$(5.1.41):\ K(t)=ln\,\phi(t)=k_1\tfrac{t}{1!}+k_2\tfrac{t^2}{2!}+k_3\tfrac{t^3}{3!}+\cdots$$

حيــث k_0 تعرف بأنها تساوى الصفر لعدم وجود حد مطلق فى المفكوك السابق و k_J هى معامل $\frac{(it)^J}{J!}$ وتسمى بـــ "المتراكمة رقم J أو من الدرجة J" للمتغير العشوائى X.

ملاحظة (5 ــ 1 ــ 6 أ): يمكن استخدام لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ للمتغــير X فـــى الحصـــول علـــى دالـــة مولـــدة للمـــتراكمات، ونرمـــز لهـــا بالرمز $\overline{K}(t)=ln\,M(t)$ وفى هذه الحالة تكون المتراكمة الرائية k_r هى معامل $\frac{t^r}{r!}$.

ملاحظـــة (5 ــ 1 ــ 6 ب): المـــتراكمات تســـمى أحـــياناً أنصـــاف الثوابـــت Semi – invariants وهـــذه كانـــت هى التسمية الأولى التى عرفت بها المتراكمات وهى تســـمية نتجت بسبب خاصية هامة تتميز بها المتراكمات ــ حيث أن أى إزاحة أو تغيير فـــى نقطـــة الأصـــل للمتغـــير العشوائى لا ينتج عنه أى تغيير فى قيمة المتراكمات إلا المتراكمة الأولى فقط كما يتضح مما يلى:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان حيث $Y=a+X$ و a مقدار ثابت، فإن الدالة المميزة للمتغير Y تكون:

$$\phi_Y(t)=e^{ita}\,\phi_x(t)$$

والدالة المولدة للمتراكمات للمتغير Y تكون:

$$K_Y(t)=ln\,\phi_Y(t)=i\,t\,a+K_x(t).$$

إذن معامل t فقط هو الذى يتغير، أى أن المتراكمة الأولى فقط هى التى تتغير إذ نجد أن المتراكمة الأولى للمتغير Y (k_{1Y}) تساوى المتراكمة الأولى للمتغير X (k_{1x}) مضافاً إليها الثابت a، أما باقى متراكمات المتغير Y تكون مساوية تماماً لباقى متراكمات X ونعبر عن ذلك بالعلاقات التالية:

$$k_{1Y}=a+k_{1x}$$

$$k_{JY}=k_{Jx}\ \ ;\ \ J=2,3,\ldots$$

(5 ـ 1 ـ 7) العلاقة بين المتراكمات والعزوم:

يمكـــن إيجاد متراكمات أى متغير عشوائى بدلالة عزومه كما يمكن إيجاد العزوم بدلالـــة المـــتراكمات وذلـــك باستخدام العلاقة (5. 1. 41) مع كتابة مفكوك $\phi(t)$ كما فى (5. 1. 36) فنحصل على:

$$K(t)=\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J=\ln\phi(t)=\ln\left[1+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J\right]$$

ولو رمزنا للمتسلسلة داخل القوس المربع بالرمز $Z(t)$ فإن:

$$(5.\ 1.\ 42):\ K(t)=\ln\phi(t)=\ln\left[1+Z(t)\right]=\frac{Z(t)}{1}-\frac{Z^2(t)}{2}+\frac{Z^3(t)}{3}-\cdots$$

$$=\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J$$

كما أن:

$$(5.\ 1.\ 43):\ \phi(t)=1+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J=\exp\left[\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J\right]$$

$$=1+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J+\frac{1}{2!}\left[\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J\right]^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J\right]^3+\cdots$$

وللحصـــول علـــى المتراكمات بدلالة العزوم أو العزوم بدلالة المتراكمات نقارن معاملات العزوم $(i\,t)^J$ لقيم J المختلفة فى العلاقة (5. 1. 42) أو (5. 1. 43) وبهذا نحصل على العلاقات التالية:

$$(5.\ 1.\ 44):\ k_1=\mu'_1$$

$$k_2=\mu'_2-\mu_1'^2=\mu_2=\sigma^2$$

$$k_3=\mu'_3-3\mu'_2\,\mu'_1+2\mu_1'^3$$

$$k_4=\mu'_4-4\mu'_3\,\mu'_1-3\mu_2'^2+12\mu'_2\,\mu_1'^2-6\mu_1'^4.$$

....

وكذلك:

$$(5.1.45):\ \mu'_1 = k_1$$

$$\mu'_2 = k_2 + k_1^2$$

$$\mu'_3 = k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3$$

$$\mu'_4 = k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4$$

....

ومـــن العلاقـــة بيـــن العزوم المركزية μ_r والعزوم حول نقطة μ'_r يمكن إيجاد العلاقات التالية بين المتراكمات والعزوم المركزية:

$$(5.1.46):\ k_2 = \mu_2$$

$$k_3 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

....

وكذلك:

$$(5.1.47):\ \mu_2 = k_2$$

$$\mu_3 = k_3$$

$$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2$$

....

ملاحظـــة (5 ــ 1 ــ 7 أ): كلا من العزوم والمتراكمات لها خاصية هامة، هى أنه إذا ضـــربنا المتغـــير X فى قيمة ثابتة a فإن العزم الرائى μ'_r والمتراكمة الرائية k_r للمتغـــير $Y = aX$ تكونـــا نفس العزم الرائى والمتراكمة الرائية للمتغير X ولكن كل منهما مضروب فى العامل a^r.

ملاحظـــة (5 ــ 1 ــ 7 ب): المتراكمة الرائية k_{rZ} $(r > 1)$ للمتغير العشوائى $Z = a + bX$ حيـــث a، b ثابتان هى نفس المتراكمة الرائية للمتغير X مضروبة فى العامل b^r دون تأثير للإزاحة a. أما المتراكمة الأولى $k_{1Z} = a + b\,k_{1x}$.

(5 ـ 1 ـ 8) شرط وجود المتراكمات:

العلاقـــة (5.1.43) والـــتى نـــتج عنها العلاقات (5.1.44, 45, 46, 47) توضح أن المـــتراكمة k_r تكـــون موجودة إذا كانت العزوم حتى الدرجة r موجودة ولكن ليس من الســـهل إثـــبات ذلك رياضياً من هذه العلاقات. لذلك سنلجأ إلى أسلوب آخر لتحديد شرط وجود المتراكمة k_r كما يلى:

يمكن كتابة العلاقة (5.1.28) فى الصورة التالية:

$$\phi(t)=\sum_{J=0}^{r}\frac{(i\,t)^J}{J!}\mu'_J+h(t)$$

حيـــث $h(t)$ دالة تحتوى على t^{r+1} و $|h(t)|\le\frac{|t^{r+1}|}{(r+1)!}\nu_{r+1}$ ، ν_{r+1} هو العزم المطلق من الدرجة $(r+1)$، فإذا كان ν_{r+1} محدود فإن $h(t)\to 0$ عندما $t\to 0$. إذن الدالة المولدة للمتراكمات $K(t)$ يمكن كتابتها فى الصورة التالية:

$$K(t)=\ln\phi(t)=\ln\left[1+\sum_{J=1}^{r}\frac{(i\,t)^J}{J!}+h(t)\right]=\ln[1+y]$$

حيث y هى الحدين الثانى والثالث داخل القوس المربع

$$=y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\cdots$$

وبتجمـــيع معـــاملات $(i\,t)$ و $\frac{(i\,t)^2}{2!}$ و $\frac{(i\,t)^3}{3!}$ و... وهكذا. نجد أن الدالة المولدة للمتراكمات:

$$(5.1.48):\ K(t)=\sum_{J=1}^{r}\frac{(i\,t)^J}{J!}k_J+O\left(t^{r+1}\right)$$

حيث $O\left(t^{r+1}\right)$ هى حدود تشتمل على t^{r+1} فما فوق. وعلى ذلك فإن وجود العزم المطلق ν_{r+1} جعل من الممكن كتابة $K(t)$ فى الصورة السابقة ـ لذلك يمكننا القول أنه إذا كان العزم المطلق ν_{r+1} موجود فإن المتراكمات k_J لجميع قيم $J=1,2,..,r$ تكون كلها موجودة.

ملاحظـــة (5 ـ 1 ـ 8 أ): من المعروف أن المتراكمات لا يمكن إيجادها من دالة كـثافة احــتمال (أو دالة احتمال) المتغير العشوائى بالتكامل أو الجمع مثل العزوم وإنما لابــد من إيجاد العزوم أولاً لإيجاد المتراكمات منها باستخدام العلاقات (5. 1. 44, 46) أو باســتخدام الدالـــة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم) وإيجاد مفكوك لوغاريتمها بدلالة قــوى t التصـــاعدية. كما أنه لا يوجد متراكمات مركزية وأخرى غير مركزية كما هو الحال بالنسبة للعزوم.

(5 ـ 1 ـ 9) المتراكمات العاملية Factorial Cumulants:

كمـــا عرفـــنا الدالـــة المولـــدة للمتراكمات بأنها لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم أو لوغاريتم الدالة المميزة يمكن تعريف دالة مولدة للمتراكمات العاملية بأنها لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم العاملية فى الصورة التالية:

$$(5.\ 1.\ 49):\ \omega(t) = \ln P(1+t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} k_{[r]}$$

حيــث $\omega(t)$ هى الدالة المولدة للمتراكمات العاملية و $k_{[r]}$ هى المتراكمة العاملية ذات الدرجة r. و $P(1+t)$ هى الدالة المولدة للعزوم العاملية والمعرفة بالعلاقة(5. 1. 25). وطــبعاً تعــريف الدالـــة المولـــدة للمتراكمات العاملية مقتصر على المتغيرات العشوائية المــتقطعة الــتى تأخذ القيم ...,0,1,2 كما سبق الإشارة إلى ذلك عند تقديم الدالة المولدة للاحــتمالات وتلك المولدة للعزوم العاملية. وبذلك تكون العلاقة بين المتراكمات العاملية والمتراكمات العادية كتلك العلاقة الموجودة بين العزوم العاملية والعزوم العادية والمعطاة بالعلاقات (3. 5. 27, 28) على الصورة التالية:

$$(5.\ 1.\ 50):\ \begin{aligned} k_{[1]} &= k_1 \\ k_{[2]} &= k_2 - k_1 \\ k_{[3]} &= k_3 - 3k_2 + 2k_1 \\ k_{[4]} &= k_4 - 6k_3 + 11k_2 - 6k_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

وكذلك:

$$(5.\ 1.\ 51):\ \begin{aligned} k_1 &= k_{[1]} \\ k_2 &= k_{[2]} + k_{[1]} \\ k_3 &= k_{[3]} + 3k_{[2]} + k_{[1]} \\ k_4 &= k_{[4]} + 6k_{[3]} + 7k_{[2]} + k_{[1]} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(5 ـ 1 ـ 10) أمثلة محلولة: نقدم فيما يلى مجموعة من الأمثلة المحلولة كتطبيق على ما تقدم فى هذا الباب حتى الآن.

مــثال (5 ـ 1 ـ 10 أ): أوجد كل من الدالة المميزة $\phi(t)$ والدالة المولدة للعزوم $M(t)$ والدالة المولدة للاحتمالات $P(t)$ والتوقع μ والتباين μ_2 للتوزيعات التالية:

(1) التوزيع ذى الحدين:

$$P(J)=\binom{n}{J}P^{J}\,q^{n-J}\quad ,\ J=0,1,2,...,n\ ,\ P+q=1$$

(2) التوزيع البواسونى:

$$P(J)=\frac{\lambda^{J}}{J\,!}e^{-\lambda}\quad ;\ \lambda>0\ ,\ J=0,1,2,...$$

(الحل)

(1) التوزيع ذو الحدين:

$$P(t)=\sum_{1}^{n}\binom{n}{J}P^{J}\,q^{n-J}\,t^{J}=[q+Pt]^{n}$$

$$M(t)=P(e^{t})=[q+Pe^{t}]^{n}$$

$$\phi(t)=M(i\,t)=[q+Pe^{it}]^{n}$$

$$\mu=\tfrac{1}{i}\phi'(0)=\tfrac{1}{i}n\,[q+Pe^{it}]^{n-1}\,i\,Pe^{it}\,\big|_{t=0}=n\,P$$

$$\mu_2'=\tfrac{1}{i^2}\phi''(0)=n\,(n-1)P^{2}+n\,P$$

$$\mu_2=\mu_2'-\mu^{2}=n\,Pq$$

(2) التوزيع البواسونى:

$$P(t)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\lambda^{J}\,t^{J}}{J!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda(1-t)}$$

$$M(t)=P(e^{t})=e^{-\lambda(1-e^{t})}$$

$$\phi(t)=M(i\,t)=e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

$$\mu=\tfrac{1}{i}\phi'(0)=\tfrac{1}{i}\lambda\,i\,e^{it}\,e^{-\lambda(1-e^{it})}\,\big|_{t=0}=\lambda$$

$$\mu_2'=\tfrac{1}{i^2}\phi''(0)=\tfrac{1}{i^2}\lambda\,i^{2}\,e^{it}\exp[\lambda(e^{it}-1)][\lambda e^{it}+1]\big|_{t=0}=\lambda\,(\lambda+1)$$

$$\mu_2=\mu_2'-\mu=\lambda\,(\lambda+1)-\lambda^{2}=\lambda$$

مثال (5 ـ 1 ـ 10 ب): فى التوزيع المدمج المعطى بالعلاقة (2. 6. 6b) حيث

$$\Pr(X = c) = 1$$

نجد أن:

$$M(t) = E(e^{tX}) = 1 \cdot e^{t \cdot c} + 0 e^{t x \neq c} = e^{tc}$$

$$\phi(t) = M(i\,t) = e^{itc}$$

مثال (5 ـ 1 ـ 10 جـ): فى التوزيع المعتاد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

أوجد $M(t)$ و $\phi(t)$.

(الحل)

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(Z - t\sigma^2)^2/2\sigma^2} dz \ , \ Z = x - \mu$$

$$= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$$

$$\phi(t) = M(i\,t) = e^{i t\mu - t^2\sigma^2/2}$$

[إذا كانـت $\mu = 0$ يكون التوزيع متماثلا حول الصفر وتكون $\phi(t)$ دالة حقيقية طبقا لنظرية (5 ـ 1 ـ 2 جـ)]

$$= (\mu + t\sigma^2) e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} = \left[(\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2\right] e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$$

$M'(0) = \mu$ و $M''(0) = \mu^2 + \sigma^2$ إذن التوقع يساوى μ

$$E(X) = M'(0) = \mu$$

وتباين X يساوى σ^2

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = M''(0) - M'(0) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

مـــثال (5 ــ 1 ــ 10 د): فى التوزيع البواسونى المعطى فى مثال (5 ــ 1 ــ 10 أ) أثبــت أن جمـــيع عزوم (وبالتالى متراكمات) التوزيع موجودة وأوجد المتراكمات وكذلك الدالة المولدة للمتراكمات العاملية والمتراكمات العاملية لهذا التوزيع.

(الحل)

فى مثال (5 ــ 1 ــ 10 أ) وجدنا أن الدالة المميزة $\phi(t)$ للتوزيع البواسونى هى:

$$\phi(t)=\exp\left[-\lambda\left(1-e^{it}\right)\right]=e^{-\lambda}\left[e^{\left(\lambda e^{it}\right)}\right]=e^{-\lambda}\left[\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^{J}}{J!}\right]$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^{J}}{J!}e^{itJ}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^{J}}{J!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(itJ)^{r}}{r!}$$

أى أن:

$$\phi(t)=e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^{r}}{r!}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^{J}J^{r}}{J!}$$

وحيث أن μ_r' هو معامل $\frac{(it)^r}{r!}$ فى مفكوك $\phi(t)$ إذن

$$\mu_r'=e^{-\lambda}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^{J}J^{r}}{J!}=e^{-\lambda}S$$

حيث S يمثل مجموع متسلسلة لانهائية هو المجموع:

$$S=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^{J}J^{r}}{J!}$$

ويمكــن إثبات أن المجموع S محدود إذ بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة التى مجموعها S نجد أن نسبة الحد الذى ترتيبه $(n+1)$ إلى الحد الذى ترتيبه n هى:

$$R_n=\frac{\lambda^{n+1}(n+1)^{r}}{(n+1)!}\div\frac{\lambda^{n}n^{r}}{n!}=\frac{\lambda}{(n+1)}\left[1+\tfrac{1}{n}\right]^{r}$$

فإذا كانت λ كمية محدودة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} R_n \to 0$$

وهــذا يــدل علــى أن S يمــثل مجموع متسلسلة لانهائية تقاربية لجميع قيم λ المحــدودة. إذن μ'_r موجــود لجميع قيم r أى أن جميع العزوم المطلقة والعادية موجودة وبالتالى فإن المتراكمات من جميع الدرجات،موجودة. والدالة المولدة للمتراكمات هى:

$$K(t) = \ln \phi(t) = \ln\left[e^{-\lambda}\, e^{(\lambda e^{it})}\right] = -\lambda + \lambda e^{it} = \lambda \sum_{J=1}^{\infty} \frac{(i\,t)^J}{J!}$$

إذن المتراكمة k_r (وهى معامل $\frac{(i\,t)^r}{r!}$) فى مفكوك $K(t)$ هى:

$$k_r = \lambda$$

لجميع قيم r. أى أن جميع متراكمات التوزيع متساوية وتساوى λ.

من مثال (5 ــ 1 ــ 10 أ) يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم العاملية بوضع $(1+t)$ بدلاً من t فى الدالة $P(t)$ فنحصل على الدالة المولدة للعزوم العاملية $P(1+t)$ فى الصورة التالية:

$$P(1+t) = e^{\lambda t}$$

إذن الدالة المولدة للمتراكمات العاملية هى:

$$\omega(t) = \ln P(1+t) = \lambda\, t$$

أى أن المــتراكمة العاملــية الأولــى (معامل $\frac{t}{1!}$) تساوى λ وباقى المتراكمات العاملية أصفار.

مثال (5 ــ 1 ــ 10 هــ): إذا كان X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x|} \quad , -\infty < X < \infty$$

أوجد الدالة المميزة والدالة المولدة للعزوم وجميع العزوم الموجودة لهذا التوزيع.

(الحل)

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,\tfrac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}e^{x}\,dx+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{itx}e^{-x}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}\,dx+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1-it)}\,dx=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1-it}\right)$$

إذن:

$$\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}\ , \qquad -\infty<t<\infty$$

ويمكـــن إيجاد مفكوك $\phi(t)$ في شكل متسلسلة ماكلورين في جوار حول $t=0$ كما يلي:

لأى عدد صغير موجب h نجد أن:

$$\phi(t)=\left(1+t^2\right)^{-1}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots$$
$$=1+(it)^2+(it)^4+(it)^6+\cdots+(it)^{2m}+\cdots$$

وحيـــث أن μ_r' هـــو معـــامل $\frac{(it)^r}{r!}$ إذن كل العزوم الفردية أصفار أما العزوم الزوجية فنحصل عليها من العلاقة:

$$\mu_{2m}=(2m)!\quad , \ m=1,2,\ldots$$

والدالة المولدة للعزوم هى:

$$M(t)=\phi\left(\tfrac{t}{i}\right)=\frac{1}{1-t^2}$$

ونلاحظ أيضاً أن الدالة المميزة لهذا التوزيع دالة حقيقية وذلك لأن التوزيع متماثل حول الصفر.

(5 ــ 1 ــ 11) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالى باستخدام الدالة المميزة:

رأيـــنا فى البند (5 ــ 1 ــ 1) أن دالة التوزيع الاحتمالى لأى متغير عشوائى تحدد دالته المميزة تحديداً وحيداً. وفى هذا البند نقدم صيغة تسمى "صيغة التعاكس" Inversion Formula قدمهـــا "لـــيفى" Lévy (1925) وهو ما نقدمه فى نظرية (5 ــ 1 ــ 11 أ) التالية

ومنها نوضح أن لكل دالة توزيع احتمالى توجد دالة مميزة وحيدة كما أن لكل دالة مميزة توجد دالة توزيع احتمالى وحيدة وهذا ما يعرف بنظرية "التقابل الوحيد" Uniqueness Theorem وهو ما نقدمه فى نظرية (5 ـ 1 ـ 11 ب).

نظرية (5 ـ 1 ـ 11 أ) "نظرية التعاكس":

إذا كان X متغير عشوائى دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ ودالته المميزة $\phi(t)$ حيث $F(x)$ دالة مستمرة عند النقطتان $x = a \pm h$ و $h > 0$ فإن:

$$(5.1.52):\ F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin ht}{t} e^{-ita}\, \phi(t)\,dt$$

(الإثبات)

سنقدم الإثبات لحالة المتغير العشوائى المستمر علماً بأن الإثبات فى حالة المتغير العشوائى المتقطع هو نفس الإثبات مع استخدام علامات المجموع Σ بدلاً من التكاملات.

ضع:

$$(5.1.53):\ J(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin ht}{t} e^{-ita}\, \phi(t)\,dt$$

وبالتعويض عن $\phi(t)$ فى المعادلة السابقة من (5.1.3) نحصل على:

$$J(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} f(x)\,dx \right] dt$$

يمكن تبادل ترتيب علامتى التكامل فى العلاقة السابقة وذلك لأن حدود التكامل بالنسبة للمتغير t محدودة $(\pm T)$ والتكامل بالنسبة للمتغير x متقارب تقارب مطلق ـ أى أن التكامل محدود (موجود) ويظل محدود بعد تغيير الترتيب، حيث:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} f(x)\,dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} \right| f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h \left| \frac{\sin ht}{h\,t} \right| f(x)\,dx \le h \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = h$$

وبتبادل ترتيب التكامل نحصل على:

$$J(T)=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin} ht}{t}e^{it(x-a)}f(x)dt\right]dx$$

$$=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin} ht}{t}\{\operatorname{Cos}(x-a)t+i\operatorname{Sin}(x-a)t\}f(x)dt\right]dx$$

وحيث أن $\frac{\operatorname{Sin} ht\ \operatorname{Sin}(x-a)t}{t}$ دالة فردية فى الفترة $-T\le t\le T$ و $\frac{\operatorname{Sin} ht\ \operatorname{Cos}(x-a)t}{t}$ دالة زوجية فى نفس الفترة إذن

$$J(T)=\tfrac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin} ht}{t}\operatorname{Cos}(x-a)t\,dt\right]f(x)dx$$

وباستخدام العلاقة:

$$\operatorname{Sin} m\ \operatorname{Cos} n=\tfrac{1}{2}[\operatorname{Sin}(m+n)+\operatorname{Sin}(m-n)]$$

وبوضع $n=xt-at$ و $m=ht$ يمكن كتابة $J(T)$ فى الصورة التالية:

$$(5.1.54):\ J(T)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin}(x-a+h)t}{t}dt-\tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin}(x-a-h)t}{t}dt\right]f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,T)f(x)dx$$

حيث $g(x,T)$ هى الصيغة الموجودة داخل القوس المربع فى العلاقة السابقة.

وحيث أنه من المعروف فى التحليل الرياضى وحساب التكامل أن التكامل $\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin} x}{x}dx$ محدود القيمة bounded لجميع قيم $T>0$ وأنه يؤول إلى $\tfrac{1}{2}\pi$ عندما $T\leftarrow+\infty$ إذن:

$$\lim_{T\to+\infty}\tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin}\alpha t}{t}dt=\begin{cases}-\tfrac{1}{2}, & \alpha<0\\ 0, & \alpha=0\\ \tfrac{1}{2}, & \alpha>0\end{cases}$$

وبهذا يمكن استخدام التكامل السابق لإيجاد النهاية التالية:

$$(5.1.55):\ \lim_{T\to\infty} g(x,T)=\begin{cases}0 & , x<a-h\ ;\ x>a+h\\ \frac{1}{2} & , \quad x=a\pm h\\ 1 & , a-h<x<a+h\end{cases}$$

حيث $g(x,T)$ كما فى (5. 1. 54).

والمطلـــوب الآن إيجاد $\lim_{T\to\infty} J(T)$ للحصول على (5. 1. 52) حيث $J(T)$ كما فى (5. 1. 54) ومـــن الواضـــح أنه يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل حيث أن الناتج $\lim_{T\to\infty} g(x,T)$ يمثل كمية محدودة كما يتضح من (5. 1. 55) وبالتالى يكون:

$$\lim_{T\to\infty} J(T)=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)\, f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty} g(x,T) f(x)dx$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{a-h}+\int_{a-h}^{a+h}+\int_{a+h}^{\infty}\right]\lim_{T\to\infty} g(x,T)\, f(x)dx$$

وبالتعويض من (5. 1. 55) نجد أن:

$$(5.1.56):\ \lim_{T\to\infty} J(T)=\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx=F(a+h)-F(a-h)$$

من (5. 1. 53) و(5. 1. 56) نحصل على (5. 1. 52).

هـــ. ط. ث

العلاقـــة (5. 1. 52) تسمى بـــ "صيغة التعاكس" The Inversion Formula. وسوف نستخدم هذه الصيغة فى إيجاد النظرية الهامة التالية (نظرية التقابل الوحيد).

نظرية (5 ــ 1 ــ 11 ب) "نظرية التقابل الوحيد" "Uniqueness Theorem":

دالــــة الــــتوزيع الاحــــتمالى $F(x)$ لأى متغــــير عشوائى X تتحدد تحديداً وحيداً بواسطة دالته المميزة $\phi(t)$ بالعلاقة:

$$(5.1.57):\ F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{x_1\to-\infty}\ \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx}}{it}\phi(t)dt$$

(الإثبات)

العــددان h و a فــي نظــرية (5 ــ 1 ــ 11 أ) السابقة عددان اختياريان والنقطتان $x = a \pm h$ نقطــتان اختياريتان أيضاً وافترضنا أن الدالة $F(x)$ مستمرة عنــد هاتيــن النقطتيـــن وبالـــتالـــي عـــند معرفة الدالة المميزة $\phi(t)$ لأى متغير عشــوائى X فإن العلاقـــة (5. 1. 52) تعطى احتمال أن المتغير X يقع داخل الفترة $x_1 \le X \le x_2$ حيث $x_1 = a - h$ و $x_2 = a + h$ والنقطــتان x_2 و x_1 نقطتى استمرار للدالة $F(x)$ وذلك بالعلاقة:

$$\Pr(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

نفــرض أن $x = x_2$ نقطــة استمرار للدالة $F(x)$ وأن $x_1 \to -\infty$ بحيث أن مــرور x_1 إلى $(-\infty)$ يكون من خلال نقط استمرار الدالة $F(x)$. إذن متتابعة الفروق $F(x) - F(x_1)$ يتم تحديدها بواسطة الدالة $\phi(t)$ وتتقارب إلى نهاية محدودة هى $F(x)$ كما يتضح مما يلى:

من العلاقة (5. 1. 52) نجد أن:

$$F(x) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{iht} - e^{-iht}}{2it} \right) e^{-ita}\, \phi(t)dt$$

وبما أن $x_1 = a - h$ و $x = x_2 = a + h$ إذن:

$$F(x) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx}}{it} \right) \phi(t)dt$$

وبــأخذ نهاية متتابعة الفروق السابقة عندما $x_1 \to -\infty$ من خلال نقطة استمرار الدالة $F(x)$ إذن:

$$\lim_{x_1\to-\infty} [F(x) - F(x_1)] = F(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{x_1\to-\infty} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx}}{it} \right) \phi(t)dt$$

هــ. ط. ث.

ملاحظــة (5 ــ 1 ــ 11 أ): مــنطوق الــنظرية السابقة يفهم منه أنه إذا كان أى متغــيران عشــوائيان X_1 و X_2 لهما دالتى التوزيع الاحتمالى $F_1(x)$ و $F_2(x)$

والدالتيــن المميزتيــن $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ فإن التوزيعان $F_1(x)$ و $F_2(x)$ يكونا مــتطابقان (أى أنهمــا فــى الواقــع توزيع واحد $F(x)$) إذا وفقط إذا كانت الدالتان $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ متطابقتان. لهذا نقول دائماً أن لكل دالة توزيع احتمالى دالة مميزة وحيدة ولكل دالة مميزة دالة توزيع احتمالى وحيدة وهذه علاقة تقابل وحيد one – to – one correspondence بين الدالة المميزة $\phi(t)$ ودالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ لأى متغير عشوائى.

بعــد أن أثبتــنا فى النظرية السابقة أن الدالة المميزة للمتغير العشوائى تحدد دالة توزيعه الاحتمالى تحديداً وحيداً، نقدم فيما يلى نظرية يمكن بواسطتها الحصول على دالة كــثافة احتمال أى متغير عشوائى مستمر من دالته المميزة $\phi(t)$ تحت شرط هام هو أن تكون الدالة $g(t)=|\phi(t)|$ دالة تكاملية لجميع قيم t الحقيقية.

نظرية (5 ـ 1 ـ 11 جـ):

إذا كانــت القيمة الموجبة للدالة المميزة $\phi(t)$ للمتغير العشوائى X تكاملية فى الفترة $(-\infty, \infty)$ أى تحقق العلاقة:

$$(5.1.58):\quad \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|\,dt < \infty$$

فــإن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ للمتغير X تكون مستمرة استمراراً مطلقاً Absolutely Continuous، وتكــون مشــتقتها التفاضلية $F'(x)=f(x)$ (دالة كثافة الاحتمال) موجودة ومستمرة لجميع قيم x ويمكن الحصول عليها من العلاقة:

$$(5.1.59):\quad f(x)=F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\phi(t)\,dt$$

(الإثبات)

فى الواقع يتضح من العلاقة (5. 1. 58) أن التكامل فى الطرف الأيمن من العلاقة (5. 1. 52) موجود Exists وذلك لأن:

$$(5.1.60):\quad I=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{Sin}\,ht}{t}e^{-itx}\,\phi(t)\,dt\right| \le h\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\text{Sin}\,ht}{ht}\right|\cdot\left|e^{-itx}\right|\cdot|\phi(t)|\,dt$$

وحيث أن: $\left|e^{-itx}\right| = 1$ و $\left|\frac{\operatorname{Sin} ht}{h t}\right| \le 1$ إذن

$$I \le h \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt < \infty$$

حسب فرض النظرية.

ومادام التكامل فى الطرف الأيمن من علاقة (52 .1 .5) موجود، إذن بقسمة طرفى هذه العلاقة على $2h$ نحصل على:

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} ht}{h t} e^{-itx} \phi(t) dt$$

حيث $x+h$ و $x-h$ نقطتى اتصال للدالة $F(x)$ وبأخذ نهاية طرفى العلاقة السابقة عندما $h \to 0$ إذن:

$$(5.\ 1.\ 61):\ \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} ht}{h t} e^{-itx} \phi(t) dt$$

وحيث أن الدالة المكاملة فى العلاقة السابقة تؤول إلى $e^{-itx} \phi(t)$ عندما $h \to 0$ وتكامل الطرف الأيمن بعد هذا يظل موجود كما يتضح من (60 .1 .5) إذن التكامل فى الطرف الأيمن للعلاقة (61 .1 .5) موجود. لذا يمكن إدخال النهاية $h \to 0$ داخل علامة التكامل فى العلاقة (5. 1. 61) فنحصل على:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{Sin} ht}{h t} \right) e^{-itx} \phi(t) dt$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt$$

وحيث أن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة يعتبر دالة مستمرة فى x إذن النهاية فى الطرف الأيسر موجودة وتساوى المشتقة التفاضلية للدالة $F(x)$، أى دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ وهذا يثبت صحة العلاقة (59 .1 .5)، وحيث أن التكامل فى هذه العلاقة متقارب تقارب مطلق ومنتظم إذن الدالة $f(x)$ موجودة ومستمرة لجميع قيم x.

هـ. ط. ث

ملاحظـــة (5 ـ 1 ـ 11 ب): مما هو جدير بالذكر أن العلاقة (5. 1. 59) تعتبـــر معكـــوس العلاقـــة (5. 1. 3) الخاصـــة بحالة التوزيعات المستمرة حيث أننا فى النظرية السابقة نفترض أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ دالة مستمرة استمراراً مطلقاً (أى ليســت مجـــرد مستمرة من ناحية اليمين) مما يجعل النظرية السابقة خاصة بالتوزيعات المستمرة فقط.

ملاحظة (5 ـ 1 ـ 11 جـ): عندما نشترط فى دالة التوزيع الاحتمالى لأى متغير عشـــوائى أن تكون مستمرة وتفاضلية عند جميع قيم x فإننا نعنى بذلك أنها دالة توزيع احتمالى لمتغير مستمر وأن دالة كثافة احتمال هذا المتغير موجودة ومستمرة عند جميع قيم x.

ملاحظة (5 ـ 1 ـ 11 د): فى التكامل الآتى:

$$(5.1.62):\ I(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\,\phi(t)\,dt$$

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ لها مشتقة تفاضلية $f(x)$ موجودة نجد من (5. 1. 59) أن:

$$(5.1.63):\ \lim_{T\to\infty} I(T)=2\pi \lim_{T\to\infty} f(x)/2T=0$$

أى أن $I(T)\to 0$ عـــندما $T\to\infty$ وذلـــك لجمـــيع قيم x التى تكون عندها $F(x)$ دالـــة مســـتمرة وتفاضلية أى عندما تكون $f(x)$ دالة مستمرة وموجودة عـــند جمـــيع قيم x. لهذا عند وجود دالة مميزة $\phi(t)$ ونرغب فى معرفة دالة التوزيع الاحـــتمالى أو دالة كثافة الاحتمال المقابلة للدالة $\phi(t)$ باستخدام العلاقة (5. 1. 59) لابد مـــن الـــتأكد قـــبل استخدام هذه العلاقة من أن $\phi(t)$ دالة مميزة لمتغير مستمر وذلك بالتحقق من صحة العلاقة (5. 1. 63).

مـــثال (5 ـ 1 ـ 11 أ): ما هى دالة كثافة الاحتمـــال $f(x)$، إذا كانت موجـــودة (محدودة)، للمتغير العشوائى X الذى له الدالة المميزة التالية:

$$\phi(t)=\begin{cases}1-|t| & ,\ \text{for } |t|<1\\ 0 & ,\ \text{for } |t|>1\end{cases}$$

(الحل)

الدالـــة المميزة $\phi(t)$ تكاملاً مطلقاً فى الفترة $(-\infty < t < \infty)$ أى تحقق العلاقة (58 .1 .5) إذن التوزيع الاحتمالى للمتغير X فى حالة وجوده يكون توزيعاً مستمراً ويمكن استخدام العلاقة (59 .1 .5) لإيجاد دالة كثافة احتماله $f(x)$ حيث نجد أن:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,\phi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-itx}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}(1-t)e^{-itx}\,dt$$
$$=I_1+I_2$$

حيث

$$I_1=\left[\frac{e^{-itx}}{-itx}(1+t)\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{-ix}\int_{-1}^{0}e^{-itx}\,dt=\frac{-1}{ix}+\frac{1}{ix}\left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{-1}{ix}-\frac{1}{(ix)^2}\left(1-e^{ix}\right)$$

وبالمثل نجد أن:

$$I_2=\frac{1}{ix}+\frac{1}{(ix)^2}\left(e^{-ix}-1\right).$$

إذن

$$f(x)=\frac{1}{2\pi x^2}\left(2-e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{1}{\pi x^2}(1-\text{Cos}\,x).$$

مـــثال (5 ــ 1 ــ 11 ب): أوجـــد توزيع المتغير العشوائى X، إذا كان موجود، إذا علمت أن دالته المميزة هى:

$$\phi(t)=e^{-|t|}\quad,\ -\infty\le t\le\infty$$

(الحل)

بمـــا أن $e^{-|t|}>0$ لجمـــيع قيم t إذن $|\phi(t)|=\phi(t)$ وتحقق العلاقة (58 .1 .5) حيث:

$$\int|\phi(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}\,dt=\left(e^{t}\right)_{-\infty}^{0}+\left(-e^{-t}\right)_{0}^{\infty}$$
$$=2<\infty$$

وهــذا يوضـــح أن الــتوزيع، فى حالة وجوده، يكون مستمراً ودالة كثافة احتماله معطاة بالعلاقة (5. 1. 59) فى الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, e^{-itx}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\, e^{-itx}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, e^{-itx}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-ix} e^{t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)}{(1+ix)} e^{-t}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-ix)} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+ix)}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ ,\ -\infty \le x \le \infty$$

والمـــدى هنا $(-\infty \le x \le \infty)$ لأن $f(x)$ طبقاً للعلاقة (5. 1. 58) تكون موجودة لجميع قيم x. وهذا التوزيع يسمى توزيع كوشى.

ملاحظـــة (5 ـ 1 ـ 11هــــ): لكــى نحــدد $f(x)$ بواســطة $\phi(t)$ من العلاقة (5. 1. 59) طبقاً لنظرية (5 ـ 1 ـ 11 جــ) لابد أن تكون الدالة $\phi(t)$ معرفة لجميع قيم t فى كل الفترة $-\infty \le t \le \infty$، حيث أن معرفة $\phi(t)$ على فترة محدودة غير كافٍ فى الحقيقية لتحديد $f(x)$ تحديداً وحيداً. وهذا تم توضيحه بواسطة Gnedenko حيث قدم دالتيــن مميزتين متطابقتين فى فترة محدودة لــ t ولكنهما غير متطابقتان لجميع قيم t وأثبــت أن ذلــك غير كاف لتحديد $f(x)$ تحديداً وحيداً ولكن يوجد مثال أسهل قدمه خنتشن Khintchine وهو ما سنقدمه فى المثال التوضيحى التالى:

مثال (5 ـ 1 ـ 11 جــ): "مثال توضيحى"

نعرف من مثال (5 ـ 1 ـ 11 أ) أن:

$$(5.\ 1.\ 64):\ \phi_1(t) = \begin{cases} 1-|t| & ,\ \text{for } |t| \le 1 \\ 0 & ,\ \text{for } |t| > 1 \end{cases}$$

تعتبر دالة مميزة لمتغير عشوائى مستمر X دالة كثافة احتماله $f(x)$ هى:

$$(5.1.65):\ f(x)=\frac{1-\operatorname{Cos} x}{\pi x^2}\ ,\ -\infty\le x\le\infty$$

وبإيجـــاد مفكـــوك الدالـــة: $g(t)=|t|$ فى المدى $(-\infty\le t\le\infty)$ فى متسلسلة فورييرFourier Series نجد أن:

$$(5.1.66):\ |t|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \operatorname{Cos} n\pi t+b_n \operatorname{Sin} n\pi t\right)$$

وبمـــا أن $|t|$ دالـــة زوجـــية فـــى الفـــترة $|t|\le 1$ إذن يمكن حساب المعاملات a_0, a_n, b_n من الصيغ التالية:

$$(5.1.67):\ b_n=0\ ;\ a_0=2\int_0^1 t\,dt=1$$

$$a_n=2\int_0^1 t \operatorname{Cos} n\pi t\ dt=\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u \operatorname{Cos} u\, du$$

وبالتكامل بالتجزىء

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[u \operatorname{Sin} u+\operatorname{Cos} u\right]_0^{n\pi}=\frac{2[\operatorname{Cos} n\pi-1]}{n^2\pi^2}$$

وحيـــث أن $\operatorname{Cos} n\pi$ تساوى الواحد عندما تكون n عدد زوجى وتساوى الصفر عندما تكون n عدد فردى إذن:

$$a_{2k}=0\qquad ,\ k=1,2,3,\ldots$$

$$a_{2k-1}=\frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}\ ,\ k=1,2,3,\ldots$$

وبالتعويض عن a_0, a_n, b_n فى العلاقة (5.1.66) نجد أن:

$$|t|=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Cos}(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2}$$

فإذا عرفنا الدالة $\phi_2(t)$ بالعلاقة:

$$\phi_2(t) = 1 - |t|$$

فيمكن كتابة $\phi_2(t)$ فى الصورة التالية:

$$(5.1.68):\ \phi_2(t) = 1 - |t| = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2} \quad ; -\infty \le t \le \infty.$$

وبتفحص الطرف الأيمن من العلاقة السابقة نجد أنه يمثل الدالة المميزة لمتغير متقطع Y دالة احتماله تساوى $\frac{1}{2}$ عندما $Y = 0$ وتساوى $\frac{2}{m^2\pi^2}$ عندما $Y = m\pi$ لجميع قيم $m = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots$. وحيث أن m أعداد صحيحة فردية فيمكن كتابتها فى الصورة $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ و $m = 2k - 1$ أى أن Y متغير متقطع دالة احتماله $P(Y)$ معطاة بالصيغة التالية:

$$(5.1.69):\ P(0) = \Pr(Y = 0) = \tfrac{1}{2}$$

$$P[(2k-1)\pi] = \Pr[Y = (2k-1)\pi]$$

$$= \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2} \quad ; k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

ويمكن التأكد من أن $\phi_2(t)$ هى الدالة المميزة للمتغير المتقطع Y كما يلى:

$$\phi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = \tfrac{1}{2}e^{it\cdot 0} + \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}e^{it(2k-1)\pi}$$

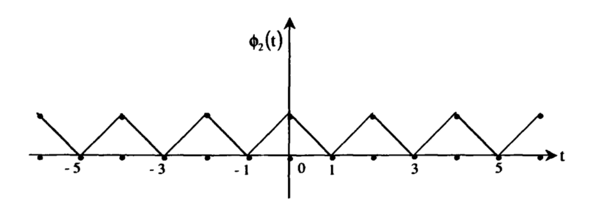
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi t + i\sin(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)t\pi}{(2k-1)^2}$$

وهى نفس العلاقة (5.1.68).

إذن من (5.1.64) و(5.1.68) نجد أن $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ فى الفترة $|t| \le 1$ وذلك بالرغم من أنهما دالتين مميزتين لتوزيعين مختلفين. ولكن فى الفترة $|t| > 1$ نجد أن

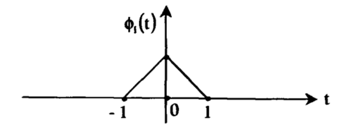
$\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$ إذ أن $\phi_1(t) = 0$ بيــنما $\phi_2(t) \neq 0$ حيث أن القيم التى تأخذها $\phi_2(t)$ فى الفترة $|t| \le 1$ تتكرر بفترات طول كل منها 2 على طول محور t كما الشكل التالى:



أى أن:

$$(5.\ 1.\ 70):\ \phi_2(t) = 1 - |t| \ ,\ |t| \le 1.$$

وفــى المدى $|t| > 1$ تكون قيم $\phi_2(t)$ هى تكرارات فترية لنفس قيمها فى الفترة $|t| \le 1$ وذلك على فترات طول كل منها 2. كما يمكن تمثيل $\phi_1(t)$ فى الشكل التالى:



مــن الشكلين السابقين نلاحظ أن $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ فى الفترة $|t| \le 1$ ولكن خارج هذه الفترة $\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$.

فــى نظرية (5 ـ 1 ـ 11 جـ) قدمنا العلاقة (59 .1 .5) التى نوجد بها دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ للمتغير المستمر X من دالته المميزة ولكننا لم نقدم صيغة مماثلة للمتغير المــتقطع، لذلك نقدم فيما يلى صيغة لإيجاد دالة احتمال المتغير المتقطع من دالته المميزة من خلال النظرية التالية:

نظرية (5 ــ 1 ــ 11 د):

إذا كـــان X متغـــير عشـــوائى متقطع يأخذ القيم $X_k = b + hk$ حيث k عدد صحيح و $h > 0$ باحتمالات:

$$(5.1.71):\ P_k(x) = Pr(X = x_k) = P_k \quad ; x = x_k$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

$$P_k \geq 0 \ , \ \sum_k P_k = 1$$

والدالة المميزة للمتغير X هى:

$$(5.1.72):\ \phi(t) = \sum_k e^{itx_k} P_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{it(b+hk)} P_k$$

فإن:

$$(5.1.73):\ P_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+hk)} \phi(t) dt$$

(الإثبات)

بفـــــرض أن r عدد صحيح، وبضرب طرفى العلاقــــة (5. 1. 72) السابقـــة فى $\exp[-it(b+rh)]$ نحصل على:

$$(5.1.74):\ e^{-it(b+rh)} \phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-it(r-k)h} P_k$$

كما أن:

$$(5.1.75):\ \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(r-k)h} dt = 0 \quad ; r \neq k$$

$$= \frac{2\pi}{h} \quad ; r = k$$

وبالرجوع إلى العلاقة (5. 1. 74) يمكن وضعها فى الصورة التالية:

$$(5.1.76):\ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq r}}^{\infty} e^{-it(r-k)h} P_k + P_r = e^{-it(b+rh)} \phi(t)$$

وبمكاملـــة طـــرفى العلاقـــة السابقة من $-\frac{\pi}{h}$ إلى $\frac{\pi}{h}$ مع الأخذ فى الاعتبار أن المتسلســلة اللانهائــية فى الجانب الأيسر من العلاقة السابقة متقاربة تقارب مطلق (لأن $\sum P_k = 1$)، فيمكن إدخال علامة التكامل داخل المجموع، إذن:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq r}}^{\infty} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(r-k)h} P_k \, dt + P_r \int_{-\pi/h}^{\pi/h} dt = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+rh)} \phi(t) dt$$

وبالتعويض فى العلاقة السابقة عن التكامل الموجود فى (5. 1. 75) نجد أن:

$$\frac{2\pi}{h} P_r = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+rh)} \phi(t) dt$$

وبكـــتابة k بدلاً من r فى العلاقة السابقة نحصل على العلاقة (5. 1. 73) المطلوب إثباتها.

هـ. ط. ث

ملاحظـــة (5 ــ 1 ــ 11 و): إذا كـــان المتغير X يأخذ قيم صحيحة k فإن العلاقة (5. 1. 73) تأخذ الصورة:

$$(5.1.77):\ P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \phi(t) dt$$

إذ أنه عندما $x_k = b + hk = k$ تكون $h = 1$ و $b = 0$.

لاحـــظ التشـــابه بيـــن العلاقة (5. 1. 59) للمتغير المستمر وبين كل من العلاقتين المناظرتين (5. 1. 73) و(5. 1. 77) للمتغير المتقطع.

ملاحظة (5 ــ 1 ــ 11 ز):

(1) يتضـــح مـــن العلاقة بين الدالة المميزة $\phi(t)$ ودالة كثافة الاحتمال $f(x)$ أن ســـلوك إحداهمـــا عـــند الأصـــل يعتمد على سلوك الأخرى عند ∞. إذ أن المشتقة التفاضلية من الدرجة r للدالة $\phi(t)$ عند النقطة $t = 0$ هى العزم الرائى μ_r' الذى يعـــتمد وجـــوده علـــى ســـلوك الدالـــة $x^r f(x)$ عـــندما $x \to \pm\infty$ حيث أن $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)$ وهـــذا الـــتكامل يعـــتمد وجوده على سلوك الدالة $x^r f(x)$

عندما $x \to \pm\infty$. وبالعكس إذا كانت المشتقة التفاضلية من الدرجة r للدالة $f(x)$ موجودة، تكون معطاة طبقاً للعلاقة(5.1.59) بالعلاقة:

$$\frac{d^r f(x)}{d x^r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r e^{-itx} \phi(t) dt$$

حيث

$$\left| \frac{d^r f(x)}{d x^r} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| t^r \right| \phi(t) dt$$

والتكامل السابق يعتمد فى تقاربه على سلوك الدالة $t^r \phi(t)$ عندما $t \to \pm\infty$.

(2) كذلك لو كان المتغير العشوائى X مستمراً وله دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ فإن:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

فـإذا كانـت المشـتقة التفاضلية من الدرجة n، $f^{(n)}(x)$ موجودة لجميع قيم x والدالـة $\left| f^{(n)}(x) \right|$ تكاملية بالنسبة لـ x فى المدى $(-\infty, \infty)$ فيمكن إثبات أن $\phi(t) \to 0$ عندما $t \to \pm\infty$.

(الإثبات)

بالتكامل بالتجزىء نجد أن:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \frac{e^{itx}}{it} f(x) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{it} f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{it} [\mathrm{Cos}\, t x + i \,\mathrm{Sin}\, t x] f(x) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(x) dx$$

وبمـا أن الدالـة $f(x)$ تكاملـية فـى المـدى $(-\infty, \infty)$ إذن لابـد أن $f(\pm\infty) \to 0$ كما أن $\mathrm{Cos}\, t x$ و $\mathrm{Sin}\, t x$ دوال محدودة عندما $x \to \pm\infty$ إذن:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(t) = \phi(t) = -\frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(x) dx$$

$$\therefore \left| \phi(t) \right| \leq \frac{1}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, dx$$

وبمـــا أن $f'(x)$ تكاملـــية فـــى المدى $(-\infty,\infty)$ فإن تكاملها يكون كمية محدودة نفرض أنه يساوى كمية ثابتة k_1

$$\therefore |\phi(t)| < \frac{k_1}{|t|}$$

وبتكرار ما سبق نصل إلى أن

$$|\phi(t)| < \frac{k}{|t|^n}$$

حيث k كمية ثابتة محدودة وعندما $t \to \pm\infty$ نصل إلى أن $\phi(t) \to 0$.

هــ. ط. ث

(3) أما إذا كان المتغير X متقطعا يأخذ القيم $x = x_J$ باحتمالات P_J فإن:

$$\phi(t) = \sum_J P_J\, e^{itx_J}$$

المتسلسلة السابقة متقاربة تقارب مطلق ومنتظم لجميع قيم t حيث أن

$$\sum_J \left| P_J\, e^{itx_J} \right| = \sum_J P_J = 1$$

وكـــل حد من حدود هذه المتسلسلة عبارة عن دالة فى $Cos\, t\, x_J$ ، $Sin\, t\, x_J$ لذلك فكـــل حـــد يعتـــبر دالة فترية Periodic فى t ولذلك فإنه لا يؤول إلى الصفر عندما $t \to \pm\infty$ وكذلـــك مجموع المتسلسلة لا يؤول إلى الصفر عندما $t \to \pm\infty$ وهذا على خلاف الدالة المميزة للمتغير المستمر. وكمثال على ذلك، الدالة المميزة للمتغير المتقطع X الذى له دالة الاحتمال:

$$P(x) = 1 \qquad , x = 0$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك} \quad x \neq 0$$

دالته المميزة

$$\phi(t) = 1 \cdot e^{it\cdot 0} + 0 \cdot e^{it\cdot x}\,\Big|_{x \neq 0} = 1$$

أى أن $\phi(t) = 1$ وهى بذلك لا تؤول إلى الصفر عندما $t \to \pm\infty$.

ملاحظة (5 ــ 1 ــ 11 ح) الشروط الواجب توافرها فى الدالة لتكون دالة مميزة:

نعـــرف أن أى دالة موجبة وتكاملية فى المدى المعرفة عليه يمكن أن تكون دالة كـــثافة احتمال. كما أن أى دالة غير تناقصية وتتزايد من صفر إلى الواحد الصحيح فى

المدى المعرفة عليه يمكن أن تكون دالة توزيع احتمالى ولكن الشروط الواجب توافرها فـى دالـة ما لكى تكون دالة مميزة أكثر تعقيداً من ذلك. إذ نعرف مما تقدم أن أى دالة مميـزة $\phi(t)$ لابد أن يتوافر فيها مجموعة من الشروط كلها شروط ضرورية وليست كافية لكى تكون دالة مميزة، من هذه الشروط ما يلى:

(1) يجب أن تكون $\phi(t)$ دالة مستمرة فى t.

(2) يجب أن تكون $\phi(t)$ معرفة عند جميع قيم t.

(3) يجب أن تكون $\phi(0)=1$.

(4) $\phi(-t)=\overline{\phi(t)}$: أى أن $\phi(-t)$ هى الكمية المرافقة للدالة $\phi(t)$.

(5) $|\phi(t)|\leq 1$.

وهـناك شـروط ضرورية أخرى غير الشروط السابقة يجب توافرها فى دالة ما لكى تكون دالة مميزة منها مثلاً الشرط التالى:

(6) الدالة $\phi(t)$ التى يكون مفكوكها فى جوار ما للنقطة $t=0$ على الشكل التالى:

$$(5.1.78):\ \phi(t)=1+0\left(t^{1+\alpha}\right)\ ;\ \alpha>0$$

حيث $0\left(t^{r}\right)$ كما هى معرفة فى (5.1.27).

أى دالة على الصورة السابقة لا يمكن أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى X. وذلـك لأنه بالنظر إلى مفكوك ماكلورين للدالة $\phi(t)$ كما فى (5.1.27) عندما $r=2$ نجد أن:

$$\phi(t)=1+(it)\mu_1'+\frac{(it)^2}{2}\mu_2'+0\left(t^{1+1}\right)$$

وبمقارنة العلاقة السابقة بالعلاقة (5.1.78) نجد أن $\mu_1'=\mu_2'=0$ وهذا معناه أن الاحـتمال الكلـى للمتغـير العشوائى X متركزاً عند نقطة واحدة هى $x=0$ وهذا المتغـير كما نعرف دالة احتماله $P(x)=1$ عندما $x=0$ وتساوى الصفر خلاف ذلك وبالـتالى تكـون دالـته المميزة $\phi(t)=1$ لجميع قيم t. وبناء على ذلك فإن كلاً من الدوال:

$$\phi_1(t)=e^{-t^4}\ \ ,\ \ \phi_2(t)=\frac{1}{1+t^4}$$

لا يمكــن لأى مــنهما أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى، بالرغم من أن كل منهما تحقق الشروط اللازمة من (1) إلى (5) السابقة ولكن مفكوك ماكلورين لكل منهما فى جوار للنقطة $t = 0$ هو على الترتيب:

$$\phi_1(t) = 1 - t^4 + \frac{t^8}{2!} - \frac{t^{12}}{3!} + \cdots = 1 + 0\left(t^3\right)$$

$$\phi_2(t) = \left(1 + t^4\right)^{-1} = 1 - t^4 + t^8 - t^{12} + \cdots = 1 + 0\left(t^3\right)$$

نجد أن كل من $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ تحقق شرط (6) السابق حيث $3 > 1 + \alpha$. لذلك لا يمكن لأى منهما أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى.

أمــا بالنســبة للشروط الكافية اللازمة لكى تكون دالة ما دالة مميزة فقد تم إيجاد العديــد مــنها أبسطها ذاك الشرط الكافى اللازم الذى قدمه كرامير Cramér (1937) فى النظرية التالية التى سنقدمها بدون إثبات:

نظرية (5 ــ 1 ــ 11 هــ):

أى دالة $\phi(t)$ محدودة bounded ومستمرة تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى، إذا وفقط إذا، كان:

1: $\phi(0) = 1$

2: $\int_0^A \int_0^A \phi(t-u) \exp\{i Z(t-u)\} dt\, du$

يساوى كمية حقيقية غير سالبة لجميع قيم Z الحقيقية ولجميع قيم $A > 0$.

(5 ــ 2) الدالة المميزة لمجموع متغيرات عشوائية مستقلة:

(5 ــ 2 ــ 1): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان ودالتيهما المميزتان $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ علــى الترتيب ومجموعهما $Z = X_1 + X_2$ فإن الدالة المميزة $\phi_Z(t)$ للمتغير Z تكون:

$$\phi_Z(t) = E\left(e^{itZ}\right) = E\left(e^{it(X_1+X_2)}\right) = E\left(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2}\right)$$

وبما أن X_1 و X_2 مستقلان فإن المتغيران e^{itX_1} و e^{itX_2} يكونا مستقلان أيضاً حسب نظرية (2 ــ 20 ــ 2 أ) إذن:

$$(5.2.1):\ \phi_Z(t) = E\left(e^{itX_1}\right) E\left(e^{itX_2}\right) = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

ويمكـــن تعميم النتيجة السابقة إلى حالة n من المتغيرات المستقلة كما فى النظرية التالية:

نظرية (5 ـ 2 ـ 1):

إذا كانـــت المتغـــيرات العشـــوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات مستقلة ودوالها المميزة هى:

$$\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)$$

علـــى الترتيـــب فـــإن الدالـــة المميـــزة لمجمـــوع المتغـــيرات المســـتقلة $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ هى الدالة:

$$(5.2.2): \phi_Z(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)\cdots\phi_n(t).$$

والـــنظرية السابقة توضح أن استقلال المتغيرات $X_1, ..., X_n$ يعتبر شرطا كافيا للحصـــول علـــى النتـــيجة (5. 2. 2) ولكـــنه لا يعتبر شرطا ضروريا إذ يمكن أن تكون المتغيرات $X_1, ..., X_n$ غير مستقلة ومع ذلك نحصل على نفس النتيجة كما سنوضح ذلك فيما بعد (مثال (5 ـ 10 ـ 1)).

وإذا كـــان المتغـــير العشوائى U يتكون من علاقة خطية فى المتغيرات المستقلة $X_1, ..., X_n$ على الصورة التالية

$$(5.2.3): U = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

حيث $C_1, ..., C_n$ ثوابت اختيارية ـ وكانت $\phi_u(t)$ هى الدالة المميزة للمتغير U و $\phi_J(t)$ هى الدالة المميزة للمتغير X_J لجميع قيم $J = 1, 2, ..., n$ فيمكن إثبات أن:

$$(5.2.4): \phi_u(t) = \prod_{J=1}^{n} \phi_J(C_J t).$$

(5 ـ 2 ـ 2) خاصية التوليد الذاتى Reproductive Property:

نفـــرض أن X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان، توزيع كل منهما يعتمد على معلمة θ، ودالتى توزيعهما الاحتمالى $F(x_1;\theta_1)$ و $F(x_2;\theta_2)$ على الترتيب حيث θ_1 و θ_2 قيمـــتان مـــن قيم المعلمة θ. والمجموع $Z = X_1 + X_2$ يمثل متغير عشوائى هو مجمـــوع المتغيريـــن X_1 و X_2. فـــإذا كانـــت دالـــة التوزيع الاحتمالى للمتغير Z هى $F(Z;\theta_1 + \theta_2)$ فإننا نقول أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x;\theta)$ تولد نفسها ذاتياً بالنسبة

للمعلمـــة θ. ونفــس الكــلام يقال عن أى دالة احتمال (لمتغير متقطع) أو أى دالة كثافة احــتمال (لمتغير مستمر) تعتمد على معلمة θ كدالة تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة θ. وخاصـــية التولــيد الذاتى يمكن تعميمها إلى حالة المتغيرات المتعددة المشتركة، إذا كان المتغـــير العشوائى X أو المعلمة θ أو كلاهما من النوع المتعدد. ويمكن باستخدام الدوال الممـــيزة تقديم معيار مفيد لتحديد إذا ما كانت دالة توزيع احتمالى ما $F(x;\theta)$ يمكن أن تولد نفسها ذاتيا (أى تتميز بخاصية التوليد الذاتى) وذلك بتقديم النظرية التالية:

نظرية (5 ـ 2 ـ 2 أ):

إذا كــان X_1 و X_2 متغــيران عشــوائيان مستقلان دالتى توزيعهما الاحتمالى $F(x_1;\theta_1)$ و $F(x_2;\theta_2)$ ودالتــيهما المميزتيــن $\phi(t;\theta_1)$ و $\phi(t;\theta_2)$ على الترتيــب، حيــث θ_1 و θ_2 ثابــتان (معلمتان)، فإن الدالة $F(x;\theta)$ تولد نفسها ذاتياً بالنســبة للمعلمة θ ـ (أى أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير $Z = X_1 + X_2$ تكون $(F(Z;\theta_1+\theta_2))$ ـ إذا وفقط إذا كان،:

$$(5.2.5):\ \phi(t;\theta_1)\phi(t;\theta_2) = \phi(t;\theta_1+\theta_2)$$

(الإثبات)

الشرط الكافى "شرط إذا":

إذا كانت

$$\phi(t;\theta_1+\theta_2) = \phi(t;\theta_1)\phi(t;\theta_2)$$

فإنه طبقاً لنظرية التقابل الوحيد نظرية (5 ـ 1 ـ 11 ب) نجد أن:

$$F(Z;\theta_1+\theta_2) = F(x_1;\theta_1)F(x_2;\theta_2)$$

أى أن الدالة $F(x;\theta)$ تولد نفسها ذاتيا بالنسبة للمعلمة θ.

الشرط الضرورى "شرط وفقط إذا"

نفــرض أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x;\theta)$ تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة θ. إذن عند وجود متغيرين مستقلين X_1 و X_2 دالتى توزيعهما $F(x_1;\theta_1)$ و $F(x_2;\theta_2)$ تكــون دالـــة الـــتوزيع الاحـــتمالى للمتغـــير Z (المجمـــوع $Z = X_1 + X_2$) هـــى $F(Z;\theta_1+\theta_2)$ ومن استقلال X_1 و X_2 نعلم أن:

$$F(Z;\theta_1+\theta_2) = F(x_1;\theta_1)F(x_2;\theta_2).$$

وطبقاً للعلاقة (5. 1. 1) نجد أن:

$$\phi(t;\theta_1+\theta_2)=\phi(t;\theta_1)\phi(t;\theta_2).$$

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 ـ 2 ـ 1): فى هذه الملاحظة نقدم حقيقية هامة هى:

"إذا كــان X وY وZ متغـيرات عشــوائية مســتقلة وكــان المجموع $X+Y$ والمجموع $X+Z$ لهما نفس التوزيع الاحتمالى فليس من الضرورى "بصفة عامة" أن يكــون المتغير Z له نفس توزيع المتغير Y، بل قد يكون لكل منهما توزيع مختلف عن الآخر بالرغم من أن توزيع $X+Y$ هو نفسه توزيع $X+Z$". ولإثبات هذه الحقيقية يكفى أن نعود إلى مثال (5 ـ 1 ـ 11 جـ) حيث قدمنا فى هذا المثال متغيران عشوائيان X وY حيث X متغير مستمر دالة كثافة احتماله ودالته المميزة هما:

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}\ ;\ -\infty\le x\le\infty$$

و

$$(5.\,2.\,6):\ \phi_x(t)=1-|t|\quad;\quad |t|\le 1$$

$$=0\qquad;\quad |t|>1$$

وY متغير متقطع دالة احتماله هى:

$$Pr(Y=0)=\tfrac{1}{2}$$

$$Pr(Y=2k-1)=\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}\quad;\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

ودالته المميزة المعطاة بالعلاقة (5. 1. 70) هى:

$$(5.\,2.\,7):\ \phi_Y(t)=1-|t|\quad;\ |t|\le 1$$

وفــى المدى $|t|>1$ تكون قيم $\phi_Y(t)$ عبارة عن تكرارات فترية لنفس قيمها فى الفترة $|t|\le 1$ على فترات متتالية متصلة طول كل منها 2.

وحيــث أن المتغيران X وY لا علاقة بينهما فهما مستقلان وبالتالى يمكن كتابة الدالة المميزة للمجموع $X+Y$ طبقاً للعلاقة (5. 1. 79) فى الصورة:

$$\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\cdot\phi_Y(t)$$

ولكن من (5. 2. 6, 7) نجد أن:

$$\phi_X(t)\phi_Y(t) = \phi_X(t)\phi_X(t)$$

لجميع قيم t.

أى أن:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_{X+X}(t)$$

وبتطبيق (59 .1 .5) على العلاقة السابقة يتضح أن توزيع مجموع المتغيران المستقلان X وY هو نفسه توزيع مجموع متغيران مستقلان كل منهما له توزيع المتغير X وذلك بالرغم من أن توزيع X يختلف عن توزيع Y وهذا يترتب عليه الحقيقية التى ذكرناها فى بداية هذه الملاحظة وهى أنه "إذا كان $X+Y$ و $X+Z$ لهما نفس التوزيع فليس من الضرورى "بصفة عامة" أن يكون توزيع Y يساوى توزيع Z".

(5 ـ 3) متتابعات التوزيعات الاحتمالية:

Sequences of Distribution Functions:

يقال على أى متتابعة من التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\} \equiv F_1(x), F_2(x), \ldots\ldots, F_n(x), \ldots$ أنها تقاربية إذا كان يوجد دالة $F(x)$ غير تناقصية حيث $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ عند جميع نقط استمرار $F(x)$.

هذا النوع من التقارب مهم جداً فى التطبيقات الإحصائية لذلك فإنه من الضرورى تقديم معيار يمكننا من معرفة إذا ما كانت متتابعة ما من التوزيعات الاحتمالية تتقارب إلى توزيع احتمالى أم لا.

فى الواقع وجود النهاية $F(x)$ عند جميع نقط استمرارها يعتبر شرط ضرورى لتقارب المتتابعة $\{F_n(x)\}$ إلى توزيع احتمالى ولكنه ليس كافياً، إذ يمكن أن تتقارب المتتابعة $\{F_n(x)\}$ دون أن يكون هذا التقارب إلى توزيع احتمالى، إذ أن النهاية $F(x)$ قد لا تكون دالة توزيع احتمالى. ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالى:

مثال (5 ـ 3 ـ 1): "مثال توضيحى"

إذا كان المتغير العشوائى X له دالة كثافة الاحتمال (أو دالة الاحتمال):

$$\text{(5. 3. 1)}: \quad P_n(x) = 1 \quad ; \quad x = n$$
$$= 0 \quad ; \quad x \neq n$$

أى أن الاحتمال الكلى متركز عند نقطة واحدة هى النقطة $x = n$ ، وبالتالى فإن دالة التوزيع الاحتمالى المقابلة هى:

$$(5.3.2):\ F_n(x) = 0 \quad ; \quad x < n$$

$$= 1 \quad ; \quad x \geq n$$

وفـــى حالتـــنا هـــذه تكـــون متتابعة التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ لها نهاية موجودة هى $F(x) = 0$ أى أن:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$$

لجميع قيم x.

وهـــذا واضـــح لأنـــه عـــندما $n \to \infty$ فإن الاحتمال الكلى المتركز عند النقطة $x = n$ يتلاشى كما لو كان تحرك مكان تركيزه إلى ∞. وحيث أن النهاية $F(x) = 0$ لجمـــيع قيم x ليست دالة توزيع احتمالى، إذن المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى نهاية موجودة (محدودة) هى $F(x) = 0$ لجميع قيم x ولكنها لا تمثل توزيع احتمالى.

مـــن المثال السابق نعتبر أن أى متتابعة من التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ تكون "تقاربـــية" إذا كان يوجد دالة غير تناقصية $F(x)$ (ولا نقول دالة توزيع احتمالى $F(x)$) حيث $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ عند جميع نقط استمرار الدالة $F(x)$.

مـــن الواضح أن $0 \leq F(x) \leq 1$ وذلك لأن $F_n(x)$ دالة توزيع احتمالى وبالتالى $0 \leq F_n(x) \leq 1$ إذن

$$\lim_{n\to\infty} \left(0 \leq F_n(x) \leq 1\right)$$

هى:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x) \leq 1$$

أى أن:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

ويمكن الآن تقديم النظرية التالية التى سنحتاج إليها فيما بعد.

نظرية (5 ـ 3 ـ 1):

أى متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالى:

$$\{F_n(x)\} \equiv F_1(x), F_2(x), \dots$$

تحتوى على متتابعة جزئية تقاربية

$$\{F_{n_j}(x)\} \equiv F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \dots$$

تتقارب إلى نهاية هى:

$$\lim_{j \to \infty} F_{n_j}(x) = F(x)$$

عــند جمــيع نقط استمرار هذه النهاية $F(x)$ التى تكون دائماً غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين وتحقق العلاقة $0 \le F(x) \le 1$.

(الإثبات)

إذا كانــت $r_1, r_2, r_3, \dots$ هى مجموعة الأعداد المقيسة Rational Numbers السالبة والموجــبة بمــا فــيها الصفر وهى كما نعلم مجموعة قابلة للعد Countable، وإذا كانت $\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \dots$ متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالى، فإن المتتابعة:

$$F_1(r_1), F_2(r_1), F_3(r_1), \dots.$$

تعتبر متتابعة لانهائية لها حد أدنى وحد أعلى Bounded من الأعداد الحقيقية حيث $0 \le F_J(r_1) \le 1$ لجمــيع قيم J. وطبقاً لنظرية بولزانو ويستراس تكون هذه المتتابعة ــ مادامت لانهائية ولها حدين أدنى وأعلى ــ لها نقطة نهائية واحدة على الأقل has at least one limiting point معنى ذلك أن المتتابعة $\{F_n(r_1)\}$ يوجد بها على الأقل متتابعة جزئية لها نقطة نهائية. أو بمعنى آخر يمكن القول أن المتتابعة $\{F_n(x)\}$ دائماً يوجد بها متتابعة جزئية Z_1 تقاربية عند النقطة $x = r_1$. وبنفس الأسلوب وعند النقطة r_2 نجد أن المتتابعة Z_1 تحتوى على متتابعة جزئية Z_2 تقاربية عند $x = r_1$ و $x = r_2$. وبتكرار هذه العملية نحصــل بالتــتابع على المتتابعات الجزئية $Z_1, Z_2, \dots$ حيث أن المتتابعة الجزئية Z_{n-1} تحتوى على متتابعة جزئية Z_n تتقارب عند القيم $x = r_1, r_2, \dots, r_n$ فإذا كانت المتتابعات الجزئية هى:

$$Z_1 \equiv F_{n_{11}}(x), F_{n_{12}}(x), F_{n_{13}}(x), \dots$$
$$Z_2 \equiv F_{n_{21}}(x), F_{n_{22}}(x), F_{n_{23}}(x), \dots$$
$$Z_3 \equiv F_{n_{31}}(x), F_{n_{32}}(x), F_{n_{33}}(x), \dots$$

....

وبأخذ أقطار الشكل السابق يمكن تكوين متتابعة جزئية Z هى:

$$Z = F_{n_{11}}(x)\ ,\ F_{n_{22}}(x)\ ,\ F_{n_{33}}(x)\ ,...$$

أو لتبسيط الكتابة يمكن كتابة Z فى الصورة التالية:

$$(5.3.3):\ Z = F_{n_1}(x)\ ,\ F_{n_2}(x)\ ,\ F_{n_3}(x)\ ,...$$

ومن الواضح أن المتتابعة Z تتقارب عند جميع النقط x التى تمثل الأعداد المقيسة. من (5.3.3) يمكن أن نضع:

$$(5.3.4):\ \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_i) = C_i$$

حيث $i = 1, 2, 3, ...$.

إذن المتتابعة $\{C_i\}$ متتابعة لانهائية لها حد أدنى وحد أعلى حيث أن $0 \le F_{n_J}(x) \le 1$ وبالتالى:

$$0 \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_i) \le 1$$

$$0 \le C_i \le 1 \quad , i = 1, 2, 3, ...$$

كذلك $C_i \le C_k$ إذا كانت $r_i \le r_k$ وذلك لأن $F_{n_J}(x)$ دالة غير تناقصية إذن عندما $r_i \le r_k$ تكون:

$$F_{n_J}(r_i) \le F_{n_J}(r_k)$$

$$\lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_i) \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_k)$$

$$C_i \le C_k$$

والآن نعرف دالة $F(x)$ بأنها:

$$F(x) = \text{Lower bound of } C_i$$

$$= C_i \quad \text{الحد الأدنى لـ}$$

لجميع قيم $x < r_i$ وتكتب فى الصورة:

$$(5.3.5):\ F(x) = \text{L. b. } C_i$$

لجميع قيم $r_i > x$.

ومن التعريف السابق يمكن إثبات أن:

(1) $F(x)$ محدودة bounded.

(2) $F(x)$ دالة غير تناقصية بالنسبة لـــ x.

(3) $F(x)$ دالة مستمرة من ناحية اليمين.

ويمكن توضيح ذلك من التعريف السابق للدالة $F(x)$ كما يلى:

(1) بما أن $0 \le C_i \le 1$ لجميع قيم i إذن

$$0 \le L.b.C_i \le 1$$

لجميع قيم $r_i > x$

$$0 \le F(x) \le 1$$

(2) إذا كانت $x_1 < x_2$ فإن:

$$F(x_1) = L.b.C_i \quad ; r_i > x_1$$

$$F(x_2) = L.b.C_i \quad ; r_i > x_2$$

وبما أن مجموعة قيم C_i لجميع قيم $r_i > x_2$ تعتبر مجموعة جزئية من مجموعة قيم C_i لجمـــيع قـــيم $r_i > x_1$، إذن مـــن تعريف $F(x)$ نجد أن الحد الأدنى للمجوعة الجزئية أكبر من أو يساوى الحد الأدنى للمجموعة الكلية وبالتالى: $F(x_2) \ge F(x_1)$ أو $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ عندما $x_2 > x_1$، إذن $F(x)$ دالة غير تناقصية.

(3) وبما أن الدالة $F(x)$ محدودة bounded وغير تناقصية ومعطاة بالعلاقة

$$F(x) = L.b.C_i = L.b.\lim_{J \to \infty} F_{n_J}(r_i)$$

لجمـــيع قـــيم $r_i > x$، وحيث أن $F_{n_J}(\cdot)$ دالة توزيع احتمالى فهى مستمرة من ناحية اليمين ــ كما ذكرنا فى (2 ــ 5 ــ 2) رقم (4) ــ إذن $F(x)$ أيضاً مستمرة من ناحية اليمين.

والآن سوف نثبت أنه عند كل نقطة استمرار للدالة $F(x)$ يكون:

$$\lim_{J \to \infty} F_{n_J}(x) = F(x)$$

فإذا كانت x نقطة استمرار للدالة $F(x)$ فيمكن اختيار عدد صغير $0 < h$ بحيث يكون:

$$(5.3.6):\ F(x+h) - F(x-h) < \in$$

لأى عدد صغير $0 < \in$ مهما كانت $\in$ صغيرة.

نفــرض أن r_i و r_k عــددان مقيســان موجــودان فى الفترتين $(x-h, x)$ و $(x, x+h)$ على الترتيب، إذن من العلاقة (5.3.5) نجد أن

$$(5.3.7):\ F(x-h) \le C_i \le F(x) \le C_k \le F(x+h)$$

كما أن لكل قيمة J تكون

$$F_{n_J}(r_i) \le F_{n_J}(x) \le F_{n_J}(r_k)$$

وبأخذ نهاية المتتابعة السابقة عندما $J \to \infty$

$$\lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_i) \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x) \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(r_k)$$

وباستخدام العلاقة (5.3.4) نجد من العلاقة السابقة أن

$$(5.3.8):\ C_i \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x) \le C_k$$

ومن (5.3.7) و(5.3.8) نجد أن

$$(5.3.9):\ \begin{cases} C_i \le F(x) \le C_k \\ C_i \le \lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x) \le C_k \end{cases}$$

ومن (5.3.6) و(5.3.7) نجد أن

$$(5.3.10):\ C_k - C_i < \in$$

وبما أن كلٍ من $F(x)$ و $\lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x)$ تقع داخل الحدين C_i و C_k والفرق بينهما أقل من أى عدد صغير موجب $\in$ إذن

$$\left|\lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x) - F(x)\right| < \in$$

حيث $0 < \in$ عدد صغير أى أن

$$\lim_{J\to\infty} F_{n_J}(x) = F(x)$$

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 ـ 3 ـ 1): النظرية السابقة تنص على أن كل متتابعة من التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة $F(x)$ تحقق الخصائص التالية:

(1) $0 \le F(x) \le 1$.

(2) $F(x)$ دالة غير تناقصية.

(3) $F(x)$ دالة مستمرة من ناحية اليمين.

ولكن النظرية لا تنص على أن الدالة $F(x)$ تحقق شرط هام من شروط دالة التوزيع الاحتمالي وهو أن $F(-\infty)=0$ و $F(+\infty)=1$ أي أن $F(x)$ قد لا تكون دالة توزيع احتمالي.

(5 ـ 4) نظرية التواصل للدوال المميزة:

Continuity Theorem for Characteristic Functions:

نعرف من نظرية التقابل الوحيد ـ نظرية (5 ـ 1 ـ 11 ب) ـ أن هناك علاقة وحيدة One – to – One Correspondence بين الدالة المميزة $\phi(t)$ ودالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ للمتغير العشوائي X، أي أن كل توزيع احتمالي له دالة مميزة وحيدة وكل دالة مميزة تحدد توزيع احتمالي وحيد. أي أن التحويلة التي نمر بها من $F(x)$ إلى $\phi(t)$ وبالعكس دائما وحيدة.

والآن نقدم نظرية تبين أنه تحت شروط معينة تكون هذه التحويلة مستمرة أيضا بالإضافة إلى أنها وحيدة. وهي نظرية في غاية الأهمية للتطبيقات الإحصائية، حيث أننا أحيانا نرغب في معرفة النهاية $F(x)$ التي تؤول إليها متتابعة من التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ عندما $n \to \infty$. ولكن كثيراً ما يكون معرفة النهاية $\phi(t)$ التي تؤول إليها متتابعة الدوال المميزة $\{\phi_n(t)\}$ المقابلة لهذه التوزيعات الاحتمالية أكثر سهولة من معرفة النهاية $F(x)$. في مثل هذه الحالات تمكننا النظرية التي سنقدمها الآن من معرفة النهاية $F(x)$ باستخدام النهاية $\phi(t)$، حيث تنص النظرية التالية التي قدمها ليفي وكرامير (1937) على أن النهاية $F(x)$ التي تؤول إليها المتتابعة $\{F_n(x)\}$ متطابقة مع (أو هي ذاتها) دالة التوزيع الاحتمالي المقابلة للنهاية $\phi(t)$ التي تؤول إليها المتتابعة $\{\phi_n(t)\}$.

نظرية (5 ـ 4 ـ 1) "نظرية التواصل"

إذا كانت $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots$ متتابعة من المتغيرات العشوائية لها دوال التوزيع الاحتمالى:

$$\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \ldots$$

والدوال المميزة:

$$\{\phi_n(t)\} = \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots$$

فإن المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة توزيع احتمالى $F(x)$ $(\lim_{n\to\infty} F_n(x) =)$، إذا وفقط إذا، تقاربت المتتابعة $\{\phi_n(t)\}$ لجميع قيم t $(-\infty < t < \infty)$ إلى دالة $\phi(t)$ $(\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) =)$ وكانت $\phi(t)$ دالة مستمرة عند النقطة $t = 0$. وإذا تحقق هذا الشرط تكون النهاية $\phi(t)$ هى الدالة المميزة للنهاية $F(x)$.

(الإثبات)

أولاً: الشرط الضرورى "وفقط إذا":

لتوضيح أن الشرط ضرورى نثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ لجميع قيم x فإنه "من الضرورى" أن $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ لجميع قيم t. ويمكن إثبات ذلك إذا كتبنا:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, F_n(x)$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ لجميع قيم x و e^{itx} دالة مستمرة لجميع قيم x أيضاً وتكاملية بالنسبة للتوزيع $F(x)$ فى الفترة $(-\infty, \infty)$ إذن يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل حيث أن الناتج بعد ذلك يكون موجود Exists فنحصل على:

$$(5.4.1):\ \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lim_{n\to\infty} d\, F_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, F(x) = \phi(t)$$

وهذا هو الشرط الضرورى.

ثانياً: الشرط الكافى "إذا":

نفــترض أن $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ لجميع قيم t وأن $\phi(t)$ مستمرة عند النقطة $t = 0$ ونثبت الآن أن

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x)$$

حيث $F(x)$ دالة توزيع احتمالى.

إذا أثبتــنا ذلك فإن الجزء الأول من النظرية يوضح أن $\phi(t)$ هى الدالة المميزة للتوزيع $F(x)$ كما فى العلاقة (5. 4. 1) السابقة. سبق أن ذكرنا فى نظرية(5 ــ 3 ــ 1) أن متتابعة دوال التوزيع الاحتمالى

$$F_1(x), F_2(x), ..., F_J(x), ...$$

تحتوى على متتابعة جزئية:

$$F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), ..., F_{n_J}(x), ...$$

وهــذه الأخــيرة تــتقارب إلى نهاية $F(x)$ حيث $F(x)$ دالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين كما أنها موجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح. ولكن هذا غير كــافٍ لكــى تكــون $F(x)$ دالـــة توزيع احتمالى. فلكى تكون $F(x)$ دالة توزيع احتمالى لابد بالإضافة إلى الخصائص السابقة أن تكون $F(-\infty) = 0$ و $F(+\infty) = 1$. لذلــك ســوف نثبــت أولاً أن $F(x)$ دالة توزيع احتمالى ويكفى فى هذا أن نثبت أن $F(+\infty) = 1$ و $F(-\infty) = 0$، وذلك كما يلى:

فى العلاقة (5. 1. 52) من نظرية التعاكس إذا كتبنا Z بدلاً من h ووضعنا $a = 0$ وكاملنا الطرفين بالنسبة لــ Z من 0 إلى h $(h > 0)$ نحصل على العلاقة التالية:

$$(5.4.2):\ \int_0^h F_{n_J}(Z)dz - \int_{-h}^0 F_{n_J}(Z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - Cos\, h t)}{t^2}\phi_{n_J}(t)\, dt$$

فــى المعادلـــة السابقة يمكن أخذ نهاية الطرفين عندما $J \to \infty$ ويمكن إدخال الــنهاية داخــل علامة التكامل حيث أن هذا مسموح به فى التكاملات السابقة للأسباب الآتية:

الــتكاملات فــى الجانب الأيسر من (5. 4. 2) مأخوذة على فترة محدودة والدالة المكاملـــة $F_{n_J}(x)$ محـــدودة $(0 \le F_{n_J}(x) \le 1)$ كما أنها تؤول إلى $F(x)$ عند

جميع نقط استمرار $F(x)$ لذلك يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل إذ أن التكامل بعد ذلك سيظل موجود. بالنسبة للجانب الأيمن من (5.4.2) نجد أن:

$$\left|\frac{(1-\cos ht)}{t^2}\phi_{n_J}(t)\right| \le \frac{1-\cos ht}{t^2}$$

لأن $|\phi_{n_J}(t)| \le 1$ ، وحيث أن الدالة $\frac{1-\cos ht}{t^2}$ دالة تكاملية بالنسبة لـ t في المدى $(-\infty \le t \le \infty)$ إذن الدالة $\frac{1-\cos ht}{t^2}\phi_{n_J}(t)$ دالة تكاملية بالنسبة لـ t في المدى $(-\infty \le t \le \infty)$ كما أن $\phi_{n_J}(t) \to \phi(t)$ لذلك عند أخذ نهاية الطرف الأيمن من (5.4.2) يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل. وعلى ذلك إذا قسمنا طرفي المعادلة (5.4.2) على h وأخذنا نهاية الطرفين عندما $J \to \infty$ نحصل على:

$$(5.4.3): \frac{1}{h}\int_0^h F(Z)dZ - \frac{1}{h}\int_{-h}^0 F(Z)dZ = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos ht)}{ht^2}\phi(t)dt$$

وبوضع $y = ht$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos y)}{t^2}\phi\left(\tfrac{y}{h}\right)dy$$

والآن بإيجاد التكامل بالتجزيء للطرف الأيسر من العلاقة السابقة نجد عندما $h \to \infty$ أن:

$$(5.4.4): \lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{h}\int_0^h F(Z)dZ - \frac{1}{h}\int_{-h}^0 F(Z)dZ\right] = F(+\infty) - F(-\infty).$$

وبالنسبة للطرف الأيمن من (5.4.3) نعلم أن $\phi(t)$ دالة مستمرة عند النقطة $t = 0$ (كما هو مفروض في منطوق النظرية) لذلك لأى قيمة من قيم t تكون:

$$(5.4.5): \lim_{h\to\infty}\phi\left(\tfrac{1}{h}\right) = \phi\left(\lim_{h\to\infty}\tfrac{1}{h}\right) = \phi(0)$$

ـ وحيث أننا لم نثبت حتى الآن أن $\phi(t)$ دالة مميزة لذلك لم نضع $\phi(0) = 1$

ـ ونلاحظ أيضاً أنه لولا افتراض أن $\phi(t)$ مستمرة عند النقطة $t = 0$ ما كنا نستطيع

إدخـال علامـة النهاية فى العلاقة (5. 4. 5). ولكن $\phi(0)$ علماً بأن $\lim_{n_j\to\infty}\phi_{n_j}(0)=\phi(0)$ لجميع قيم n_j حيث أن $\phi_{n_j}(t)$ دالة مميزة لذلك تكون: $\phi_{n_j}(0)=1$

$$\phi(0)=1$$

وعلـى ذلـك يمكـن أخـذ نهاية الدالة المكاملة فى الطرف الأيمن من (5. 4. 3) بالنسـبة لـ h عـندما $h\to\infty$ (وهذا مسموح به لنفس المبررات السابقة) فيؤول الطرف الأيمن من (5. 4. 3) إلى:

$$(5.\,4.\,6):\ \lim_{h\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-Cos\,y)}{t^2}\phi\left(\tfrac{y}{h}\right)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-Cos\,y)}{y^2}dy=1$$

ــ للحصول على التكامل الأخير السابق من (5. 4. 3, 4, 6) نجد أن:

$$F(+\infty)-F(-\infty)=1$$

وحيث أن $F(x)$ دالة غير سالبة وغير تناقصية وموجبة ولا تزيد عن الواحد الصـحيح إذن لابـد أن يكـون: $F(+\infty)=1$ و $F(-\infty)=0$. وبالتالى تكون الدالة $F(x)$ دالـة توزيع احتمالى. وباستخدام الجزء الأول من النظرية يترتب على ذلك أن الـنهاية $F(x)$ للمتتابعة $\{F_n(x)\}$ دالة توزيع احتمالى وأن الدالة المميزة $\phi(t)$ المقابلة للدالة $F(x)$ هى نهاية المتتابعة $\{\phi_n(t)\}$.

والآن إذا كـان يوجد متتابعة جزئية أخرى من المتتابعة $F_1(x), F_2(x),\ldots$ لها الـنهاية $F^*(x)$ فإنه يمكننا بأسلوب مماثل إثبات أن $F^*(x)$ دالة توزيع احتمالى وأن الدالـة المميزة لهذا التوزيع تتطابق مع (أو هى ذاتها) $\phi(t)$ وبذلك تكون الدالتان $F(x)$ و $F^*(x)$ لهمـا نفـس الدالة المميزة $\phi(t)$ وبالتالى حسب نظرية التقابل الوحيد ــ نظرية (5 ــ 1 ــ 11 ب) ــ يكون التوزيعان $F(x)$ و $F^*(x)$ متطابقان ــ أى هما فى الواقع توزيع واحد ــ $F^*(x)=F(x)$.

ومعـنى هذا أن أى متتابعة جزئية ستكون لها نفس النهاية $F(x)$. لذلك فإن المتـتابعة $F_1(x), F_2(x),\ldots$ لهـا نهاية واحدة هى $F(x)$ وحيث أن $F(x)$ دالة توزيع احتمالى إذن النظرية تم إثباتها.

هـ. ط. ث

مثال (5 ـ 4 ـ 1): "مثال توضيحى"

فـــى مـــثال (5 ـ 1 ـ 10 أ) وجدنـــا أن المتغير ذو الحدين X الذى دالة احتماله: $P(J) = Pr(X = J) = \binom{n}{J} P^J q^{n-J} \; ; J = 0,1,...,n \; , \; P + q = 1, P > 0$ ، دالــــــــته المميزة هى:

$$\phi(t) = \left[q + P e^{it}\right]^n$$

وتوقعـــه $\mu = nP$ وانحرافه المعيارى $\sigma = \sqrt{nPq}$. نفرض أننا نضع المتغير ذى الحدين X فى صورة قياسية:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث نجد من نتيجة (5 ـ 1 ـ 2 أ) أن:

$$\phi_Y(t) = e^{-it\mu/\sigma} \phi_x(t/\sigma).$$

إذن الدالـــة الممـــيزة للمتغـــير ذى الحدين عندما يكون فى صورته القياسية تأخذ الصيغة التالية:

$$\phi_n(t) = e^{-\frac{itnP}{\sqrt{nPq}}} \left[q + P e^{it/\sqrt{nPq}}\right]^n$$

واســـتخدمنا الرمز $\phi_n(t)$ ولم نستخدم $\phi(t)$ للإشارة إلى أن الدالة المميزة تعتمد على المعلمة n. وسنحاول الآن إيجاد النهاية $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ والتى سنرمز لها بالرمز $\phi(t)$. وحيـــث أن فـــى حالتـــنا هـــذه الحصـــول على $\lim_{n\to\infty} \ln \phi_n(t)$ أسهل من الحصول على $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ لذلك سوف نستخدم $\ln \phi_n(t)$ بدلاً من $\phi_n(t)$ للحصول على النهاية $\phi(t)$:

$$\ln \phi_n(t) = \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n \ln\left[1 + P\left(e^{it/\sqrt{nPq}} - 1\right)\right]$$

وبكتابة مفكوك $e^{it/\sqrt{nPq}}$ فى الطرف الأيمن نجد أن:

$$\ln \phi_n(t) = \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n \ln\left[1 + P\frac{it}{\sqrt{nPq}} - \frac{Pt^2}{2nPq} + O\left(t^3 n^{-3/2}\right)\right]$$

حيــث $O\left(t^3 n^{-\frac{3}{2}}\right)$ تمثل حدود تحتوى فى بسطها على t^3 فما فوق وفى مقامها على $n^{\frac{3}{2}}$ فما فوق. وبإيجاد مفكوك اللوغاريتم فى الطرف الأيمن:

$$\ln \phi_n(t) = \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n\left[\frac{itP}{\sqrt{nPq}} - \frac{Pt^2}{2nPq} - \frac{(iPt)^2}{2nPq} + O\left(t^3 n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= -\frac{t^2}{2} + O\left(t^3 n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

إذن لقيم t المحدودة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \phi_n(t) = \ln \phi(t) = -\frac{t^2}{2}$$

$$\therefore \phi(t) = e^{-t^2/2}$$

وطبقاً لنظرية التواصل، نجد أن توزيع المتغير ذو الحدين فى صورته القياسيـــة يؤول إلى التوزيع الذى دالته المميزة $e^{-t^2/2}$. وحيث أن $e^{-t^2/2}$ هى الدالـــة المميـزة للمتغيـــر المعتاد القياسى الذى توقعه صفر وتباينه الوحـدة كمـا يتضـح من مثـــال (5 ـ 1 ـ 10 جـ) إذن: توزيع المتغير ذو الحدين فى صورته القياسية يؤول إلى التوزيع المعتاد القياسى عندما $n \to \infty$.

ومما هو جدير بالذكر لو أننا حاولنا إيجاد نهاية التوزيع ذو الحدين باستخدام نهاية دالـــة احــتماله عندما $n \to \infty$ سنجد أن دالة الاحتمال (لجميع قيم J) تؤول إلى الصفر عــندما $n \to \infty$، أى أن التوزيع لا يؤول إلى أى توزيع آخر ومن السهل على القارئ إثـبات ذلك. لذلك فإن استخدام نهاية الدالة المميزة هو الذى مكننا من إيجاد نهاية التوزيع ذو الحدين طبقاً لنظرية التواصل.

ملاحظة (5 ـ 4 ـ 1): نعرف من نظرية (5 ـ 1 ـ 2 أ) أن الدالة المميزة $\phi(t)$ مســتمرة لجمــيع قيم t الحقيقية. وعلى هذا يتضح من نظرية (5 ـ 4 ـ 1) السابقة أنه طالمــا أن الـــنهاية $\phi(t)$ للمتتابعة $\{\phi_n(t)\}$ مستمرة عند النقطة الخاصة $t = 0$ فهى مســتمرة لكل قيمة من قيم t. أى أن الشرط القائل أن الدالة $\phi(t)$ مستمرة عند القيمة الخاصة $t = 0$ هو شرط ضرورى لصحة النظرية. والمثال التالى يوضح أن النظرية لا تكون صحيحة إذا أغفلنا هذا الشرط.

مـــثال (5 ـ 4 ـ 2): إذا كانــت المتــتابعة $\{F_n(x)\}$ متــتابعة من دوال التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X حيث:

$$F_n(x) = \frac{x+n}{2n} \quad ; -n < x < n$$
$$= 1 \quad ; \quad x \geq n$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

بيــن أن: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ ليست دالة توزيع احتمالى، وكذلك النهاية $\phi(t)$ وهى الدالة المميزة المقابلة للنهاية $F(x)$ ليست مستمرة عند النقطة $t = 0$.

(الحل)

دالة كثافة الاحتمال المقابلة للدالة $F_n(x)$ هى:

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} \quad ; -n < x < n$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

والدالة المميزة المقابلة هى:

$$\phi_n(t) = \int_{-n}^{n} \left(\tfrac{1}{2n}\right) e^{itx}\, dx = \tfrac{1}{2n} \int_{-n}^{n} [\mathrm{Cos}\, t x + i\, \mathrm{Sin}\, t x]\, dx$$

وحيث أن $\mathrm{Sin}(\cdot)$ دالة فردية و $\mathrm{Cos}(\cdot)$ زوجية

$$= \tfrac{1}{n} \int_{0}^{n} \mathrm{Cos}\, t x \; dx = \frac{\mathrm{Sin}(n t)}{n t}$$

وعندما $n \to \infty$ نجد أن $\phi_n(t)$ تتقارب لجميع قيم t إلى النهاية $\phi(t)$ حيث:

$$\phi(t) = 1 \quad ; t = 0$$
$$= 0 \quad ; t \neq 0$$

إذن النهاية $\phi(t)$ غير مستمرة عند النقطة $t = 0$ ـ لاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \tfrac{1}{2}$$

لكل قيمة ثابتة x.

إذن نهاية $F_n(x)$ عندما $n \to \infty$ (أى النهاية $F(x)$) ليست دالة توزيع احتمالى.

(5 ـ 5) تحديد دالة التوزيع الاحتمالى بواسطة العزوم:

نحاول فى هذا البند الإجابة على سؤال هام هو السؤال الآتى:

هل يمكن تحديد دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ لمتغير عشوائى X، تحديداً وحيداً، باستخدام عزوم هذا التوزيع $\{\mu'_r\}$ إذا كانت هذه العزوم موجودة؟ أو بمعنى آخر، تحت أى شــروط يمكــن لمتتابعة من العزوم $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \ldots$ لمتغير عشوائى X أن تحدد دالة توزيعــه الاحــتمالى تحديــداً وحيداً؟ فلو فرضنا مثلاً أن لدينا مجموعة من الثوابت تمثل عــزوم متغير عشوائى معلوم، فهل يمكن لأى متغير عشوائى آخر أن يكون له نفس هذه المجموعة من العزوم؟ من الواضح أنه إذا كان هذا غير ممكناً فإن مجموعة العزوم التى لديــنا تحــدد توزيعاً احتمالياً تحديداً وحيداً. وفى هذه الحالة يمكن أن تقوم العزوم بنفس الدور الذى تقوم به الدالة المميزة فى تحديد دالة التوزيع الاحتمالى تحديداً وحيداً.

فــى الواقــع ســنرى أنــه من الممكن، تحت شروط معينة، تحديد دالة التوزيع الاحتمالى تحديداً وحيداً باستخدام العزوم عندما تكون هذه العزوم موجودة، ولكن ذلك كما ذكــرنا، تحــت شروط معينة، هذه الشروط تقريباً متوفرة بالنسبة لجميع التوزيعات التى تصادفنا فى التطبيقات الإحصائية.

ومادامــت العزوم يمكن أن تحدد دالة التوزيع الاحتمالى تحديداً وحيداً، فإن وجود توزيعيــن عزومهما المتناظرة متساوية حتى درجة معينة لتكن n مثلاً يدل على أن هذين التوزيعيــن متشابهين وعندما تزيد n إلى مالانهاية (∞) فإن التوزيعان يكونا متطابقان. لذلــك يمكن استخدام توزيع معروف كتقريب لتوزيع آخر إذا تساوت عزومهما المتناظرة حتى درجة معينة لتكن n مثلاً. ومن الناحية العملية يكون هذا التقريب جيد حتى إذا كانت n تساوى 3 أو 4، أى حتى لو كانت المساواة بين العزوم الثلاثة أو الأربعة الأولى.

والــنظرية التالــية تقــدم لــنا شرطاً كافياً (وليس ضرورياً) لتحديد دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ بواسطة العزوم عندما تكون العزوم موجودة.

نظرية (5 ـ 5 ـ 1):

نفــرض أن المتغير العشوائى X له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ وعزوم هذا الــتوزيع هــى: $\mu'_J\ ;\ J = 0,1,2,3,\ldots$ وكلهــا موجــودة. فــإذا كانــت المتسلسلة $\sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{J!} \mu'_J C^J$ مــتقاربة تقارب مطلق لجميع قيم $C > 0$. فإن $F(x)$ تكون هى دالة التوزيع الاحتمالى الوحيدة التى لها هذه العزوم.

(الإثبات)

مــن تعريف الدالة المميزة $\phi(t)$ للمتغير العشوائى X ذو التوزيع $F(x)$ نجد أن $\phi(t+u)$ هى:

$$\phi(t+u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+u)x}\, dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{iux}\, dF(x)$$

وباستخدام مفكوك ماكلورين للدالة e^{iux} حول الصفر

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{J=0}^{n-1}\frac{(iux)^J}{J!}+\frac{(iux)^n}{n!}e^{iu'x}\right)e^{itx}\, dF(x)\ ;\ 0<u'<u$$

$$=\sum_{J=0}^{n-1}\frac{(iu)^J}{J!}\int_{-\infty}^{\infty}x^J e^{itx}\, dF(x)+\frac{(iu)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{iu'x} e^{itx}\, dF(x).$$

وباستخدام العلاقة (5. 1. 10):

$$\phi(t+u)=\sum_{J=0}^{n-1}\frac{(iu)^J}{J!}\frac{\phi^{(J)}(t)}{(i)^J}+\frac{u^n}{n!}\nu'_n\frac{(i)^n}{\nu'_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{iu'x} e^{itx}\, dF(x)$$

حيث ν'_n هو العزم المطلق من الدرجة n

$$=\sum_{J=0}^{n-1}\frac{u^J}{J!}\phi^{(J)}(t)+\frac{u^n\nu'_n}{n!}q(t)$$

حيث

$$(5.\ 5.\ 1):\ q(t)=\frac{(i)^n}{\nu'_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{iu'x} e^{itx}\, dF(x)\ \ ;\ 0<u'<u.$$

$$|q(t)|\le\frac{1}{\nu'_n}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n\, dF(x)=\frac{\nu'_n}{\nu'_n}=1$$

وبذلك تكون:

$$(5.\ 5.\ 2):\ \phi(t+u)=\sum_{J=0}^{n-1}\frac{u^J}{J!}\phi^{(J)}(t)+\frac{\nu'_n u^n}{n!}q(t)$$

حيث $q(t)$ كما فى (5. 5. 1) و $|q(t)|\le 1$.

لــو أن الحــد الأخــير فى الطرف الأيمن من (5. 5. 2) يؤول إلى الصفر عندما $n \to \infty$ يكــون معــنى ذلك أن $\phi(t+u)$ يمكن أن توضع فى شكل متسلسلة لانهائية تقاربية. لذلك نبحث إمكانية أن يؤول الحد الأخير إلى الصفر مع كبر n كما يلى:

نحن نفترض فى منطوق النظرية أن المتسلسلة $\sum_{J=0}^{\infty} \frac{\mu'_J C^J}{J!}$ متقاربة تقارب مطلق

وهــذا يترتــب عليه أن $\frac{\mu'_n C^n}{n!} \to 0$ عندما $n \to \infty$ ولكن الحد الأخير مكتوب بدلالة ν'_n وليس μ'_n لذلك لا يمكن مقارنته بالكمية $\frac{\mu'_n C^n}{n!}$ إلا إذا أخذنا فى الاعتبار حالتين، الحالة الأولى عندما تكون n عدد زوجى والثانية عندما تكون n عدد فردى.

أولاً: إذا كانت n عدد زوجى:

$\nu'_n = \mu'_n$ والحد الأخير يصبح

$$\frac{\nu'_n u^n}{n!} q(t) = \frac{\mu'_n u^n}{n!} q(t)$$

وعندما:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu'_n C^n}{n!} = 0$$

(لأن μ'_n موجود (محدود) وC ثابت محدود) إذن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu'_n u^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu'_n u^n}{n!} = 0$$

لجميع قيم $|u| < C$ ومادامت $|q(t)| \le 1$ إذن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu'_n u^n}{n!} q(t) = 0$$

لجميع قيم $|u| < C$.

ثانياً: إذا كانت n عدد فردى:

يكون

$$\nu'_n \geq \mu'_n$$

إذن عندما $\lim_{n\to\infty}\frac{\mu'_n C^n}{n!}=0$ لا يترتب على ذلك أن: $\lim_{n\to\infty}\frac{\nu'_n u^n}{n!}=0$.

ولكن بما أن:

$$E\left[\lambda|x|^{\frac{n-1}{2}}+|x|^{\frac{n+1}{2}}\right]^2 \geq 0$$

$$\therefore E\left[\lambda^2|x|^{n-1}+2\lambda|x|^{n}+|x|^{n+1}\right]\geq 0$$

$$\therefore \lambda^2\,\nu'_{n-1}+2\lambda\,\nu'_n+\nu'_{n+1}\geq 0$$

$$\therefore [\lambda \quad 1]\begin{bmatrix}\nu'_{n-1} & \nu'_n\\ \nu'_n & \nu'_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\ 1\end{bmatrix}\geq 0$$

إذن لابد أن يكون محدد المصفوفة المربعة أكبر من أو يساوى الصفر أى أن:

$$\nu'_{n-1}\,\nu'_{n+1}-\nu'^2_n\geq 0$$

$$\therefore \nu'^2_n \leq \nu'_{n-1}\,\nu'_{n+1}$$

والمتباينة السابقة يمكن كتابتها فى الصورة التالية:

$$(5.5.3):\ \frac{\nu'_n u^n}{n!}\leq\left[\left(\frac{\nu'_{n-1}u^{n-1}}{(n-1)!}\right)\left(\frac{\nu'_{n+1}u^{n+1}}{(n+1)!}\right)\frac{(n+1)}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث ν'_{n-1} و ν'_{n+1} عزوم مطلقة زوجية لأن n عدد فردى إذن:

$$\nu'_{n-1}=\mu'_{n-1}\quad,\quad \nu'_{n+1}=\mu'_{n+1}$$

إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu'_{n-1}u^{n-1}}{(n-1)!}=0\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\nu'_{n+1}u^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

لجميع قيم $|u|<C$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

وعلى هذا عندما $n \to \infty$ نجد أن الجانب الأيمن من المتباينة (5. 5. 3) يؤول إلى الصفر وكذلك الجانب الأيسر وبالتالى:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu'_n u^n}{n!} = 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu'_n u^n}{n!} q(t) = 0$$

لجميع قيم $|u| < C$.

وعلى ذلك سواء كانت n عدد زوجى أو فردى فإن الحد الأخير فى المتسلسلة (5. 5. 2) يؤول إلى الصفر وبالتالى يكون:

$$(5.\ 5.\ 4):\ \phi(t+u) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{u^J}{J!} \phi^{(J)}(t)$$

والمتسلسلة تقاربية على الأقل لجميع قيم $|u| < C$. وبوضع $t = 0$ مع تذكر أن $\phi^{(J)}(0) = (i)^{(J)} \mu'_J$ نحصل على:

$$(5.\ 5.\ 5):\ \phi(u) = 1 + \sum_{J=1}^{\infty} \frac{\mu'_J}{J!} (i\,u)^J$$

وهذه هى الدالة المميزة للمتغير X الذى له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ وعزومه μ'_J ولكن مع كتابة u بدلاً من t. وهذا معناه أنه فى الفترة $-C < u < C$ تحدد الدالة المميزة $\phi(u)$ تحديداً وحيداً بالعزوم μ'_J. ولكن الدالة $\phi(u)$ فى هذه الحالة لا تحدد لنا دالة توزيع احتمالى وحيدة إلا إذا كانت معرفة لجميع قيم u الحقيقية وليست عند الفترة $-C < u < C$ فقط [أنظر ملاحظة (5 ـ 1 ـ 11 هـ)] لذلك سنحاول الآن باستخدام أسلوب الاستمرار التحليلى The Method of Analytic Continuation المعروف فى نظرية الدوال التحليلية Analytic Functions إثبات أن الصيغة (5. 5. 5) صحيحة لجميع قيم u الحقيقية وذلك كما يلى:

الدالة $\phi(u)$ دالة مستمرة وجميع مشتقاتها التفاضلية موجودة عند جميع نقط u فى الفترة $|u| < C$ لذلك عند النقطتان $u = \pm\frac{1}{2}C$ تكون المتسلسلة التى يمكن الحصول عليها بمفاضلة معادلة (5. 5. 5) أى عدد من المرات هى متسلسلة تقاربية وبالتالى يمكن حساب كل المشتقات التفاضلية $\phi^{(n)}(\pm\frac{1}{2}C)$ من معادلة (5. 5. 5) أى من العزوم μ'_J.

هذه المشتقات التفاضلية تظهر كمعاملات فى المتسلسلة $\phi\left(\pm\frac{1}{2}C+u\right)$ المعطاة بالعلاقة (5. 5. 4) والمتسلسلة $\phi\left(\pm\frac{1}{2}C+u\right)$ متسلسلة تقاربية، وحيث أن $|u|<C$ إذن النقطة $\frac{1}{2}C+u$ قد تصل إلى $\frac{1}{2}C+C$ أى إلى $\frac{3}{2}C$ وبالمثل النقطة $-\frac{1}{2}C+u$ قد تصل إلى $-\frac{1}{2}C-C$ أى إلى $-\frac{3}{2}C$ وبالتالى فإن المدى المعرف عليه الدالة $\phi(t)$ قد توسع الآن إلى الفترة $-\frac{3}{2}C<t<\frac{3}{2}C$. والآن من الوضع السابق، مادامت $\phi(t)$ معرفة فى الفترة $-\frac{3}{2}C<t<\frac{3}{2}C$، يمكن حساب $\phi^{(n)}(t)$ عند النقطتان $t=\pm C$ بمفاضلة معادلة (5. 5. 5) n مرة واستعمال هذه المشتقات التفاضلية كمعاملات فى مفكوك تايلور للدالة $\phi(\pm C+u)$ من المعادلة (5. 5. 4) سنجد أن المدى المعرف عليه الدالة $\phi(t)$ قد توسع إلى الفترة $-2C<t<2C$. وهكذا بالاستمرار فى تكرار هذا (كما نرغب أى عدد من المرات) يمكن الوصول إلى أن الدالة المميزة $\phi(t)$ تتحدد تحديداً وحيداً بالعزوم μ'_J لجميع قيم t الحقيقية ويترتب على ذلك من نظرية التقابل الوحيد ــ نظرية (5 ــ 1 ــ 11 ب) ــ أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ هى الأخرى تتحدد تحديداً وحيداً بالعزوم μ'_J.

هـ. ط. ث

سنقدم فيما يلى مجموعة من النتائج للنظرية السابقة كل نتيجة منها تقدم شرطاً كافيا (وليس لازما) لكى يمكن تحديد توزيع متغير عشوائى بواسطة عزومه.

النتيجة الأولى التالية مفيدة فى تحديد دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ لأى متغير محدود bounded بواسطة عزومه.

نتيجة (5 ــ 5 ــ 1): إذا كان المتغير العشوائى X محدود (bounded) فإن دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ تتحدد تحديداً وحيداً بواسطة عزومه μ'_J و $J=0,1,2,\ldots$.

(الإثبات)

إذا كان X متغير عشوائى محدود يكون معنى ذلك أنه يوجد عددان حقيقيان a, b حيث $a<b$ و $a<X<b$ وبالتالى يكون $F(b)=1$ و $F(a)=0$. فإذا كانت M عدد حقيقى موجب تحقق العلاقة:

$$M=\max\left(|a|,|b|\right)$$

أى أن M هى أكبر القيمتين $|b|$ و $|a|$ فإن:

$$(5.\,5.\,6):\ |\mu'_J|\le\int_a^b|x|^J\,dF(x)=v'_J\le M^J$$

وبذلك يكون:

$$(5.5.7): \left|\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\mu'_J C^J}{J!}\right| \le \sum_{J=0}^{\infty}\frac{|\mu'_J|C^J}{J!} \le \sum_{J=0}^{\infty}\frac{\nu'_J C^J}{J!} \le \sum_{J=0}^{\infty}\frac{(MC)^J}{J!} = e^{MC}$$

وحيث أن e^{MC} كمية محـــدودة لجميـــع قيم C إذن الشـــرط الكـــافى للنظريـــة (5 ـ 5 ـ 1) قد تحقق وهذا يثبت صحة النتيجة (5 ـ 5 ـ 1).

هـ. ط. ث

نتـــيجة (5 ـ 5 ـ 2): متـــتابعة العزوم $\{\mu'_J\}$ للمتغير العشوائى X تحدد بصفة وحـــيدة دالـــة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ إذا كانت النهاية العظمى للكمية $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\nu'_n}}{n}$ كمية محدودة. حيث ν'_n هو العزم المطلق من الدرجة n للمتغير X.

(الإثبات)

اختبار الجذر النونى لتقارب المتسلسلات ينص على أن:

فى المتسلسلة $S=\sum u_n$ إذا كان $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L$ فإن المتسلسلة:

(أ) تتقارب تقارب مطلق إذا كان $L<1$.

(ب) تتباعد إذا كان $L>1$.

(جـ) إذا كان $L=1$ فإن الاختبار يفشل (لا يصلح).

وبمـــا أن الـــنظرية (5 ـ 5 ـ 1) تحـــدد (بصفة وحيدة) التوزيع $F(x)$ إذا كانت المتسلسلة $\sum \mu'_J C^J/J!$ متقاربة تقارب مطلق أى إذا كان $\sum|\mu'_J|C^J/J!<\infty$ حيث $C>0$ وحيث أن:

$$\left|\sum\frac{\mu'_J C^J}{J!}\right| \le \sum\frac{|\mu'_J|C^J}{J!} \le \sum \nu'_J C^J/J!$$

إذن المطلـــوب لإثـــبات صحة النتيجة التى نحن بصددها هو أن تكون المتسلسلة $\sum \nu'_J C^J/J!<\infty$ أى متقاربة وبما أن كل حدودها موجبة يكون تقاربها مطلقاً وبالتالى تكـــون المتسلســـلة $\sum_J \mu'_J C^J/J!$ تقاربـــية تقاربـــا مطلقا وبناء على هذا طبقاً لنظرية

(5 ـ 5 ـ 1) تتحدد $F(x)$ تحديداً وحيداً بواسطة العزوم $\{\mu'_J\}$. وبذلك يكون هدفنا الآن هــو إثــبات أن المتسلســلة $\sum \nu'_J C^J/J!$ تقاربية. وحسب اختبار الجذر النونى تكون المتسلسلة $\sum \frac{\nu'_J C^J}{J!}$ تقاربية إذا كان

$$\lim_{J\to\infty} \sqrt[J]{\frac{\nu'_J C^J}{J!}} < 1$$

ولكن:

$$\sqrt[J]{\frac{\nu'_J C^J}{J!}} = \frac{\nu'^{\frac{1}{J}}_J C}{\sqrt[J]{J!}}$$

حيث C كمية محدودة موجبة. ومن تقريب ستيرلنج نجد أن:

$$J! \simeq \sqrt{2\pi}\, J^{J+\frac{1}{2}} e^{-J}$$

$$\therefore \sqrt[J]{J!} \simeq (2\pi)^{\frac{1}{J}} J^{1+\frac{1}{2J}} e^{-1}$$

$$\therefore \sqrt[J]{\frac{\nu'_J C^J}{J!}} \simeq \frac{\nu'^{\frac{1}{J}}_J C e}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{1}{J}} \cdot J^{1+\frac{1}{2J}}}$$

عندما $J \to \infty$، $\frac{1}{J} \to 0$ إذن

$$\nu'^{\frac{1}{J}} = \nu'^{0} = 1$$

وحيــث أن C، e كميــتان محدودتــان، إذن تكون المتسلسلة $(\sum \nu'_J C^J/J!)$ تقاربية إذا كان:

$$\lim_{J\to\infty} \frac{\nu'^{\frac{1}{J}}_J C e}{J\,[2\pi J]^{\frac{1}{2J}}} < 1$$

أى أن

$$\lim_{J\to\infty} \left(\frac{\nu'^{\frac{1}{J}}}{J} < \frac{[2\pi J]^{\frac{1}{2J}}}{Ce} \right)$$

وباعتبار أن $[2\pi J]^{\frac{1}{2J}}$ أكبر من الواحد وتؤول إلى الواحد عندما $J \to \infty$ فيمكن اعتـبار أن الطرف الأيمن فى المتباينة السابقة يساوى كمية محدودة نرمز لها بالرمز k مثلاً وتأخذ المتباينة السابقة الصورة التالية:

$$\lim_{J\to\infty} \frac{v_J'^{\frac{1}{J}}}{J} < \frac{k}{C} \ , \ C \neq 0$$

وعلـى هذا فإن المتسلسلة $\sum v_J' C^J / J!$ تكون تقاربية إذا كانت النهاية العظمى لكمية $\lim_{J\to\infty} \frac{v_J'^{\frac{1}{J}}}{J}$ أقل من $\frac{k}{C}$ حيث k ثابت ما و $C \neq 0$ (أى أن $\frac{k}{C}$ كمية محدودة). أى أن المتسلسـلة تكون تقاربية (تقارب مطلق) إذا كانت النهاية العظمى للكمية $\lim_{J\to\infty} \frac{\sqrt[J]{v_J'}}{J}$ كمية محدودة.

هـ. ط. ث

ونقدم فيما يلى نتيجة مرادفة للنتيجة السابقة ولكن باستخدام العزوم العادية بدلاً من العزوم المطلقة.

نتيجة (5 ــ 5 ــ 3): متتابعة العزوم $\{\mu_J'\}$ للمتغير X تحدد بصفة وحيدة دالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ إذا كانت الكمية $\lim_{J\to\infty} (\mu_{2J}')^{\frac{1}{2J}} / 2J$ كمية محدودة.

(الإثبات)

نعلـم أن العـزوم الزوجـية دائمـاً موجـبة وتسـاوى العزوم المطلقة الزوجية $\mu_{2J}' = v_{2J}'$ وبالتالى باتباع نفس الإثبات المستخدم فى نتيجة (5 ــ 5 ــ 2) نجد أن:

$$\left|\sum \mu_J' C^J / J!\right| \leq \sum \frac{v_J' C^J}{J!}$$

ومـن السهل إثبات أن الكميتان $\left(\mu_{2J}'^{\frac{1}{2J}}\right)/2J$ و $\left(v_J'^{\frac{1}{J}}/J\right)$ عندما $J \to \infty$ تكونا إما محدودتـان معاً أو لانهائيتان معاً وبالتالى إذا كانت $\lim_{J\to\infty}\left(\mu_{2J}'^{\frac{1}{2J}}/2J\right) < m$ حيث m كمية محـدودة تكـون $\lim_{J\to\infty}\left(v_J'^{\frac{1}{J}}/J\right) < m'$ حيث m' كمية محدودة تعتمد على m وهذا يحقق

الشـــرط المطلـــوب فى نتيجة (5 ـ 5 ـ 2) وبالتالى فإن العزوم μ'_J تحدد الدالة $F(x)$ تحديداً وحيداً.

هـ. ط. ث

مـــثال (5 ـ 5 ـ 1): أثبــت أن عزوم التوزيع المعتاد $(0,\sigma)$ تحدد دالة توزيعه الاحتمالى تحديداً وحيداً.

(الحل)

نعلم من مثال (3 ـ 5 ـ 4) أن عزوم التوزيع المعتاد $(0,\sigma)$ هى:

$$\mu'_{2J+1} = 0 \;\; ; \;\; \mu'_{2J} = \frac{(2J)!}{2^J \, J!}\sigma^{2J}$$

إذن حســـب نتيجة (5 ـ 5 ـ 3)، عزوم التوزيع المعتاد $(0,\sigma)$ تحدد دالة توزيعه $F(x)$ تحديداً وحيداً إذا كانت:

$$\lim_{J\to\infty}\left(\mu'^{\frac{1}{2J}}_{2J}/2J\right)$$

كمية محدودة. أى إذا كانت

$$\lim_{J\to\infty}\left[\frac{(2J)!}{2^J \, J!}\right]^{\frac{1}{2J}} \frac{\sigma}{2J}$$

كمية محدودة. وباستخدام تقريب ستيرلنج للمضروب $(2J)!$ و $J!$ نجد أن:

$$K(J) = \left[\frac{(2J)!}{2^J \, J!}\right]^{\frac{1}{2J}} \frac{\sigma}{2J} \simeq \left[\frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)(2J)^{2J+\frac{1}{2}} e^{-2J}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)2^J \, (J)^{J+\frac{1}{2}} e^{-J}}\right]\frac{\sigma}{2J}$$

$$= \left[2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4J}} \, (J)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}}\right]\frac{\sigma}{2J} = \frac{\sigma \, 2^{\frac{1}{4J}}}{\sqrt{2J e}}$$

$$\lim_{J\to\infty} K(J) = \lim_{J\to\infty}\frac{\sigma \, 2^{\frac{1}{4J}}}{\sqrt{2J e}} = 0$$

أى أن:

$$\lim_{J\to\infty}\left(\mu'^{\frac{1}{2J}}_{2J}\right)/2J = \lim_{J\to\infty} K(J) = 0$$

إذن العــزوم $\{\mu'_r\}$ تحدد دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ للتوزيع المعتاد $(0,\sigma)$ تحديداً وحيداً طبقاً للنتيجة (5 ــ 5 ــ 3).

(5 ــ 6) تحديد نهاية متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالى باستخدام العزوم:

عــندما يكون لدينا متتابعة من المتغيرات العشوائية $\{X_n\} = X_1, X_2, \ldots$ وعزوم المتغير X_n من جميع الدرجات موجودة (محدودة) لجميع قيم n، فهل يمكن، تحت شروط معينة، إيجاد النهاية التى تؤول إليها دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X_n عندما $n \to \infty$؟ لقــد قـــدم "كندل" و"راو" "Kendall" and "Rao" 1950 نظريتين فيهما إجابة لهذا السؤال. وفيما يلى هاتين النظريتين.

نظرية (5 ــ 6 ــ 1):

إذا كانــت: $\{X_n\} = X_1, X_2, \ldots$ متــتابعة مـــن المتغـــيرات العشـــوائية و $\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \ldots$ متتابعة دوال توزيعاتها الاحتمالية، والعزم الثانى $\mu'_2(n)$ للمتغــير X_n موجــود (محــدود) لجمــيع قــيم n، فإنـــه يوجــد متـــتابعة جزئـــية: $\{F_{n_j}(x)\} = F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \ldots$ مـــن المتـــتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة توزيع احتمالى.

(الإثبات)

بما أن العزم $\mu'_2(n)$ محدود، إذن نفرض أنه أقل من قيمة معينة لتكن K حيث:

$$K > \mu'_2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF_n(x)$$

ولأى عدد حقيقى موجب a يمكن أن نضع المتباينة السابقة فى الصورة التالية:

$$K > \int_{-\infty}^{-a} x^2 \, dF_n(x) + \int_{-a}^{a} x^2 \, dF_n(x) + \int_{a}^{\infty} x^2 \, dF_n(x).$$

فـــى الـــتكامل الأوســـط الدالة المكاملة موجبة أى أن التكامل موجب وبحذفه يقل الطرف الأيمن من المتباينة السابقة

$$\therefore K > \int_{-\infty}^{-a} x^2 \, dF_n(x) + \int_{a}^{\infty} x^2 \, dF_n(x).$$

فى التكاملين السابقين $x^2 > a^2$ دائماً

$$\therefore K > a^2 \int_{-\infty}^{-a} d F_n(x) + a^2 \int_{a}^{\infty} d F_n(x)$$

$$\frac{K^2}{a^2} > \Pr[X_n \le -a] + \Pr[X_n \ge a]$$

إذن

$$(5.6.1): \frac{K^2}{a^2} > F_n(-a) + 1 - F_n(a) \quad n = 1, 2, \ldots.$$

فى المتباينة السابقة يمكن تصغير الطرف الأيمن كيفما نشاء باختيار a كبيرة الكبر الكافى الذى يجعل الطرف الأيمن أصغر من أى عدد صغير موجب $\in > 0$. فإذا اخترنا فى المتباينة السابقة $a > \frac{K}{\sqrt{\in}}$ فيمكن صياغة المتباينة فى الصورة التالية:

$$(5.6.2): 1 - [F_n(x) - F_n(-x)] < \in$$

لجميع قيم $a < x$ وجميع قيم n.

ومــن نظــرية (5 ـ 3 ـ 1) يمكن إثبات أنه يوجد متتابعة جزئية $\{F_{n_j}(x)\}$ من متــتابعة التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة $G(x)$ غير تناقصية ومستمرة مــن ناحــية اليمين وتنحصر بين الصفر والواحد الصحيح وذلك عند جميع نقط استمرار $G(x)$. إذن من علاقة (5.6.2) لجميع قيم $a < x$ تكون:

$$\lim_{n_j \to \infty} \{1 - [F_{n_j}(x) - F_{n_j}(-x)]\} \le \in$$

أى أن:

$$1 - [G(x) - G(-x)] \le \in$$

لجميع قيم $a < x$ وهذا يترتب عليه أن:

$$G(x) - G(-x) = 1$$

وعندما $x \to \infty$ فإن:

$$G(+\infty) - G(-\infty) = 1$$

وبمـــا أن الدالة $G(x)$ غير تناقصية وموجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح إذن لابـــد أن: $G(\infty)=1$ و $G(-\infty)=0$. وبما أنها (أى $G(x)$) غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين وتنحصر بين الصفر والواحد الصحيح بالإضافة إلى ما تم إثباته من أن $G(-\infty)=0$ و $G(\infty)=1$ إذن $G(x)$ دالـــة توزيـــع احتمالى، وحيث أنها هى نهاية المتتابعة الجزئية $\{F_{n_j}(x)\}$ إذن هذه المتتابعة وكذلك المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة توزيع احتمالى.

هـــ. ط. ث.

النظرية السابقة تفترض أن العزم الثانى $\mu_2'(n)$ للمتغير X_n محدود لجميع قيم n أى لجمـــيع المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots$. والآن نتناول الحالة التى تكون فيها جميع العزوم: $E(X_n^J)=\mu_{J,n}'$ موجودة (محدودة) لجميع قيم $J=0,1,2,\ldots$ و $n=1,2,3,\ldots$ وتكـــون الـــنهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{J,n}'=\mu_J$ لجمـــيع قـــيم J محدودة ومتتابعة العزوم (المحدودة) $\mu_0', \mu_1', \mu_2', \ldots$ تحـــدد دالـــة توزيـــع احـــتمالى تحديداً وحيداً، ثم نتساءل فى ضوء هذه الشروط، هل يمكن أن تتقارب متتابعة التوزيعات الاحتمالية $\{F_n(x)\}$ إلى توزيع احتمالى دالة توزيعه تتطابق مع الدالة $F(x)$؟

فى الواقع، النظرية التالية تقدم لنا إجابة لهذا السؤال.

نظرية (5 ـ 6 ـ 2):

إذا كانـــت $\{X_n\}=X_1, X_2, \ldots$ متـــتابعة مـــن المتغـــيرات العشـــوائية و $\{F_n(x)\}=F_1(x), F_2(x), \ldots$ متتابعة دوال توزيعاتها الاحتمالية والعزم ذو الدرجة J، $\mu_{J,n}'$ للمتغير X_n موجود (محدود) لجميع قيم J, n. وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{J,n}'=\mu_J'$ حيث μ_J' كمية محدودة لجميع قيم J. إذن:

(أ) إذا كانـــت المتـــتابعة $\{F_n(x)\}$ تـــتقارب إلى دالة توزيع احتمالى $F(x)$ فإن $\mu_0', \mu_1', \mu_2', \ldots$ هى متتابعة عزوم هذه الدالة.

(ب) وبـــالعكس، إذا كانت هذه العزوم تحدد بصفة وحيدة دالة توزيع احتمالى $F(x)$ فإن المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى النهاية $F(x)$ عند جميع نقط استمرارها.

(الإثبات)

(أ) لإثـــبات هـــذا الجزء نفرض أن المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة توزيع احتمالى $F(x)$ وبناء على صحة هذا الفرض نبين أن:

$$\lim_{n\to\infty} \mu'_{J,n} = \mu'_J \quad , \; J = 0,1,2,....$$

حيث $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, ...$ تمثل متتابعة عزوم الدالة $F(x)$. أى نبين أن:

$$(5.6.3):\; I(J) = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^J \, dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^J \, dF(x) \right| = 0$$

لجميع قيم $J = 0,1,2,...$.

ولكن لأى قيمة $C > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^J \, dF_n(x) = \int_{-C}^{C} x^J \, dF_n(x) + \int_{|x|>C} x^J \, dF_n(x)$$

ونفـــس التجزىء يمكن عمله للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} x^J \, dF(x)$ وبذلك يمكن وضـــع معادلة (5. 6. 3) فى الصورة:

$$(5.6.4):\; I(J) \le I_1 + I_2 + I_3$$

حيث:

$$(5.6.5):\; (a)\; I_1 = \left| \int_{-C}^{C} x^J \, dF_n(x) - \int_{-C}^{C} x^J \, dF(x) \right|$$

$$(b)\; I_2 = \left| \int_{|x|>C} x^J \, dF_n(x) \right|$$

$$(c)\; I_3 = \left| \int_{|x|>C} x^J \, dF(x) \right|$$

من متباينة كوشى شوارز نجد أن:

$$I_2^2 = \left(\int_{|x|>C} x^J \, dF_n(x) \right)^2 \le \int_{|x|>C} x^{2J} \, dF_n(x) \cdot \int_{|x|>C} dF_n(x).$$

التكاملان السابقان موجبان و $\mu'_{2J,n}$ كمية محدودة إذن:

$$\int_{|x|>C} x^{2J}\, d\,F_n(x) = \mu'_{2J,n} - \int_{-C}^{C} x^{2J}\, d\,F_n(x).$$

والكمية السابقة تصغر كلما اخترنا C كبيرة كبراً كافياً. كذلك

$$\int_{|x|>C} d\,F_n(x) = 1 - \int_{-C}^{C} d\,F_n(x)$$

تقترب من الصفر كلما كبرت C. وبالتالى عند اختيار C كبيرة كبراً كافياً نجد أن I_2 تقترب من الصفر لجميع قيم n. كذلك بما أن μ'_J كمية محدودة إذن:

$$\int_{|x|>C} x^{J}\, d\,F(x) = \mu'_J - \int_{-C}^{C} x^{J}\, d\,F(x)$$

وهــذه تقترب من الصفر كلما كبرت C. وبالتالى عند اختيار C كبيرة كبراً كافياً نجــد أن I_3 تقترب من الصفر. وبما أننا نفترض أن $F_n(x) \to F(x)$ عندما $n \to \infty$ وأن كــلاً مــن μ'_J و $\mu'_{J,n}$ محدودان، إذن لأى قيمة ثابتة C يمكن تصغير I_1 باختيار n كبيرة كبراً كافياً. مما سبق يتضح أن العلاقة (5. 6. 3) صحيحة، وبناء عليه تكون المتتابعة $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \ldots$ هــى متــتابعة عــزوم الدالــة $F(x)$ حيث $F(x)$ هى نهاية المتتابعة $\{F_n(x)\}$ وهذا يثبت صحة الجزء الأول من النظرية.

(ب) لإثبات الوضع العكسى فى النظرية:

نفترض أن العزوم $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \ldots$ تحدد بصفة وحيدة دالة توزيع احتمالى $F(x)$ وبناء على صحة هذا الفرض نبين أن الدالة $F(x)$ هى نهاية المتتابعة $\{F_n(x)\}$. نعرف مــن نظــرية (5 ــ 6 ــ 1) ــ عــندما $\mu'_{2,n}$ تكون محدودة ــ أن كل متتابعة جزئية من المتتابعة $\{F_n(x)\}$ تتقارب إلى دالة توزيع احتمالى. أى أن المتتابعة الجزئية رقم i يكون لهــا نهاية $F_i(x)$ هى دالة توزيع احتمالى. ومن النظرية الحالية نعرف أن كل النهايات $F_i(x)$ لكل المتتابعات الجزئية يجب أن يكون لها نفس العزوم $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots$ وبما أننا نفترض أن هذه العزوم تحدد (بصفة وحيدة) دالة توزيع احتمالى إذن كل النهايات $F_i(x)$ تكون متطابقة وتساوى دالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ التى لها العزوم $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots$.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (5 ـ 6 ـ 1): فى النظرية السابقة نشترط أن $\mu'_{J,n}$ كمية محدودة لجميع قيم J, n. فإذا استبدلنا هذا الشرط باشتراط أن $\mu'_{J,n}$ كمية محدودة لجميع قيم J وجميع قـيم n التى تزيد عن عدد صحيح موجب N حيث يمكن أن تعتمد N على العدد J، فإن هذا لا يؤثر على نتائج النظرية وذلك لأننا فى النظرية دائماً نتناول الكميات $\mu'_{J,n}$ وكذلك التوزيعات $F_n(x)$ عندما تكون n كبيرة كبراً كافياً أو عندما $n \to \infty$. ولذلك إذا كانت العزوم $\mu'_{J,n}$ غير محدودة لقيم n الصغيرة فإن هذا لا يؤثر على نتائج النظرية مادامت تصبح محدودة عندما تزيد n عن العدد الصحيح الموجب N.

فى النظريـــة (5 ــ 6 ــ 2) السابقة اشترطنا أن $\mu'_{J,n}$ موجود (محدود) لجميع قيم J, n وهذا شرطاً كافياً وليس لازماً. والمثال التالى يوضح أن نتائج النظرية السابقة تتحقق حـــتى لـــو كانـــت $\mu'_{J,n}$ ليســت موجودة لجميع قيم J، أى حتى لو كانت عزوم المتغير العشوائى X_n ليست موجودة لجميع الدرجات J.

مثال (5 ــ 6 ــ 1): "مثال توضيحى"

إذا كان المتغير العشوائى X_n له التوزيع التالى:

$$f_n(x) = \frac{k}{\left(1 + x^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad ; \; -\infty \le x \le \infty \;\; , n > 1$$

إذن العزم ذو الدرجة J للمتغير X_n هو:

$$\mu'_{J,n} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^J}{\left(1 + x^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

التكامل السابق (فى حالة وجوده) يكون مساوياً الصفر عندما تكون J عدد فردى ــ أما إذا كانت J عدد زوجى، $J = 2r$ حيث r عدد صحيح غير سالب فإن:

$$\mu'_{2r,n} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2r}\, dx}{\left(1 + x^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

وحيث أن الدالة المكاملة زوجية

$$= 2k \int_{0}^{\infty} \frac{x^{2r}\, dx}{\left(1 + x^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

ضع:

$$y = \frac{1}{1 + x^2/n}$$

عندما $x = 0$ ، $y = 0$ وعندما $x = \infty$ ، $y = 0$

$$x^2 = \left(\frac{1-y}{y}\right) n$$

$$x^{2r} = \left(\frac{1-y}{y}\right)^r n^r$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\,x\,n}{\left(n + x^2\right)^2} = \frac{-2\left(1-y\right)^{\frac{1}{2}}}{y^{-2}\, y^{\frac{1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx = \frac{-\,y^{-3/2}}{2\left(1-y\right)^{\frac{1}{2}}}\,dy$$

ويمكن الآن تحديد k كما يلى:

$$\frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \sqrt{n}\int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1}\left(1-y\right)^{\frac{1}{2}-1} dy$$

$$= \sqrt{n}\,\beta\left(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\therefore k = \left[\sqrt{n}\,\beta\left(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\mu'_{2r,n} = k\, n^{r+\frac{1}{2}} \int_0^1 y^{\frac{n-2r}{2}-1}\left(1-y\right)^{\frac{2r+1}{2}-1} dy$$

وهذا التكامل موجود فقط عندما $2r < n$ (تكامل بيتا من النوع الأول) أى أن كل العزوم موجودة حتى العزم الذى درجته $(n-1)$ فقط.

$$\mu'_{2r,n} = k\, n^{r+\frac{1}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right)\, \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

وبالتعويض عن قيمة k

$$\mu'_{2r,n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot n^r$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج لدالة جاما حيث:

$$\Gamma(P) \simeq \sqrt{2\pi}\, P^{P-\frac{1}{2}}\, e^{-P}$$

إذن:

$$\mu'_{2r,n} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}-r\right)^{\frac{n}{2}-r-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n}{2}-r\right)}}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}} \cdot n^r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^r\, 2^r \left(1-\frac{2r}{n}\right)^{\frac{n}{2}-r-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)$$

ولكن عندما $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2r}{n}\right)^{\frac{n}{2}-r-\frac{1}{2}} = e^r$$

ويمكن إثبات أن:

$$\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right) = \frac{(2r)!\sqrt{\pi}}{2^{2r}\, r!}$$

إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\mu'_{2r,n} \simeq \frac{e^r\, 2^r\, e^{-r}\,(2r)!\sqrt{\pi}}{2^{2r}\, r!\sqrt{\pi}} = \frac{(2r)!}{2^r\,(r!)}$$

وهذه هى عزوم التوزيع المعتاد القياسى (أنظر مثال (3 ــ 5 ــ 4) عندما $\sigma = 1$) وهذه العزوم جميعها موجودة.

إذن إذا كان المتغير العشوائى X_n يتقارب إلى توزيع احتمالى فلابد أن يكون هذا الــتقارب إلـــى التوزيع المعتاد القياسى. أى أنه يتقارب إلى توزيع احتمالى جميع عزومه موجــودة بالـــرغم من أن عزوم X_n ليست موجودة كلها فهى موجودة فقط حتى العزم μ'_{n-1}.

وتقارب توزيع X_n إلى التوزيع المعتاد القياسى يمكن فى الواقع استنباطه مباشرة من صيغة دالة كثافة الاحتمال $f_n(x)$ عندما $n \to \infty$ كما يلى:

$$(5.6.5'): \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\left[1+\frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} k(n) \lim_{n\to\infty} \left[1+\tfrac{x^2}{n}\right]^{-\frac{n}{2}} \lim_{n\to\infty} \left[1+\tfrac{x^2}{n}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} k(n) e^{-x^2/2} \cdot 1$$

وقد سبق إثبات أن:

$$k(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

وبتطبيق تقريب ستيرلنج على $\Gamma(\cdot)$ نجد أن:

$$k(n) = \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[1+\tfrac{1}{n}\right]^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$(5.6.6): \therefore \lim_{n\to\infty} k(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

من $(5.6.5', 6)$ نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad ; -\infty \le x \le \infty$$

وهذه هى دالة التوزيع المعتاد القياسى.

(5 ــ 7) الدالة المميزة للمتغيرات الثنائية المشتركة:

The c. f. of the Bivariate r. v's:

(5 ــ 7 ــ 1): كــل ما ذكرناه عن الدالة المميزة للمتغير المفرد يمكن تعميمه إلى حالــة أى عدد من المتغيرات المتعددة المشتركة. وسنبدأ الآن بحالة متغير ثنائى مشترك (X_1, X_2).

نفـــرض أن (X_1, X_2) متغير عشوائى ثنائى مشترك له دالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1, x_2)$ فـــإن الدالة المميزة $\phi(t_1, t_2)$ للمتغير (X_1, X_2)، حيث t_1 و t_2 عددان حقيقيان، تعرف بأنها:

$$(5.7.1a):\ \phi(t_1, t_2) = E\left(e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}\right) = \int_{R_2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)}\, d\,F(x_1, x_2)$$

$$(5.7.1b):\ \phi(t_1, t_2) = u(t_1, t_2) + i\,v(t_1, t_2)$$

حيث

$$u(t_1, t_2) = \int_{R_2} \mathrm{Cos}(t_1 x_1 + t_2 x_2)\, d\,F(x_1, x_2)$$

و

$$v(t_1, t_2) = \int_{R_2} \mathrm{Sin}(t_1 x_1 + t_2 x_2)\, d\,F(x_1, x_2)$$

علما بأن R_2 هو المستوى $-\infty \le x_1 \le \infty$ و $-\infty \le x_2 \le \infty$.

ويمكـــن دراسة خصائص الدالة المميزة $\phi(t_1, t_2)$ كتعميم للدالة $\phi(t)$ فى حالة المتغير المفرد كما يلى:

(1)

$$(5.7.2):\ \phi(0, 0) = 1$$

(2) وبما أن:

$$|\phi(t_1, t_2)| \le \int_{R_2}\left|e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)}\right| d\,F = \int_{R_2} d\,F = 1$$

إذن:

$$(5.7.3):\ |\phi(t_1, t_2)| \le 1$$

(3) كذلك:

$$(5.7.4):\ \phi(-t_1, -t_2) = \overline{\phi(t_1, t_2)}$$

حيث الجانب الأيمن هو مرافق الدالة $\phi(t_1, t_2)$.

(4) كما أن الدالة $\phi(t_1, t_2)$ دالة مستمرة استمراراً منتظماً لجميع قيم t_1 و t_2 وذلك كما يتضـــح مـــن (5. 7. 1b) حيث أن كل الدوال المكاملة دوال مستمرة استمراراً منتظماً لجميع قيم t_1 و t_2.

(5 ـ 7 ـ 2) العزم المشترك:

العزم المشترك الذى درجته r يمكن الحصول عليه، كما فى حالة المتغير المفرد، بمفاضلة الدالة $\phi(t_1, t_2)$ ثم وضع $t_1 = t_2 = 0$، وذلك كما يلى:

إذا كانـــت جمـــيع العـــزوم من الدرجة r موجودة فيمكن إثبات أن كل المشتقات التفاضلية

$$(5.7.5):\ \frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-J}\, \partial t_2^{J}} \Big\downarrow_{(t_1, t_2) \to (0,0)} \quad , \quad J = 0, 1, 2, \ldots, r .$$

تكون موجودة (محدودة). وبالتعويض عن $\phi(t_1, t_2)$ فى المعادلة السابقة بصيغتها كما فى (5. 7. 1a) نحصل على:

$$(5.7.6):\ \frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-J}\, \partial t_2^{J}} = (i)^r\, E\left[X_1^{r-J}\, X_2^{J}\, e^{i(t_1 X_1 + i t_2 X_2)}\right]$$

ومـــن العلاقـــة السابقة نحصل على العزم المشترك (غير المركزى) $\mu'_{r-J,J}$ من الدرجة r كما فى الصيغة التالية:

$$(5.7.7):\ \mu'_{r-J,J} = E\left(X_1^{r-J}\, X_2^{J}\right) = \left(\frac{1}{i}\right)^r \left[\frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-J}\, \partial t_2^{J}}\right]_{(t_1, t_2) = (0,0)}$$

ويمكن الحصول على العزوم التى من الدرجة الأولى والثانية كما يلى:

$$(5.7.8):\ (a)\ \mu'_{10} = E(X_1) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right]_{(0,0)}$$

$$(b)\ \mu'_{01} = E(X_2) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t_2}\right]_{(0,0)}$$

$$(c)\ \mu'_{20} = v(X_1) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1^2}\right]_{(0,0)}$$

$$(d)\ \mu'_{02} = v(X_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_2^2}\right]_{(0,0)}$$

$$(e)\ \mu'_{11} = Cov(X_1, X_2) = \rho_{12}\, \sigma_1\, \sigma_2 = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1\, \partial t_2}\right]_{(0,0)}$$

(5 ــ 8) الدوال المولدة للمتراكمات والعزوم والعزوم العاملية الثنائية:

(5 ــ 8 ــ 1) الدالة المولدة للمتراكمات الثنائية المشتركة:

إذا كـــان X_1 و X_2 متغير عشوائى ثنائى مشترك دالته المميزة $\phi(t_1, t_2)$ فإن الدالة المولدة للمتراكمات للمتغير (X_1, X_2) تعرف بأنها:

$$(5.\ 8.\ 1):\ K(t_1, t_2) = \ln \phi(t_1, t_2)$$

أى أن:

$$(5.\ 8.\ 2):\ \phi(t_1, t_2) = \exp[K(t_1, t_2)].$$

وبمفاضـــلة الدالة المولدة للمتراكمات $(r-J)$ مرة بالنسبة لــ t_1 و J مرة بالنسبة لــ t_2 ثم التعويض عن $t_1 = t_2 = 0$ نحصل على المتراكمة $k_{r-J,J}$ وهى متراكمة من الدرجة r فى الصورة التالية:

$$(5.\ 8.\ 3):\ k_{r-J,J} = \left(\frac{1}{i}\right)^r \left[\frac{\partial^r K(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-J}\, \partial t_2^J}\right] \downarrow$$

$$(t_1 = t_2 = 0)$$

وذلـــك مـــع مراعاة شروط وجود كل من المتراكمات والعزوم المشتركة. ويمكن الحصول على المتراكمات المشتركة من الدرجة الأولى والثانية كما يلى:

$$(5.8.4):\ (a)\ k_{10} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right]_{(0,0)}$$

$$(b)\ k_{01} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial K}{\partial t_2}\right]_{(0,0)}$$

$$(c)\ k_{20} = \left(\frac{1}{i}\right)^2\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t_1^2}\right]_{(0,0)}$$

$$(d)\ k_{02} = \left(\frac{1}{i}\right)^2\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t_2^2}\right]_{(0,0)}$$

$$(e)\ k_{11} = \left(\frac{1}{i}\right)^2\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{(0,0)}$$

(5 ـ 8 ـ 2) الدالة المولدة للعزوم المشتركة:

الدالـــة المولدة للعزوم المشتركة $M(t_1,t_2)$ ، فى حالة وجودها، يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة المشتركة من العلاقة:

$$(5.8.5):\ M(t_1,t_2) = \phi\left(\tfrac{t_1}{i},\tfrac{t_2}{i}\right)$$

$|t_2| < h_2$ و $|t_1| < h_1$ وحيث $h_1 > 0$ ، $h_2 > 0$ عددان حقيقيان صغيران.

ويمكن الحصول على العزم المشترك $\mu'_{r-J,J}$ من الدرجة r كما يلى:

$$(5.8.6):\ \mu'_{r-J,J} = \left[\frac{\partial^r M(t_1,t_2)}{\partial t_1^{r-J}\,\partial t_2^{J}}\right]_{(t_1=t_2=0)}$$

(5 ـ 8 ـ 3) الدالة المولدة للعزوم العاملية المشتركة:

إذا كان المتغيران العشوائيان X_1 و X_2 متقطعان يأخذان فقط القيم $0,1,2,3,...$ فيمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم العاملية المشتركة $P(t_1,t_2)$ من الدالة المولدة للعزوم المشتركة $M(t_1,t_2)$ بوضع $\ln t_i$ بدلا من t_i $(i=1,2)$ حيث نجد أن:

$$(5.8.7):\ P(t_1,t_2)=M(\ln t_1,\ln t_2)=\sum_{J,k} t_1^J\, t_2^k\, P_{Jk}$$

وذلك لأن:

$$M(\ln t_1,\ln t_2)=E\left(e^{x_1(\ln t_1)+x_2(\ln t_2)}\right)=E\left(t_1^{x_1}\, t_2^{x_2}\right)=P(t_1,t_2).$$

[$P(t_1,t_2)$ هى الدالة المولدة للاحتمالات للمتغير الثنائى المتقطع المشترك]

(5 ـ 9) الدوال المميزة الهامشية:

يمكـــن الحصول على الدالة المميزة الهامشية للمتغير X_1 (أو للمتغير X_2) من العلاقة (5.7.1a) بوضع $t_2=0$ (أو $t_1=0$) كما يلى:

$$(5.9.1):\ \phi(t_1,0)=E\left(e^{it_1X_1}\right)=\phi_1(t_1)$$

وهذه هى الدالة المميزة للمتغير X_1.

$$(5.9.2):\ \phi(0,t_2)=E\left(e^{it_2X_2}\right)=\phi_2(t_2)$$

وهذه هى الدالة المميزة للمتغير X_2.

ومن صيغة (5.7.7) نجد أن:

$$(5.9.3):\ (a)\ \mu'_{r0}=E\left(X_1^r\right).$$

$$(b)\ \mu'_{0J}=E\left(X_2^J\right).$$

وهذه هى العزوم فى حالة المتغير المفرد.

$$(c)\ \mu'_{10}=E(X_1)\ ,\ \mu'_{01}=E(X_2)$$

$$(d)\ \mu_{20}=v(X_1)\ ;\ \mu_{02}=v(X_2).$$

كذلك من (5.7.7) نجد أنه إذا كان المتغيران X_1 و X_2 مستقلان يكون:

$$(5.9.4):\ (a)\ \mu'_{rJ}=\mu'_{r0}\cdot\mu'_{0J}$$

$$(b)\ \mu'_{11}=\mu'_{10}\cdot\mu'_{01}$$

وإذا كانت المتغيرات مقيسة من مركزها فإن العزوم حول الصفر تكون هى نفسها العزوم المركزية حيث يكون:

$$\text{(c) } \mu_{11} = \mu_{10} \cdot \mu_{01} = 0$$

(5 ــ 10) نظرية التعاكس للمتغير الثنائى المشترك:

سنقدم فيما يلى تعميم لنظريتى "التعاكس" و"التقابل الوحيد" ــ نظريتى (5 ــ 1 ــ 11 أ و 11 ب) ــ إلى حالة متغير عشوائى ثنائى مشترك (X_1, X_2)، والنظرية التالية تعتبر تعميم لهاتين النظريتين المشار إليهما.

نظرية (5 ــ 10 ــ 1):

إذا كان (X_1, X_2) متغير عشوائى مشترك له دالة معيزة مشتركة $\phi(t_1, t_2)$ ودالة توزيع احتمالى مشتركة $F(x_1, x_2)$ وكانت $F(x_1, x_2)$ مستمرة على محيط المستطيل $(a_2 - h_2 \le x_2 \le a_2 + h_2)$ و $(a_1 - h_1 \le x_1 \le a_1 + h_1)$، $h_1 > 0$ و $h_2 > 0$، فى المستوى R_2. فإن:

$$\text{(5. 10. 1): } Pr(a_1 - h_1 < X_1 \le a_1 + h_1 \; ; \; a_2 - h_2 < X_2 \le a_2 + h_2)$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{Sin\, h_1 t_1}{t_1} \frac{Sin\, h_2 t_2}{t_2} \cdot e^{-i(a_1 t_1 + a_2 t_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 \, dt_2 .$$

وإذا كانت:

$$\iint_{R_2} |\phi(t_1, t_2)| dt_1 \, dt_2 < \infty$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1, x_2)$ تكون موجودة ومعرفة عند النقطة $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ بالعلاقة:

$$\text{(5. 10. 2): } f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 \, dt_2 .$$

(الإثبات)

الإثبات يكون مشابها تماماً لإثبات نظريتى (5 ــ 1 ــ 11 أ و 11 ب) فى حالة المتغير المفرد. ونتناول الآن الحالة التى يكون فيها المتغيران X_1 و X_2 مستمران، علماً بأن حالة المتغيران المتقطعان يمكن الحصول عليها باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع المناسبة.

ضع:

$$J(T)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_1 t_1}{t_1}\cdot\frac{\operatorname{Sin}h_2 t_2}{t_2}\exp\left[i\left(a_1t_1+a_2t_2\right)\right]\phi\left(t_1,t_2\right)dt_1\ dt_2 .$$

وبالتعويض عن $\phi(t_1,t_2)$ من علاقة (5. 7. 1a)

$$J(T)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}h_1 t_1}{t_1}\cdot\frac{\operatorname{Sin}h_2 t_2}{t_2}\exp\left[i t_1\left(x_1-a_1\right)\right]\right.$$

$$\left.\exp\left[i t_2\left(x_2-a_2\right)\right]f\left(x_1,x_2\right)d x_1\, d x_2\right\}dt_1\ dt_2$$

وبأسلوب مشابه لحالة المتغير الواحد نصل إلى:

$$J(T)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_1 t_1}{t_1}e^{it_1(x_1-a_1)}dt_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_2 t_2}{t_2}e^{it_2(x_2-a_2)}dt_2\, f\left(x_1,x_2\right)d x_1\ d x_2$$

$$J(T)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_1 t_1}{t_1}\left[\operatorname{Cos}t_1\left(x_1-a_1\right)+i\operatorname{Sin}t_1\left(x_1-a_1\right)\right]dt_1\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_2 t_2}{t_2}\left[\operatorname{Cos}t_2\left(x_2-a_2\right)+i\operatorname{Sin}t_2\left(x_2-a_2\right)\right]dt_2\right\}f\left(x_1,x_2\right)d x_1\ d x_2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_1 t_1}{t_1}\operatorname{Cos}t_1\left(x_1-a_1\right)dt_1\right\}$$

$$\cdot\left\{2\int_{0}^{T}\frac{\operatorname{Sin}h_2 t_2}{t_2}\operatorname{Cos}t_2\left(x_2-a_2\right)dt_2\right\}f\left(x_1,x_2\right)d x_1\ d x_2$$

وباستخدام العلاقة

$$\operatorname{Sin}(m)\operatorname{Cos}(n)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{Sin}(n+m)-\operatorname{Sin}(n-m)\right]$$

نجد أن:

$$J(T)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(x_1-a_1+h_1)t_1}{t_1}-\frac{\operatorname{Sin}(x_1-a_1-h_1)t_1}{t_1}\right\}dt_1$$

$$\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(x_2-a_2+h_2)t_2}{t_2}-\frac{\operatorname{Sin}(x_2-a_2-h_2)t_2}{t_2}\right\}dt_2\, f(x_1,x_2)\,dx_1\;dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(x_1,T)g_2(x_2,T)\,f(x_1,x_2)\,dx_1\;dx_2$$

حيث:

$$g_r(x_r,T)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(x_r-a_r+h_r)t_r}{t_r}-\frac{\operatorname{Sin}(x_r-a_r-h_r)t_r}{t_r}\right\}dt_r\;,r=1,2.$$

ومن (5. 1. 55) نجد أن:

$$\lim_{T\to\infty}g_r(x_r,T)=\begin{cases}0 & ;\ x_r>a_r+h_r\\ \frac{1}{2} & ;\ x_r=a_r\pm h_r\\ 1 & ;\ a_r-h_r<x_r<a_r+h_r\end{cases}\qquad ;\ r=1,2.$$

$$\therefore \lim_{T\to\infty}J(T)=\int_{a_1-h_1}^{a_1+h_1}\int_{a_2-h_2}^{a_2+h_2}f(x_1,x_2)\,dx_1\;dx_2$$

$$=\Pr[a_1-h_1<X_1\le a_1+h_1\;;\;a_2-h_2<X_2\le a_2+h_2]$$

وهذا يبرهن الجزء الأول من النظرية.

بقسمة طرفى المعادلة (5. 10. 1) على $2h_1\,2h_2$ وأخذ النهاية عندما $h_1\to 0$ و $h_2\to 0$ وعندما $(x_1,x_2)=(a_1,a_2)$. نجد أن:

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\frac{\Pr(x_1-h_1<X_1\le x_1+h_1\;;\;x_2-h_2<X_2\le x_2+h_2)}{2h_1\cdot 2h_2}$$

$$=\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}h_1t_1}{h_1t_1}\cdot\frac{\operatorname{Sin}h_2t_2}{h_2t_2}e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)}\,\phi(t_1,t_2)dt_1\,dt_2\,.$$

وحيث أن القيمة الموجبة للدالة المكاملة فى التكامل السابق أقل من أو تساوى $\left|\phi(t_1,t_2)\right|$ كما أن $\iint_{R_2} \left|\phi(t_1,t_2)\right| dt_1\, dt_2 < \infty$ حسب فرض النظرية إذن يمكن إبدال علامات النهاية والتكامل فى التكامل السابق وبذلك يكون:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)}\, \phi(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2$$

هـ. ط. ث.

والنظرية السابقة توضح لنا أنه بمعلومية $\phi(t_1,t_2)$ يمكن معرفة:

$$(5.\ 10.\ 3):\ \Pr(x_1 < X_1 \le x_1'\ ;\ x_2 < X_2 \le x_2')$$

عند أى فترة استمرار $x_i < X_i \le x_i'$ ، $i = 1,2$ فى المستوى R_2. وعلى ذلك فإن المعادلة (3 .10 .5) تحدد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(x_1,x_2)$ تحديداً وحيداً فــى المستوى R_2. وبما أن دالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1,x_2)$ دالة مستمرة من ناحية اليميــن وغــير تناقصــية بالنسبة لكلا المتغيرين X_1 و X_2 فإن هذا يترتب عليه أن قيم $F(x_1,x_2)$ عند نقط استمرارها تحددها تحديداً تاماً (وحيداً).

ملاحظة (5 ـ 10 ـ 1): وبنفس الأسلوب المتبع فى النظرية السابقة يمكن تعميم نظـــرية التواصـــل ـ نظـــرية (5 ـ 4 ـ 1) وكذلـــك الـــنظريات (5 ـ 5 ـ 1) و(5 ـ 6 ـ 1 و2) ـ إلى حالة متغير ثنائى مشترك وكذلك إلى حالة متغير متعدد مشترك عـــدد مركباته n وذلك باستبدال الدوال المميزة ودوال التوزيع الاحتمالى للمتغير المفرد فى النظريات السابقة بالدوال المتعددة المشتركة المناظرة لها سواء فى منطوق النظرية أو الإثــبات. لذلــك سنكتفى بذكر منطوق نظرية التواصل فى حالة n من المتغيرات فى البند (5 ـ 13) تاركين للقارئ تعميم باقى النظريات المشار إليها.

ملاحظـــة (5 ـ 10 ـ 2): لقـــد ذكـــرنا فـــى (5 ـ 2 ـ 1) أن استقلال المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ يعتبر شرطاً كافياً للحصول على النتيجة:

$$(5.\ 10.\ 3'):\ \phi_{\sum x_J}(t) = \prod_{J=1}^{n} \phi_{x_J}(t)$$

ولكـــنه لـــيس شـــرطاً ضرورياً. إذ يمكن أن تكون المتغيرات $X_1,...,X_n$ غير مستقلة ومع ذلك تحقق النتيجة (5. 10. 3). والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال (5 ـ 10 ـ 1): "مثال توضيحى"

فى الدالة المشتركة:

$$(5.10.4):\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\sqrt{x\,y}}+h(x-y)(x\,y-x-y+2)e^{-(x+y)}.$$

$0\le y\le\infty\ ;\ 0\le x\le\infty$ ، h قيمة صغيرة معينة.

يمكن إثبات أن الدالة $f(x,y)$ تحقق شروط كثافة الاحتمال أى:

$$f(x,y)\ge 0$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=1$$

وبالـــتالى يمكن اعتبار الدالة $f(x,y)$ دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغير عشوائى مشـــترك (X,Y). ومـــن صيغة هذه الدالة يتضح أن المتغيران غير مستقلان حيث أن $f(x,y)$ لا يمكن وضعها على صورة حاصل ضرب عاملين أحدهما دالة فى x والثانى دالة فى y.

كما يمكن إثبات أن الدالة المميزة المشتركة للمتغير (X,Y) هى:

$$(5.10.5):\ \phi(t_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{(1-2it_1)(1-2it_2)}}+\frac{2ht_1t_2(t_1-t_2)}{(1-it_1)^3(1-it_2)^3}.$$

للحصول على الدالة المميزة للمتغير X، $\phi_x(t)$، ضع $t_2=0$ فى (5. 10. 5) إذن:

$$(5.10.6):\ \phi_x(t)=(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالمثل للحصول على الدالة المميزة للمتغير Y، $\phi_y(t)$، ضع $t_1=0$، إذن:

$$(5.10.7):\ \phi_y(t)=(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

وللحصول على الدالة المميزة للمجموع $X+Y$ نضع $t_2=t_1$ حيث:

$$E\left(e^{i(t_1X+t_2Y)}\right)=E\left[e^{it(X+Y)}\right]=\phi_{x+y}(t)$$

إذن:

$$(5.10.8):\ \phi_{x+y}(t)=\phi(t,t)=(1-2it)^{-1}$$

من (5. 10. 6, 7, 8) نجد أن:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

بالرغم من أن المتغيران X و Y غير مستقلان.

(5 ـ 11) الدوال المميزة للمتغيرات العشوائية المستقلة:

يمكـــن مـــن الدالة المميزة $\phi(t_1, t_2)$ للمتغير المشترك (X_1, X_2) معرفة إذا ما كان X_1 و X_2 مستقلان أم لا دون الحاجة إلى معرفة دالة توزيعهما الاحتمالى وذلك كما يتضح من النظرية التالية:

نظرية (5 ـ 11 ـ 1):

إذا كـــان (X_1, X_2) متغير عشوائى ثنائى مشترك دالته المميزة $\phi(t_1, t_2)$ فإن X_1 و X_2 يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(5.11.1): \phi(t_1, t_2) = \phi(t_1, 0) \cdot \phi(0, t_2) = \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2)$$

حيث $\phi_1(t_1)$ و $\phi_2(t_2)$ هما الدالتين المميزتين للمتغيرين X_1 و X_2 على الترتيب.

(الإثبات)

لإثـــبات أن الشرط (5. 11. 1) ضرورى (لازم) نفرض أن المتغيران X_1 و X_2 مســـتقلان وبالـــتالى دالـــة توزيعهما الاحتمالى المشتركة مساوية لحاصل ضرب دالتى توزيعهما الهامشيتين أى أن:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$$

$$\therefore \phi(t_1, t_2) = \int_{R_2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \, d\,F(x_1, x_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t_1 x_1} \, d\,F_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t_2 x_2} \, d\,F_2(x_2) = \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2).$$

وهذا يثبت أن الشرط ضرورى.

ولإثبات أن الشرط كافى نفترض أن العلاقة (5. 11. 1) صحيحة، وبالتعويض عن ذلك فى (5. 10. 1) من نظرية التعاكس نجد أن:

$$(5.11.2):\ Pr\left(x_1 - h_1 < X_1 \le x_1 + h_1\ ;\ x_2 - h_2 < X_2 \le x_2 + h_2\right)$$

$$= \prod_{r=1}^{2}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{Sin\,h_r t_r}{t_r}\,e^{-it_r x_r}\,\phi_r(t_r)\,dt_r\right]$$

ومن نظرية (5 ــ 1 ــ 11 أ) للمتغير المفرد نجد أن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالى:

$$(5.11.3):\ Pr\left[\prod_{r=1}^{2}\left(x_r - h_r < X_r \le x_r + h_r\right)\right] = \prod_{r=1}^{2} Pr\left(x_r - h_r < X_r \le x_r + h_r\right)$$

والعلاقة السابقة صحيحة لأى فترة استمرار فى R_2 . ومن بند (2 ــ 20) نعرف أن العلاقة (5.11.3) تتضمن أن المتغيرين X_1 و X_2 يحققان العلاقة التالية:

$$F\left(x_1, x_2\right) = F_1\left(x_1\right)\cdot F_2\left(x_2\right)$$

أى أن المتغيران X_1 و X_2 مستقلان.

هــ. ط. ث.

والــنظرية السابقة يمكن تعميمها إلى أى عدد (محدود) من المتغيرات العشوائية، حيث يمكن إثبات ما يلى:

نظرية (5 ــ 11 ــ 2):

إذا كــان $\left(X_1, ..., X_n\right)$ متغــير مــتعدد دالته المميزة $\phi\left(t_1, ..., t_n\right)$ فإن المتغيرات $X_1, ..., X_n$ تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كان:

$$(5.11.4):\ \phi\left(t_1, ..., t_n\right) = \prod_{J=1}^{n}\phi_J\left(t_J\right)$$

حيث $\phi_J\left(t_J\right)$ هى الدالة المميزة للمتغير X_J و $J = 1, 2, ..., n$.

(5 ــ 12) مفكوك ماكلورين للدالة المميزة $\phi\left(t_1, t_2\right)$:

يمكــن تقديــم مفكــوك ماكلوريــن للدالـــة المميزة $\phi\left(t_1, t_2\right)$ للمتغير المشترك $\left(X_1, X_2\right)$ فى النظرية التالية:

نظرية (5 ـ 12 ـ 1):

إذا كـان العـزم المشـترك μ'_{rs} الـذى درجـته $r+s=n$ للمتغير المشترك (X_1, X_2) موجـود، فإن الدالة المميزة $\phi(t_1,t_2)$ يمكن وضعها فى شكل متسلسلة ماكلوريـن بدلالة قوى t_1 و t_2 التصاعدية حول النقطة $(t_1,t_2)=(0,0)$ ـ أى فى جوار للنقطة (t_1,t_2) ـ فى الصورة التالية:

$$(5.12.1):\ \phi(t_1,t_2)=1+\sum_{J=1}^{n}\sum_{r=0}^{J}\frac{(it_1)^{J-r}}{(J-r)!}\cdot\frac{(it_2)^r}{r!}\mu'_{J-r,r}+0\left(t_1(n)\cdot t_2(n)\right).$$

حيث $0\left(t_1(n)\cdot t_2(n)\right)$ تمثل حدود تحتوى على $t_1^r t_2^s$، $n<r+s$ وتحقق العلاقة:

$$\lim_{\substack{t_1\to t,t_2\to t\\ t\to 0}}\frac{0\left(t_1(n)\cdot t_2(n)\right)}{t^n}=0$$

والعـزم المشـترك (حـول الأصل) $\mu'_{J-r,r}$ هو معامل $\frac{(it_1)^{J-r}}{(J-r)!}\cdot\frac{(it_2)^r}{r!}$ فى مفكوك $\phi(t_1,t_2)$.

(الإثبات)

بما أن:

$$\phi(t_1,t_2)=\int_{R_2}e^{i(t_1x_1+t_2x_2)}d\,F(x_1,x_2)$$

والدالة $g(t_1,t_2)=e^{i(t_1x_1+t_2x_2)}$ دالة مستمرة ومحدودة لجميع قيم (t_1,t_2) و (x_1,x_2) كما أن

$$\frac{\partial^n g(t_1,t_2)}{\partial t_1^{n-\nu}\,\partial t_2^{\nu}}=g^{(n)}(t_1,t_2)\ ,\ \ \nu=0,1,2,\dots,n$$

دالة مستمرة لذلك يمكن وضعها فى شكل متسلسلة ماكلورين كما يلى:

$$(5.12.2a):\ g(t_1,t_2)=g(0,0)+\left(t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)g(t_1,t_2)\downarrow_{(0,0)}$$

$$+\frac{1}{2!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2 g(t_1,t_2)\downarrow_{(0,0)}$$

....

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{n-1} g(t_1,t_2)\downarrow_{(0,0)}$$

$$+R(n)\ \ ;\ g(0,0)=1$$

حيث:

$$(5.12.2b):\ R(n)=\frac{1}{n!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{n} g(t_1,t_2)\downarrow_{(t_1',t_2')}$$

لجميع قيم $0<t_2'<t_2$ و $0<t_1'<t_1$. و

$$(5.12.2c):\left(t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{J} g(t_1,t_2)\downarrow_{(0,0)}$$

$$=\sum_{r=0}^{J}\binom{J}{r}\left[t_1^{J-r}\frac{\partial^{J-r}}{\partial t_1^{J-r}}+t_2^{r}\frac{\partial^{r}}{\partial t_2^{r}}\right]g(t_1,t_2)\downarrow_{(0,0)}$$

$$=\sum_{r=0}^{J}\binom{J}{r}\left[t_1^{J-r}(i\,x_1)^{J-r}\,t_2^{r}(i\,x_2)^{r}\right]$$

من (5. 12. 2a, b) نجد أن:

$$(5.12.3):\ \phi(t_1,t_2)=1$$

$$+\sum_{J=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{J}\frac{1}{J!}\binom{J}{r}(i\,t_1)^{J-r}(i\,t_2)^{r}\int_{R_2}x_1^{J-r}\,x_2^{r}\,d\,F(x_1,x_2)$$

$$+\int_{R_2}R(n)\,d\,F(x_1,x_2).$$

ومن (5. 12. 2b, c) نجد أن:

$$R(n)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1 x_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2 x_2)^{\nu}}{\nu!}e^{i(t_1' x_1+it_2' x_2)}$$

إذن:

$$\int_{R_2}R(n)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2)^{\nu}}{\nu!}\int x_1^{n-\nu}\,x_2^{\nu}\,e^{i(t_1' x_1+t_2' x_2)}\,d\,F(x_1,x_2)\cdot$$

ضع:

$$e^{it_1' x_1+it_2' x_2}=1+\left(e^{it_1' x_1+it_2' x_2}-1\right)$$

إذن:

$$(5.\,12.\,4):\ \int_{R_2}R(n)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2)^{\nu}}{\nu!}\int_{R_2}x_1^{n-\nu}\,x_2^{\nu}\left[1+\left(e^{it_1' x_1+it_2' x_2}-1\right)\right]d\,F(x_1,x_2)\cdot$$

من (5. 12. 3, 4) نجد أن:

$$\begin{aligned}\phi(t_1,t_2)=1&+\sum_{J=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{J}\frac{(i t_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(i t_2)^{r}}{r!}\mu'_{J-r,r}\\&+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2)^{\nu}}{\nu!}\mu'_{n-\nu,\nu}\\&+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2)^{\nu}}{\nu!}\int_{R_2}x_1^{n-\nu}\,x_2^{\nu}\left(e^{it_1' x_1+it_2' x_2}-1\right)d\,F(x_1,x_2)\cdot\end{aligned}$$

إذن:

$$(5.\,12.\,5a):\ \phi(t_1,t_2)=1+\sum_{J=1}^{n}\sum_{r=0}^{J}\frac{(i t_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(i t_2)^{r}}{r!}\mu'_{J-r,r}+0\left[t_1(n)\cdot t_2(n)\right]$$

حيث:

$$(5.12.5b):\ 0\left[t_1(n)\cdot t_2(n)\right]$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{(i t_2)^{\nu}}{\nu!}\int_{R_2} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\left(e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2}-1\right) d\,F(x_1,x_2)$$

$$0<t_1'<t_1\ ,\ 0<t_2'<t_2\,.$$

وبأخذ نهاية التكامل الموجود فى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة عندما $t_1 \to 0$ و $t_2 \to 0$ حيث أنه من المسموح به تبادل علامتى النهاية والتكامل لأن نتيجة التكامل بعد ذلك تكون محدودة كما يتضح مما يلى:

$$\lim_{\substack{t_1\to 0\\ t_2\to 0}}\int_{R_2} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\left(e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2}-1\right) d\,F(x_1,x_2)$$

$$=\int_{R_2} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\lim_{\substack{t_1\to 0\\ t_2\to 0}}\left(e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2}-1\right) d\,F(x_1,x_2)$$

$$\left(0<t_1'<t_1\ ,\ 0<t_2'<t_2\right)$$

إذن $t_2' \to 0 \ as\ t \to 0$

$$=\int_{R_2} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\,(0)\,d\,F(x_1,x_2)=0$$

إذن من الواضح أن:

$$\lim_{\substack{t_1\to t,\, t_2\to t\\ t\to 0}}\frac{0\left[t_1(n)\cdot t_2(n)\right]}{t^n}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\lim_{\substack{t_1\to t,\, t_2\to t\\ t\to 0}}\frac{\left(i\,\frac{t_1}{t}\right)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\frac{\left(i\,\frac{t_2}{t}\right)^{\nu}}{(\nu)!}\int_{R_2} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\lim_{\substack{t_1'\to 0\\ t_2'\to 0}}\left(e^{i t' x_1 + i t' x_2}-1\right) d\,F(x_1,x_2)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(i)^n}{(n-\nu)!\,\nu!}\left[0\right]=0$$

من العلاقة السابقة و(5.12.5a) نصل إلى الإثبات المطلوب.

هـ. ط. ث.

وإذا كانت كل العزوم من جميع الدرجات موجودة فيمكن كتابة العلاقة (5. 12. 1) في الصورة التالية:

$$(5.12.6):\ \phi(t_1,t_2)=1+\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{J}\frac{(it_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(it_2)^{r}}{r!}\mu'_{J-r,r}\,.$$

(5 ـ 13) الدالة المميزة المركزية:

نرمـــز للدالـــة الممـــيزة المركـــزية للمتغير الثنائي المشترك (X_1,X_2) بالرمز $\phi_c(t_1,t_2)$ حيث:

$$(5.13.1):\ \phi_c(t_1,t_2)=E\left[e^{i[t_1(X_1-\mu_{10})+t_2(X_2-\mu_{01})]}\right]=e^{-(it_1\mu_{10}+it_2\mu_{01})}\,\phi(t_1,t_2)$$

حيث $\phi(t_1,t_2)$ هي الدالة المميزة المعطاة بالعلاقة (5. 7. 1a) و $\mu_{10}=E(X_1)$ و $\mu_{01}=E(X_2)$. فــإذا كانت $\mu_{10}=\mu_{01}=0$ تكون الدالة المميزة المركزية هي نفسها الدالة المميزة العادية $\phi(t_1,t_2)$ وتكون العزوم المركزية هي العزوم العادية.

وإذا كانت العزوم المشتركة من الدرجة الثانية موجودة فيمكن كتابة مفكوك الدالة المميزة العادية $\phi(t_1,t_2)$ والدالة المميزة المركزية $\phi_c(t_1,t_2)$ كما يلي:

$$(5.13.2a):\ \phi(t_1,t_2)=1+\tfrac{i}{1!}(\mu'_{10}t_1+\mu'_{01}t_2)$$

$$+\tfrac{i^2}{2!}(\mu'_{20}t_1^2+2\mu'_{11}t_1t_2+\mu'_{02}t_2^2)+0[t_1(2)\cdot t_2(2)]\cdot$$

و

$$(5.13.2b):\ \phi_c(t_1,t_2)=1+\tfrac{i^2}{2!}(\mu_{20}t_1^2+2\mu_{11}t_1t_2+\mu_{02}t_2^2)+0[t_1(n)\cdot t_2(n)]$$

حيث $0[t_1(n)\cdot t_2(n)]$ كما في (5. 12. 1) و

$$\mu'_{10}=E(X_1)\ ;\ \mu'_{01}=E(X_2)\ ,\ \mu'_{11}=E(X_1X_2)$$

$$\mu_{20}=V(X_1)\ ;\ \mu_{02}=V(X_2)\ ;\ \mu_{11}=Cov(X_1,X_2).$$

(5 ـ 14) الدالة المولدة للمتراكمات الثنائية المشتركة:

نرمــز للدالـــة المولدة للمتراكمات الثنائية المشتركة بالرمز $K(t_1,t_2)$ وتعرف بأنها:

$$(5.14.1):\ K(t_1,t_2)=\ln\phi(t_1,t_2)$$

فــإذا كانــت المــتراكمات مــن جمــيع الدرجات موجودة فيمكن تعريف مفكوك $K(t_1,t_2)$ بالعلاقة التالية:

$$(5.14.2):\ K(t_1,t_2)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{J}\frac{(i\,t_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(i\,t_2)^r}{r!}k_{J-r,r}$$

حيث $k_{J-r,r}$ هى المتراكمة المشتركة من الدرجة r مع تعريف k_{00} بالعلاقة التالية:

$$(5.14.3):\ k_{00}=0$$

حيــث أن مفكوك $K(t_1,t_2)$ لا يوجد به حد مطلق خالى من $(i\,t_1)\,(i\,t_2)$ وذلك كمــا يتضــح مــن العلاقة (5. 14. 5) التالية. ويمكن كذلك كتابة $K(t_1,t_2)$ فى الصورة المرادفة التالية:

$$(5.14.4):\ K(t_1,t_2)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(i\,t_1)^s}{s!}\frac{(i\,t_2)^r}{r!}k_{sr}$$

من (5. 12. 6) و(5. 14. 1, 2, 4) نجد أن:

$$(5.14.5):\ (a)\ K(t_1,t_2)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{J}\frac{(i\,t_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(i\,t_2)^r}{r!}k_{J-r,r}$$

أو:

$$(b)\qquad =\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(i\,t_1)^s}{s!}\frac{(i\,t_2)^r}{r!}k_{sr}\ ;\ k_{00}=0$$

$$=\ln\phi(t_1,t_2)$$

$$(c)\qquad =\ln\left[1+\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{J}\frac{(i\,t_1)^{J-r}}{(J-r)!}\frac{(i\,t_2)^r}{r!}\mu'_{J-r,r}\right]$$

أو:

$$= \ln\left[\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(i\,t_1)^s}{s!}\frac{(i\,t_2)^r}{s!}\mu'_{sr}\right] \qquad \text{(d)}$$

حيث $\mu'_{00} = 1$.

ومـــن العلاقة السابقة يمكن إيجاد العلاقة بين العزوم المشتركة بدلالة المتراكمات المشتركة والعكس بالعكس.

ملاحظـــة (5 ــ 14 ــ 1): لقد قدمنا شرط كافى لازم لاستقلال متغيرين عشوائيين فـــى نظرية (5 ــ 11 ــ 1) والآن نقدم شرط كافى لازم آخر لاستقلال متغيرين عشوائيين باستخدام المتراكمات المشتركة للمتغيرين فيما يلى:

إذا كـــان (X_1, X_2) متغير عشوائى ثنائى مشترك فإن المتغيران X_1 و X_2 يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت:

$$k_{rs} = 0$$

لجمـــيع قيم r,s التى تحقق العلاقة $rs \neq 0$. بشرط أن تكون المتراكمات من جمـــيع الدرجـــات موجـــودة ــ علمـــاً بـــأن k_{rs} هـــى المـــتراكمة المشتركة للمتغير (X_1, X_2) من الدرجة $r+s$.

ويمكن إثبات الشرط السابق كما يلى:

نعـــرف مـــن نظرية (5 ــ 11 ــ 1) أن المتغيران X_1 و X_2 يكونا مستقلان إذا وفقط إذا كانت: $\phi(t_1, t_2) = \phi_1(t_1)\phi_2(t_2)$ وبأخذ لوغاريتم طرفى العلاقة السابقة:

$$\ln\phi(t_1,t_2) = \ln\phi_1(t_1) + \ln\phi_2(t_2)$$

$$K(t_1,t_2) = K_1(t_1) + K_2(t_2)$$

حيث $K(t_1, t_2)$ هى الدالة المولدة للمتراكمات المشتركة للمتغير (X_1, X_2) و $K_1(t_1)$ هـــى الدالـــة المولـــدة للمـــتراكمات للمتغير X_1 و $K_2(t_2)$ الدالة المولدة للمـــتراكمات للمتغير X_2. ومن (5. 1. 41) و(5. 14. 5b) يمكن كتابة العلاقة السابقة فى الصيغة التالية:

$$\text{(5. 14. 6):}\ \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(i\,t_1)^r}{r!}\frac{(i\,t_2)^s}{s!}k_{rs}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\,t_1)^n}{n!}k_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(i\,t_2)^m}{m!}k_{0m} \quad ;\ (k_{00} = 0)$$

إذن المتغيران X_1 و X_2 يكونا مستقلان إذا وفقط إذا تحققت العلاقة (5. 14. 6) علماً بأن هذه العلاقة تتضمن أن:

$k_{rs}=0$ إذا كانت $rs\neq 0$. وذلك لما يأتى:

(1) بمقارنـــة معامل $\frac{(it_1)^r}{r!}$ فى طرفى العلاقة (5. 14. 6)، نلاحظ أن $\frac{(it_1)^r}{r!}$ توجد فى الطـــرف الأيســـر عـــندما $s=0$ وفى الأيمن عندما $n=r$ وفى هذه الحالة يكون معامل $\frac{(it_1)^r}{r!}$ فى الطرفين هو k_{r0} وتكون المتساوية صحيحة.

(2) وبمقارنـــة معامل $\frac{(it_2)^s}{s!}$ فى الطرفين نجده فى الطرف الأيسر عندما $r=0$ وفى الأيمن عندما $m=s$ وفى هذه الحالة يكون المعامل فى الطرفين هو k_{0s} وبالتالى فالمتساوية صحيحة أيضاً.

(3) بمقارنة معامل $\frac{(it_1)^r}{r!}\frac{(it_2)^s}{s!}$ فى الطرفين عندما $r\neq 0$ و $s\neq 0$ هذا المعامل فـــى الطـــرف الأيسر يساوى k_{rs} وفى الأيمن يساوى الصفر إذن العلاقة (5. 14. 6) تـــتحقق إذا كانت $k_{rs}=0$ لجميع قيم $rs\neq 0$. وبما أن صحة العلاقة (5. 14. 6) تعتبر شرط كافى لازم لاستقلال المتغيرين X_1 و X_2 إذن اشتراط أن $k_{rs}=0$ إذا كانت $rs\neq 0$ يعتبر شرط كافى لازم لاستقلال المتغيرين.

(5 ــ 15) العلاقـــة بيـــن العـــزوم والمتراكمات المشتركة للمتغير المشترك الثنائى:

(5 ــ 15 ــ 1): إذا كانـــت العـــزوم المشـــتركة مـــن الدرجة n للمتغير المشترك (X_1, X_2) موجـــودة فيمكـــن إيجاد العلاقة بينها باستخدام العلاقات (5. 14. 5) بين الدالة المولدة للمتراكمات المشتركة $K(t_1,t_2)$ والدالة المميزة $\phi(t_1,t_2)$ كما يلى:

من العلاقة (5. 12. 6) يمكن كتابة $\phi(t_1,t_2)$ فى الصورة التالية:

$$(5.15.1a):\ \phi(t_1,t_2)=1+\left(\theta_1\mu'_{10}+\theta_2\mu'_{01}\right)$$
$$+\left(\frac{\theta_1^2}{2!}\mu'_{20}+\theta_1\,\theta_2\,\mu'_{11}+\frac{\theta_2^2}{2!}\mu'_{02}\right)$$
$$+\left(\frac{\theta_1^3}{3!}\mu'_{30}+\frac{\theta_1^2\,\theta_2}{2!\,1!}\mu'_{21}+\frac{\theta_1\,\theta_2^2}{1!\,2!}\mu'_{12}+\frac{\theta_2^3}{3!}\mu'_{03}\right)$$
$$+\left(\frac{\theta_1^4}{4!}\mu'_{40}+\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{3!\,1!}\mu'_{31}+\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!\,2!}\mu'_{22}+\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{1!\,3!}\mu'_{13}+\frac{\theta_2^4}{4!}\mu'_{04}\right)+\cdots$$

حيث $\theta_1=i\,t_1\ ;\ \theta_2=i\,t_2$.
ويمكن كتابة العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$(5.15.1b):\ \phi(t_1,t_2)=1+Z(\theta_1,\theta_2)$$

حيث $Z(\theta_1,\theta_2)$ تمثل كل الحدود الموجودة في الطرف الأيمن من (5. 15. 1a) ماعدا الحد الأول. وبذلك تكون الدالة المولدة للمتراكمات المشتركة:

$$(5.15.2):\ K(t_1,t_2)=\ln\left[1+Z(\theta_1,\theta_2)\right]$$
$$=Z(\theta_1,\theta_2)-\tfrac{1}{2}Z^2(\theta_1,\theta_2)+\tfrac{1}{3}Z^3(\theta_1,\theta_2)$$
$$-\tfrac{1}{4}Z^4(\theta_1,\theta_2)-\cdots$$

وباستخدام قيمة $Z(\theta_1,\theta_2)$ كما هي في (5. 15. 1b) يمكن كتابة المعادلة السابقة في الصورة التالية بدلالة θ_1 و θ_2 والعزوم المشتركة μ'_{rs} حيث نجد أن:

$$(5.15.3):\ K(t_1,t_2)=\theta_1\,\mu'_{10}+\theta_2\,\mu'_{01}$$

حدود من الدرجة الأولى في $\theta_1\,\theta_2$ + حدود من الدرجة الثانية في $\theta_1\,\theta_2$ وهي:
(الصف الثاني من Z):

$$+\frac{\theta_1^2}{2!}\mu'_{20}+\theta_1\,\theta_2\,\mu'_{11}+\frac{\theta_2^2}{2!}\mu'_{02}$$

+ من $-\dfrac{Z^2}{2}$:

$$-\tfrac{1}{2}\theta_1^2\,\mu'^2_{10}-\tfrac{1}{2}\theta_2^2\,\mu'^2_{01}-\theta_1\,\theta_2\,\mu'_{10}\,\mu'_{01}$$

+ حدود من الدرجة الثالثة فى $\theta_1\,\theta_2$:

من Z:

$$+\frac{\theta_1^3}{3!}\mu'_{30}+\frac{\theta_1^2\,\theta_2}{2!\,1!}\mu'_{21}+\frac{\theta_1\,\theta_2^2}{1!\,2!}\mu'_{12}+\frac{\theta_2^3}{3!}\mu'_{03}$$

من $-\frac{Z^2}{2}$:

$$-\frac{\theta_1^3}{2!}\mu'_{10}\,\mu'_{20}-\theta_1^2\,\theta_2\,\mu'_{10}\,\mu'_{11}-\frac{\theta_1\,\theta_2^2}{2!}\mu'_{10}\,\mu'_{20}$$

$-\frac{1}{2}$ ضعف الحد الثانى من Z فى الحدود التالية له

$$-\frac{\theta_1^2\,\theta_2}{2}\mu'_{01}\,\mu'_{20}-\theta_1\,\theta_2^2\,\mu'_{01}\,\mu'_{11}-\frac{\theta_2^3}{2!}\mu'_{01}\,\mu'_{02}$$

من $\frac{Z^3}{3}$:

$$+\tfrac{1}{3}\theta_1^3\,\mu'^3_{10}+\tfrac{1}{3}\theta_2^3\,\mu'^3_{01}+\theta_1^2\,\theta_2\,\mu'^2_{10}\,\mu'_{01}+\theta_1\,\theta_2^2\,\mu'_{10}\,\mu'^2_{01}$$

+ حدود من الدرجة الرابعة فى $\theta_1\,\theta_2$

(الصف الرابع من Z)

$$+\frac{\theta_1^4}{4!}\mu'_{40}+\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{3!\,1!}\mu'_{31}+\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!\,2!}\mu'_{22}+\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{1!\,3!}\mu'_{13}+\frac{\theta_2^4}{4!}\mu'_{04}$$

(من $-\frac{Z^2}{2}$)

$$-\frac{\theta_1^4}{2\times 4}\mu'^2_{20}-\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2}\mu'^2_{11}-\frac{\theta_2^4}{2\times 4}\mu'^2_{02}$$

($-\frac{1}{2}$ ضعف أول عنصر من الصف الأول من Z فى كل عناصر الصف الثالث):

$$-\frac{\theta_1^4}{3!}\mu'_{10}\,\mu'_{30}-\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{2!}\mu'_{10}\,\mu'_{21}-\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2}\mu'_{10}\,\mu'_{12}-\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{3!}\mu'_{10}\,\mu'_{03}$$

($-\frac{1}{2}$ ضعف العنصر الثانى من الصف الأول من Z فى كل عناصر الصف الثالث):

$$-\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{3!}\mu'_{01}\,\mu'_{30}-\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2}\mu'_{01}\,\mu'_{21}-\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{2}\mu'_{01}\,\mu'_{12}-\frac{\theta_2^4}{3!}\mu'_{01}\,\mu'_{03}$$

($-\frac{1}{2}$ ضعف العنصر الأول من الصف الثانى من Z فى بقية حدود الصف الثانى):

$$-\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{2}\mu'_{20}\,\mu'_{11}-\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!\,2!}\mu'_{20}\,\mu'_{02}$$

($-\frac{1}{2}$ ضعف العنصر الثانى من الصف الثانى من Z فى العنصر الذى يليه):

$$-\frac{\theta_1\theta_2^3}{2}\mu'_{11}\,\mu'_{02}$$

+ (حدود من $\frac{Z^3}{3}$)

($\frac{1}{3}\times 3$ أمثال مربع عناصر الصف الأول من Z فى الصف الثانى)

$$+\frac{\theta_1^4}{2!}\mu'^2_{10}\,\mu'_{20}+\theta_1^3\,\theta_2\,\mu'^2_{10}\,\mu'_{11}+\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!}\mu'^2_{10}\,\mu'_{02}$$

$$+\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!}\mu'^2_{01}\,\mu'_{20}+\theta_1\,\theta_2^3\,\mu'^2_{01}\,\mu'_{11}+\frac{\theta_2^4}{2}\mu'^2_{01}\,\mu'_{02}$$

+ (من ضرب 3 حدود من Z فى بعضها) $\frac{1}{3}\times 6$ أمثال (حاصل ضرب 3 حدود)

($\frac{6}{3}\times$ الحــد الأول من الصف الأول من Z × الحد الثانى من الصف الأول × كل حد من حدود الصف الثانى من Z)

$$+\tfrac{6}{3}\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{2}\mu'_{10}\,\mu'_{01}\,\mu'_{20}+\tfrac{6}{3}\theta_1^2\,\theta_2^2\,\mu'_{10}\,\mu'_{01}\,\mu'_{11}+\tfrac{6}{3}\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{2}\mu'_{10}\,\mu'_{01}\,\mu'_{02}$$

(من $-\frac{Z^4}{4}$): القوى الرابعة للصف الأول من Z:

$$-\frac{\theta_1^4\,\mu'^4_{10}}{4}-\frac{\theta_2^4\,\mu^4_{01}}{4}$$

+ 4 أمثال مكعب العنصر الأول من Z فى العنصر التالى له:

$$-\theta_1^3\,\theta_2\,\mu_{10}'^3\,\mu_{01}'$$

+ 6 أمثال مربع العنصر الأول من Z فى مربع العنصر التالى له:

$$-\frac{6\theta_1^2\,\theta_2^2}{4}\mu_{10}'^2\,\mu_{01}'^2$$

+ 4 أمثال العنصر الأول من Z فى مكعب العنصر التالى له:

$$-\theta_1\,\theta_2^3\,\mu_{10}'\,\mu_{01}'^3$$

+ عناصر من الدرجة الخامسة فما فوق فى $\theta_1\,\theta_2$. (حيث $\theta_1 = i\,t_1$ و $\theta_2 = i\,t_2$).

ولكن الدالة المولدة للمتراكمات $K(t_1, t_2)$ يمكن كتابتها من العلاقة (5. 14. 2) فى الصورة التالية:

$$(5.\ 15.\ 4):\ K(t_1,t_2) = \theta_1 k_{10} + \theta_2 k_{01} + \frac{\theta_1^2}{2!}k_{20} + \theta_1\,\theta_2\,k_{11} + \frac{\theta_2^2}{2!}k_{0221}$$

$$+\frac{\theta_1^3}{3!}k_{30} + \frac{\theta_1^2\,\theta_2}{2!\,1!}k$$

$$+\frac{\theta_1\,\theta_2^2}{1!\,2!}k_{12} + \frac{\theta_2^3}{3!}k_{03} + \frac{\theta_1^4}{4!}k_{40} + \frac{\theta_1^3\,\theta_2}{3!\,1!}k_{31}$$

$$+\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!\,2!}k_{22} + \frac{\theta_1\,\theta_2^3}{1!\,3!}k_{13}$$

$$+\frac{\theta_2^4}{4!}k_{04} + \cdots$$

(حيث $\theta_1 = i\,t_1$ و $\theta_2 = i\,t_2$).

وبمقارنة معاملات $\theta_1^r\,\theta_2^s$ فى مفكوك $K(t_1,t_2)$ فى كل من (5. 15. 3) و (5. 15. 4) نحصل على المتراكمة $k_{rs}^{\cdot}$ بدلالة العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) من الدرجة $r+s$ لجميع قيم r و s وذلك كما يلى:

(5 ـ 15 ـ 2) المـــتراكمات المشــتركة بدلالة العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) للمتغير الثنائى المشترك:

أولاً: متراكمات الدرجة الأولى (عددها 2):

بموازنة معاملات θ_1 و θ_2 نجد أن:

$$(5.\,15.\,5):\ k_{10} = \mu'_{10}\ \ ;\ \ k_{01} = \mu'_{01}$$

ثانياً: متراكمات الدرجة الثانية (عددها 3):

بموازنة معاملات $\frac{\theta_1^2}{2!}$ و $\theta_1\,\theta_2$ و $\frac{\theta_2^2}{2!}$ نجد أن:

$$(5.\,15.\,6):\ k_{20} = \mu'_{20} - \mu'^2_{10}\ \ ;\ \ k_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10}\,\mu'_{01}\ \ ;\ \ k_{02} = \mu'_{02} - \mu'^2_{01}\,.$$

ثالثاً: متراكمات الدرجة الثالثة (عددها 4):

بموازنة معاملات $\frac{\theta_1^3}{3!}$ و $\frac{\theta_1^2\,\theta_2}{2!\,1!}$ و $\frac{\theta_1\,\theta_2^2}{1!\,2!}$ و $\frac{\theta_2^3}{3!}$ نجد أن:

$$(5.\,15.\,7):\ k_{30} = \mu'_{30} - 3\mu'_{10}\,\mu'_{20} + 2\mu'^3_{10}$$

$$k_{21} = \mu'_{21} - 2\mu'_{10}\,\mu'_{11} - \mu'_{01}\,\mu'_{20} + 2\mu'^2_{10}\,\mu'_{01}$$

$$k_{12} = \mu'_{12} - 2\mu'_{01}\,\mu'_{11} - \mu'_{10}\,\mu'_{02} + 2\mu'^2_{01}\,\mu'_{10}$$

$$k_{03} = \mu'_{03} - 3\mu'_{01}\,\mu'_{02} + 2\mu'^3_{01}$$

رابعاً: متراكمات الدرجة الرابعة (عددها 5):

بموازنة معاملات $\frac{\theta_1^4}{4!}$ و $\frac{\theta_1^3\,\theta_2}{3!\,1!}$ و $\frac{\theta_1^2\,\theta_2^2}{2!\,2!}$ و $\frac{\theta_1\,\theta_2^3}{1!\,3!}$ و $\frac{\theta_2^4}{4!}$ نجد أن

$$(5.\,15.\,8):\ k_{40} = \mu'_{40} - 3\mu'^2_{20} - 4\mu'_{10}\,\mu'_{30} + 12\mu'^2_{10}\,\mu'_{20} - 6\mu'^4_{10}\,.$$

$$k_{31} = \mu'_{31} - 3\mu'_{10}\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{30} - 3\mu'_{20}\mu'_{11} + 6\mu'^{2}_{10}\mu'_{11}$$
$$- 6\mu'^{3}_{10}\mu'_{01} + 6\mu'_{01}\mu'_{10}\mu'_{20}\,.$$
$$k_{22} = \mu'_{22} - 2\mu'^{2}_{11} - 2\mu'_{10}\mu'_{12} - 2\mu'_{01}\mu'_{21} - \mu'_{20}\mu'_{02} + 2\mu'^{2}_{10}\mu'_{02}$$
$$+ 2\mu'^{2}_{01}\mu'_{20} - 6\mu'^{2}_{10}\mu'^{2}_{01} + 8\mu'_{10}\mu'_{01}\mu'_{11}\,.$$
$$k_{13} = \mu'_{13} - 3\mu'_{01}\mu'_{12} - \mu'_{10}\mu'_{03} - 3\mu'_{02}\mu'_{11} + 6\mu'^{2}_{01}\mu'_{11}$$
$$- 6\mu'^{3}_{01}\mu'_{10} + 6\mu'_{10}\mu'_{01}\mu'_{02}\,.$$
$$k_{04} = \mu'_{04} - 3\mu'^{2}_{02} - 4\mu'_{01}\mu'_{03} + 12\mu'^{2}_{01}\mu'_{02} - 6\mu'^{4}_{01}\,.$$

ملاحظـــة (5 ـ 15 ـ 1): يجـب أن نـتذكر أن k_{10} و k_{20} و k_{30} و k_{40} هـي المتراكمات الأولى والثانية والثالثة والرابعة للمتغير المفرد X_1 وبالمثل k_{01} و k_{02} و k_{03} و k_{04} هـي المـتراكمات الأولـى والثانية والثالثة والرابعة للمتغير المفرد X_2 . ويتضـح ذلـك من مقارنة النتائج السابقة بالعلاقات (5. 1. 44). لذلك فإن k_{11} و k_{21} و k_{12} و k_{31} و k_{22} و k_{13} هي المتراكمات التي لم يسبق لنا إيجادها بدلالة العزوم والتي قدمناها هنا لأول مرة.

(5 ـ 15 ـ 3) العـزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) بدلالة المتراكمات المشتركة للمتغير الثنائي المشترك:

يمكـن الآن الحصول على العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) بدلالة المـتراكمات المشتركة بعملية رجوع عكسية للعلاقات الموجودة في البند (5 ـ 15 ـ 1) كما يلي:

أولاً: عزوم الدرجة الأولى (عددها 2):

(5. 13. 9): $\mu'_{10} = k_{10} \;\; ; \;\; \mu'_{01} = k_{01}$

ثانياً: عزوم الدرجة الثانية (عددها 3):

(5. 15. 10): $\mu'_{20} = k_{20} + k^{2}_{10}$

$$\mu'_{02} = k_{02} + k^{2}_{01}$$
$$\mu'_{11} = k_{11} + k_{10}k_{01}$$

ثالثاً: عزوم الدرجة الثالثة (عددها 4):

$$(5.15.11): \mu'_{30} = k_{30} + 3k_{10}k_{20} + k_{10}^3$$

$$\mu'_{03} = k_{03} + 3k_{01}k_{02} + k_{01}^3$$

$$\mu'_{21} = k_{21} + 2k_{10}k_{11} + k_{01}k_{20} + k_{01}k_{10}^2$$

$$\mu'_{12} = k_{12} + 2k_{01}k_{11} + k_{10}k_{02} + k_{10}k_{01}^2$$

رابعاً: عزوم الدرجة الرابعة (عددها 5):

$$(5.15.12): \mu'_{40} = k_{40} + 3k_{20}^2 + 6k_{10}^2k_{20} + 4k_{10}k_{30} - 2k_{10}^4$$

$$\mu'_{04} = k_{04} + 3k_{02}^2 + 6k_{01}^2k_{02} + 4k_{01}k_{03} - 2k_{01}^4$$

$$\mu'_{31} = k_{31} + k_{01}k_{10}^3 + 3k_{10}^2k_{11} + 3k_{01}k_{10}k_{20} + k_{01}k_{30} + 3k_{11}k_{20} + 3k_{10}k_{21}$$

$$\mu'_{13} = k_{13} + k_{10}k_{01}^3 + 3k_{01}^2k_{11} + 3k_{10}k_{01}k_{02} + k_{10}k_{03} + 3k_{11}k_{02} + 3k_{01}k_{12}$$

$$\mu'_{22} = k_{22} + 2k_{11}^2 + k_{01}^2k_{10}^2 + k_{10}^2k_{02} + k_{01}^2k_{20} + 2k_{10}k_{12} + 2k_{01}k_{21} + k_{02}k_{20} + 4k_{01}k_{10}k_{11}.$$

(5 ــ 15 ــ 4) المــتراكمات المشتركة بدلالة العزوم المركزية المشتركة للمتغير الثنائي المشترك:

يمكن الحصول على المتراكمات المشتركة بدلالة العزوم المركزية المشتركة وذلك بوضع $\mu'_{10} = \mu'_{01} = 0$ وإهمال الشرطة الموجودة فوق الرمز μ في كل علاقات البنــد (5 ــ 15 ــ 2) فنحصــل علــى العلاقات التالية للمتراكمات المشتركة k_{rs} بدلالة العزوم المركــزية المشــتركة μ_{rs} لقيم $r + s \leq 4$. وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على نفس النتائج لقيم $r + s = 5$ و $r + s = 6$ وذلك كما يلي:

أولاً: متراكمات الدرجة الأولى:

$$(5.15.13): k_{10} = k_{01} = 0$$

ثانياً: متراكمات الدرجة الثانية:

(5. 15. 14): $k_{20} = \mu_{20}$, $k_{02} = \mu_{02}$, $k_{11} = \mu_{11}$

ثالثاً: متراكمات الدرجة الثالثة:

(5. 15. 15): $k_{30} = \mu_{30}$, $k_{03} = \mu_{03}$

$k_{21} = \mu_{21}$, $k_{12} = \mu_{12}$

رابعاً: متراكمات الدرجة الرابعة:

(5. 15. 16): $k_{40} = \mu_{40} - 3\mu_{20}^2$

$$k_{04} = \mu_{04} - 3\mu_{02}^2$$

$$k_{31} = \mu_{31} - 3\mu_{20}\,\mu_{11}$$

$$k_{13} = \mu_{13} - 3\mu_{02}\,\mu_{11}$$

$$k_{22} = \mu_{22} - 2\mu_{11}^2 - \mu_{20}\,\mu_{02}$$

خامساً: متراكمات الدرجة الخامسة:

(5. 15. 17): $k_{50} = \mu_{50} - 10\mu_{20}\,\mu_{30}$

$$k_{05} = \mu_{05} - 10\mu_{02}\,\mu_{03}$$

$$k_{41} = \mu_{41} - 6\mu_{20}\,\mu_{21} - 4\mu_{11}\,\mu_{30}$$

$$k_{14} = \mu_{14} - 6\mu_{02}\,\mu_{12} - 4\mu_{11}\,\mu_{03}$$

$$k_{32} = \mu_{32} - 3\mu_{20}\,\mu_{12} - 6\mu_{11}\,\mu_{21} - \mu_{02}\,\mu_{30}$$

$$k_{23} = \mu_{23} - 3\mu_{02}\,\mu_{21} - 6\mu_{11}\,\mu_{12} - \mu_{20}\,\mu_{03}$$

سادساً: متراكمات الدرجة السادسة:

(5. 15. 18): $k_{60} = \mu_{60} - 10\mu_{30}^2 - 15\mu_{20}\,\mu_{40} + 30\mu_{20}^3$

$$k_{06} = \mu_{06} - 10\mu_{03}^2 - 15\mu_{02}\,\mu_{04} + 30\mu_{02}^3$$

$$k_{51} = \mu_{51} - 10\mu_{20}\,\mu_{31} - 5\mu_{11}\,\mu_{40} - 10\mu_{30}\,\mu_{21} + 30\mu_{20}^2\,\mu_{11}$$

$$k_{15} = \mu_{15} - 10\mu_{02}\mu_{13} - 5\mu_{11}\mu_{04} - 10\mu_{03}\mu_{12} + 30\mu_{02}^2\mu_{11}.$$

$$k_{42} = \mu_{42} - 6\mu_{21}^2 - 6\mu_{20}\mu_{22} - 8\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40} - 4\mu_{30}\mu_{12} + 6\mu_{20}^2\mu_{02} + 24\mu_{20}\mu_{11}^2.$$

$$k_{24} = \mu_{24} - 6\mu_{12}^2 - 6\mu_{02}\mu_{22} - 8\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{20}\mu_{04} - 4\mu_{03}\mu_{21} + 6\mu_{02}^2\mu_{20} + 24\mu_{02}\mu_{11}^2$$

$$k_{33} = \mu_{33} - 3\mu_{20}\mu_{13} - 9\mu_{11}\mu_{22} - 3\mu_{02}\mu_{31} - \mu_{30}\mu_{03} - 9\mu_{21}\mu_{12} + 12\mu_{11}^3 + 18\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}.$$

(5 ــ 15 ــ 5) العــزوم المركزية المشتركة بدلالة المتراكمات المشتركة للمتغير الثنائى المشترك:

ويمكــن الحصــول على العزوم المركزية المشتركة بدلالة المتراكمات المشتركة بعملية رجوع عكسية للعلاقات الموجودة فى البند (5 ــ 15 ــ 4) كما يلى:

أولاً: العزوم المركزية من الدرجة الأولى:

(5. 15. 19): $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$

ثانياً: العزوم المركزية من الدرجة الثانية:

(5. 15. 20): $\mu_{20} = k_{20}\ ,\ \mu_{02} = k_{02}\ ,\ \mu_{11} = k_{11}$

ثالثاً: العزوم المركزية من الدرجة الثالثة:

(5. 15. 21): $\mu_{30} = k_{30}\ ,\ \mu_{03} = k_{03}\ ,\ \mu_{21} = k_{21}\ ,\ \mu_{12} = k_{12}$

رابعاً: العزوم المركزية من الدرجة الرابعة:

(5. 15. 22): $\mu_{40} = k_{40} + 3k_{20}^2$

$$\mu_{04} = k_{04} + 3k_{02}^2$$

$$\mu_{31} = k_{31} + 3k_{20}k_{11}$$

$$\mu_{13} = k_{13} + 3k_{02}k_{11}$$

$$\mu_{22} = k_{22} + k_{02}k_{20} + 2k_{11}^2$$

خامساً: العزوم المركزية من الدرجة الخامسة:

$$(5.15.23):\ \mu_{50} = k_{50} + 10k_{20}k_{30}$$

$$\mu_{05} = k_{05} + 10k_{02}k_{03}$$

$$\mu_{41} = k_{41} + 6k_{20}k_{21} + 4k_{11}k_{30}$$

$$\mu_{14} = k_{14} + 6k_{02}k_{12} + 4k_{11}k_{03}$$

$$\mu_{32} = k_{32} + 3k_{20}k_{12} + 6k_{11}k_{21} + k_{02}k_{30}$$

$$\mu_{23} = k_{23} + 3k_{02}k_{21} + 6k_{11}k_{12} + k_{20}k_{03}$$

سادساً: العزوم المركزية من الدرجة السادسة:

$$(5.15.24):\ \mu_{60} = k_{60} + 10k_{30}^2 + 15k_{20}k_{40} + 15k_{20}^2$$

$$\mu_{06} = k_{06} + 10k_{03}^2 + 15k_{02}k_{04} + 15k_{02}^2$$

$$\mu_{51} = k_{51} + 10k_{20}k_{31} + 5k_{11}k_{40} + 10k_{30}k_{21} + 15k_{11}k_{20}^2$$

$$\mu_{15} = k_{15} + 10k_{02}k_{31} + 5k_{11}k_{04} + 10k_{03}k_{12} + 15k_{11}k_{02}^2$$

$$\mu_{42} = k_{42} + 6k_{21}^2 + 3k_{02}k_{20}^2 + 12k_{11}^2k_{20} + 6k_{20}k_{22} + 8k_{11}k_{31} + k_{02}k_{40} + 4k_{30}k_{12}$$

$$\mu_{24} = k_{24} + 6k_{12}^2 + 3k_{20}k_{02}^2 + 12k_{11}^2k_{02} + 6k_{02}k_{22} + 8k_{11}k_{13} + k_{20}k_{04} + 4k_{03}k_{21}$$

$$\mu_{33} = k_{33} + 3k_{20}k_{13} + 9k_{02}k_{20}k_{11} + 6k_{11}^3 + 9k_{11}k_{22} + 3k_{02}k_{31} + k_{30}k_{03} + 9k_{21}k_{12}.$$

ملاحظـــة (5 ــ 15 ــ 2): يمكن الحصول على العزوم المركزية المشتركة بدلالة العــزوم المشـــتركة حـــول الصـــفر (أو حـــول نقطة) وذلك بالتعويض عن المتراكمات المشتركة فى العلاقات (5. 15. 20) حتى (5. 15. 24) بدلالة العزوم حول الصفر (أو حول نقطة) من العلاقات (5. 15. 6, 7, 8). فمثلاً من (5. 15. 20) نجد أن:

$$\mu_{20} = k_{20}\ ,\ \mu_{02} = k_{02}\ ,\ \mu_{11} = k_{11}$$

ومن (5. 15. 6) نجد أن:

$$k_{20} = \mu'_{20} - \mu'^{2}_{10} \;,\; k_{02} = \mu'_{02} - \mu'^{2}_{01} \;,\; k_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{01}$$

إذن:

$$(5.\,15.\,25):\; \mu_{20} = \mu'_{20} - \mu'^{2}_{10}$$

$$\mu_{02} = \mu'_{02} - \mu'^{2}_{01}$$

$$\mu_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{01}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\mu_{12} = k_{12} = \mu'_{12} - 2\mu'_{01}\mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{02} + 2\mu'^{2}_{01}\mu'_{10}$$

$$\mu_{21} = k_{21} = \mu'_{21} - 2\mu'_{10}\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{20} + 2\mu'^{2}_{10}\mu'_{01}$$

وهكذا.

(5 ـ 16) الدالة المميزة لمتغير عشوائى مشترك عدد مركباته n:

إذا كـان $\underline{X}' = (X_1, ..., X_n)$ متغـير عشوائى مشترك دالة توزيعه الاحتمالى $F(x_1, ..., x_n)$ و $\underline{t}' = (t_1, ..., t_n)$ حيث t_J أعداد حقيقية لجميع قيم $J = 1, ..., n$، فإن الدالة المميزة $(t_1, ..., t_n)$ للمتغير $\underline{X}'$ تعرف بالعلاقة التالية:

$$(5.\,16.\,1):\; \phi(t_1, ..., t_n) = \int_{R_n} e^{i\underline{t}'\underline{X}}\, dF(x_1, ..., x_n).$$

حيث $\underline{t}'\underline{X} = \sum_{J=1}^{n} t_J x_J$ و $t_1, ..., t_n$ أعداد حقيقية.

والدالة المولدة للعزوم المشتركة $M(t_1, ..., t_n)$ تعرف بأنها:

$$(5.\,16.\,2):\; M(t_1, ..., t_n) = \phi\left(\frac{t_1}{i}, ..., \frac{t_n}{i}\right).$$

ويمكـــن تعميم خصـائص الدالة المميزة فى حالة متغيرين المقدمة فى (5 ــ 7) إلى حالة n من المتغيرات حيث نجد أن:

$$(5.\,16.\,3):\ \phi(0,...,0)=1$$

$$(5.\,16.\,4):\ \left|\phi(t_1,...,t_n)\right|\le 1$$

$$(5.\,16.\,5):\ \phi(-t_1,...,-t_n)=\overline{\phi(t_1,...,t_n)}$$

حيث الطرف الأيمن فى المعادلة السابقة هو مرافق الدالة $\phi(t_1,...,t_n)$. وإذا كان العزم المشترك $\mu'_{J_1,...,J_n}$ موجود يمكن الحصول عليه بمفاضلة $\phi(t_1,...,t_n)$ كما يلى:

$$(5.\,16.\,6):\ \mu'_{J_1,...,J_n}=\frac{\partial^{(J_1+\cdots+J_n)}}{\partial t_1^{J_1}\ ....\ \partial t_n^{J_n}}\phi(t_1,...,t_n)_{(0,\ \overset{\downarrow}{...},\ 0)}$$

$$=\phi^{(J_1+\cdots+J_n)}(0,...,0)/(i)^{J_1+\cdots+J_n}\ .$$

وطــبعاً إذا كان $\mu'_{J_1,...,J_n}$ موجود تكون جميع العزوم $\mu'_{r_1,...,r_n}$ موجودة لجميع قيم $r_1+\cdots+r_n\le J_1+\cdots+J_n$.

كمـــا يمكـــن الحصــول علـــى الدالة المميزة لأى مجموعة جزئية من المتغيرات المشـــتركة يقـــل عددهـــا عن n من الدالة $\phi(t_1,...,t_n)$ بوضع أصفار بدلاً من قيم t المناظرة للمتغيرات التى لا توجد فى تلك المجموعة الجزئية. فمثلاً الدالة المميزة للمتغير المشترك (X_1,X_3) تكون:

$$\phi(t_1,0,t_3,0..0)=\phi(t_1,t_3).$$

ويمكـــن إيجاد مفكوك ماكلورين للدالة المميزة المشتركة $\phi(t_1,...,t_n)$ فى جوار للـــنقطة $\underline{t}'=(0,...,0)$ كتعميم لنظرية (5 ــ 12 ــ 1) أو للعلاقة (5. 14. 5d)، فإذا كانت العزوم من جميع الدرجات موجودة يمكن كتابة مفكوك $\phi(t_1,...,t_n)$ فى الصورة التالية:

$$(5.\,16.\,7):\ \phi(t_1,...,t_n)=\sum_{r_1,...,r_n=0}^{\infty}\left[\prod_{J=1}^{n}\frac{(i\,t_J)^{r_J}}{r_J\,!}\right]\mu'_{r_1,...,r_n}\ .$$

وإذا كانت العزوم من الدرجة الثانية موجودة ورمزنا لها بالرموز التالية:

$$(5.\,16.\,8):\ \alpha'_J=E(X_J)\ ,\ \alpha'_{JJ}=E(X_J^2)\ ,\ \alpha'_{Js}=E(X_J\,X_s)$$

فيمكــن من (5. 13. 2a, b) إيجاد مفكوك $\phi(t_1,...,t_n)$ حتى عزوم الدرجة الثانية فى الصورة التالية:

$$(5.\ 16.\ 9):\ \phi(t_1,...,t_n)=1+\sum_{J=1}^{n}(i\,t_J)\alpha'_J + \sum_{J,s=1}^{n}(i\,t_J)(i\,t_s)\alpha'_{Js}+0\left[\prod_{J=1}^{n}t_J(2)\right]$$

حيث

$$\lim_{\substack{(t_1,...,t_n)\to(t,...,t)\\ t\to 0}}\frac{0\left[\prod_{J=1}^{n}t_J(2)\right]}{t^n}=0$$

وإذا كانــت عــزوم الدرجــة الأولى كلها أصفار $(\alpha_J=0)$ فنحصل على الدالة المميزة المشتركة المركزية فى الصورة التالية:

$$(5.\ 16.\ 10):\ \phi_c(t_1,...,t_n)=1+\sum_{J,s=1}^{n}(i\,t_J)(i\,t_s)\alpha_{Js}+0\left[\prod_{J=1}^{n}t_J(2)\right]$$

حيــث α_{Js} هو العَزم المركزى للمتغير المشترك (X_J,X_s) و $0\left[\prod_{J=1}^{n}t_J(2)\right]$ كمـــا فى (5. 16. 9). كما أن مفكوك الدالة المولدة للمتراكمات $K(t_1,...,t_n)$ يمكن كتابته فى الصورة التالية:

$$(5.\ 16.\ 11):\ K(t_1,...,t_n)=\sum_{J_1,...,J_n=0}\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{(i\,t_r)^{J_r}}{J_r\,!}\right)k_{J_1\cdots J_n}=\ln\phi(t_1,...,t_n).$$

ومن العلاقة السابقة مع المفكوك (5. 16. 7) يمكن الحصول على العزوم المشتركة بدلالة المتراكمات المشتركة وبالعكس فى حالة المتغير المتعدد $(X_1,...,X_n)$.

ويمكن كذلك تعميم نظريتى التعاكس (5 ـ 10 ـ 1) إلى حالة n من المتغيرات كما يلى:

نظرية (5 ـ 16 ـ 1):

إذا كـــان $(X_1, ..., X_n)$ متغير عشوائى مشترك دالته المميزة $\phi(t_1, ..., t_n)$ ودالـــة توزيعـــه الاحتمالى $F(x_1, ..., x_n)$ و I_n فترة فى الفراغ ذو الـــ n بعداً R_n معرفة بالمتباينات:

$$a_r - h_r < X_r \le a_r + h_r \;\; ; \;\; h_r > 0 \;\; ; \;\; r = 1, 2, ..., n.$$

وكانـــت الدالـــة $F(x_1, ..., x_n)$ مســـتمرة على السطح الزائد للفترة المغلقة المحددة بالمتباينات:

$$a_r - h_r \le X_r \le a_r + h_r \;\; ; \;\; h_r > 0 \;\; ; \;\; r = 1, 2, ..., n$$

فإن:

$$(5.\,16.\,12): \; Pr\left[(X_1, ..., X_n) \in I_n\right] =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi^n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{J=1}^{n} \left[\frac{Sin\, h_J t_J}{t_J} e^{-i t_J a_J} \right] \phi(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n .$$

وعندما تكون:

$$\int_{R_n}\!\!\int \left| \phi(t_1, ..., t_n) \right| dt_1 ... dt_n < \infty$$

نجـــد أن دالة كثافة الاحتمال $f(x_1, ..., x_n)$ تكون موجودة ومستمرة لجميع قيم $(x_1, ..., x_n)$ ومعطاة بالعلاقة:

$$(5.\,16.\,13): \; f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-i \sum_{J=1}^{n} t_J x_J} \phi(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n$$

كذلـــك يمكـــن تعمـــيم نظـــرية التواصل نظرية (5 ــ 4 ــ 1) إلى حالة n من المتغيرات وسنكتفى هنا بذكر منطوق النظرية:

نظرية (5 ـ 16 ـ 2):

إذا كان لدينا متتابعة من التوزيعات الاحتمالية:

$$\{F_n(x_1,...,x_m)\}=F_1(x_1,...,x_m),F_2(x_1,...,x_m),....$$

فى الفراغ R_m، ولها الدوال المميزة:

$$\{\phi_n(t_1,...,t_m)\}=\phi_1(t_1,...,t_m),\phi_2(t_1,...,t_m),....$$

فإن المتتابعة $\{F_n(x_1,...,x_m)\}$ تتقارب إلى دالة التوزيع الاحتمالى $F(x_1,...,x_m)$، إذا وفقط إذا، كانت المتتابعة $\{\phi_n(t_1,...,t_m)\}$ تتقارب إلى نهاية $\phi(t_1,...,t_m)$ لجميع الأعداد الحقيقية $t_1,...,t_m$، حيث تكون هذه النهاية مستمرة عند النقطة $(t_1,...,t_m)=(0,...,0)$ وعندما يتحقق هذا الشرط تكون النهاية $\phi(t_1,...,t_m)$ هى الدالة المميزة المشتركة المقابلة للنهاية $F(x_1,...,x_m)$.

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكن تعميم نظريات (5 ـ 5 ـ 1) و(5 ـ 6 ـ 1، 2)، الخاصة بتحديد دوال التوزيع الاحتمالى تحديداً وحيداً بعزوم التوزيع، إلى حالة n من المتغيرات العشوائية المشتركة وكل المطلوب هو كتابة $\phi(t_1,...,t_n)$ و $F(x_1,...,x_n)$ والعزوم المشتركة بدلاً من $\phi(t)$ و $F(x)$ والعزوم المفردة.

(5 ـ 17) تصحيحات شبرد Sheppard's Corrections:

(5 ـ 17 ـ 1) تصحيحات شبرد للعزوم العادية:

من المعروف عملياً أن بيانات العينات يتم تفريغها فى جداول تكرارية. وكذلك المجتمعات المشاهدة التى تتكون من مشاهدات لكل مشاهدة قيمة عددية محددة. أحياناً يكون معروف لدينا قيم هذه المشاهدات بينما لا نعرف التوزيع الاحتمالى للمجتمع أى لا نعرف توزيعه النظرى، وفى هذه الحالة تفرغ بيانات المجتمع فى جدول تكرارى تماماً مثل بيانات العينات. هذه الجداول تسمى بالتوزيعات التكرارية. والتوزيع التكرارى لمجتمع ما يقابل توزيعه الاحتمالى كما أن التوزيع التكرارى لعينة عشوائية من مجتمع ما ـ عندما تكون العينة كبيرة كبراً كافياً ـ يعتبر تقدير جيد لتوزيعه الاحتمالى (انظر بند (2 ـ 22)).

نفرض أن لدينا بيانات مجتمع مشاهد (أى مجتمع من المشاهدات) عدد مفرداته n أو بيانات عينة كبيرة مسحوبة من هذا المجتمع حجمها n وأن التوزيع النظرى لهذا المجتمع توزيع مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ حيث X متغير مستمر محدود المدى

$(a \le x \le b)$ حيـث a وb عـددان حقيقـيان محدودان. فإذا تم تصنيف مشاهدات هذا المجـتمع (أو هذه العينة الكبيرة) فى جدول تكرارى مكون من فئات Intervals عددها k وطول كل منها h $(0 < h)$ وكانت مراكز الفئات هى $x_1, \dots, x_k$ حيث:

$$(5.\,17.\,1):\ x_J = a + \left(J - \tfrac{1}{2}\right)h \ \ ;\ \ J = 1, 2, \dots, k\,.$$

فـإن هذا الجدول يكون هو التوزيع التكرارى للمجتمع المقابل لتوزيعه الاحتمالى الذى له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$.

عـند حساب العزوم (أو أى إحصاء آخر) من الجدول التكرارى نفترض عادة أن قيم المتغير X التى تنتمى إلى الفئة J تقع كلها فى مركز الفئة J أى أنها كلها متساوية وكل مـنها تسـاوى x_J. ومعنى هذا الفرض أننا نفترض أن المجتمع له توزيع متقطع حيث يمكن للمتغير X أن يأخذ أى قيمة x_J مثلاً باحتمال:

$$(5.\,17.\,2):\ P_J = \int_{x_J - \frac{1}{2}h}^{x_J + \frac{1}{2}h} f(y)\,dy\,.$$

وعـادة ــ من الناحية العملية والتطبيقية ــ نلجأ إلى حساب عزوم المجتمع ــ أى معلمـة من معلماته ــ من بيانات جدول تكرارى ــ سواء كان هذا الجدول يمثل المجتمع كلـه أو عينة منه. والعزوم التى نحسبها من الجدول التكرارى ليست هى بالضبط العزوم الحقيقية للمجتمع لأننا لا نحسبها من دالة كثافة احتمال المجتمع مباشرة وإنما نحسبها من بـيانات المجتمع (أو عينة منه) بعد تفريغها فى جدول تكرارى مع افتراضنا ــ على غير الحقيقة ــ أن قيم المتغير التى تنتمى إلى فئة معينة تساوى كلها مركز هذه الفئة. فهى إذن عـزوم للـتوزيع الـتكرارى وليسـت العزوم الحقيقية للتوزيع الاحتمالى للمجتمع. وهذا الاخـتلاف بيـن مجموعـة العزوم المحسوبة من جدول تكرارى وتلك العزوم الحقيقية للمجـتمع يتطلـب أن نرمز لكل منها برموز مختلفة. لذلك سنرمز للعزم الرائى الحقيقى حـول الصفر للمجتمع بالرمز μ'_r وللعزم الرائى حول الصفر للتوزيع التكرارى ــ أى المحسوب من توزيع تكرارى ــ بالرمز $\overline{\mu}'_r$. ومن (5. 17. 2) نجد أن العزم الرائى حول الصفر المحسوب من جدول تكرارى هو:

$$(5.\,17.\,3):\ \overline{\mu}'_r = \sum_{1}^{k} P_J\, x_J^r\,.$$

والعـزوم $\overline{\mu}'_r$ (لجميع قيم r الصحيحة غير السالبة) ليس هو ما نريد معرفته لأننا فى الواقع نريد معرفة العزوم الحقيقية μ'_r (لجميع قيم r الصحيحة غير السالبة). وبما أننا

افترضـــنا أن المجتمع له توزيع مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ حيث $a \le x \le b$ إذن العزم الرائى الحقيقى للمجتمع هو:

$$(5.17.4):\ \mu'_r = \int_a^b x^r f(x)dx$$

مـــن (5. 17. 3) و(5. 17. 4) يتضح الاختلاف الموجود بين العزوم الحقيقية (μ') والعزوم المحسوبة من الجداول التكرارية $(\overline{\mu}')$ والذى نتج عن افتراض تساوى كل القيم الـــتى تنـــتمى إلـــى فئة معينة مع مركز هذه الفئة. وتصحيحات "شبرد" تصحح تأثير هذا الفرض ولكن تحت شروط معينة هى:

(1) أن يكون المتغير X مستمراً.

(2) أن يكـــون مـــدى المتغير X محدود. أى يوجد عددين حقيقيين محدودين a وb حيث $a \le x \le b$.

(3) أن يكون ذيلى توزيع المتغير X ملاصقين للمحور الأفقى للمتغير.

وكلما زاد هذا التلاصق كلما كان تصحيح شبرد أكثر فعالية فى الاقتراب بالعزوم $\overline{\mu}'$ إلى العزوم الحقيقية μ' للمجتمع.

وهـــذا يعنى أن تصحيحات "شبرد" تكون فعالة فى المجتمع الذى تكون فيه الغالبية العظمى لقيم المتغير X ــ أى الجزء الرئيسى من التوزيع ــ واقعة بين حدين محدودين. ومـــن الناحية النظرية يمكن تطبيق تصحيحات "شبرد" فى حالة التوزيعات التى يأخذ فيها المتغير قيم لانهائية عندما تكون التكرارات متضائلة عند بداية ونهاية التوزيع بحيث يمكن إهمال قيم المتغير الموجودة فى بداية ونهاية التوزيع لضآلتها وتطبيق تصحيح "شبرد" على الجزء المتبقى من التوزيع وخاصة إذا كان الجزء الرئيسى من التوزيع متركزاً فى الوسط وتكـــرارات الأطراف ضئيلة ومتلاشية. وفى الواقع نجد ــ فى الغالب الأعم من الحالات التطبيقـــية ــ أن الجزء الرئيسى من التوزيع الذى تتركز فيه غالبية القيم محدود، أى يقع بين حدين a وb حيث a وb عددين حقيقيين محدودين وهذا ما يتطلبه الشرط (2) السابق. لذلـــك فإن افتراض أن المتغير X ــ الذى يمثل المجتمع الحقيقى ــ يحقق الشـــروط (1) و(2) و(3) السابقة لن يؤثر كثيراً على عمومية تطبيق النتائج التى نتوصل إليها.

نحـــاول الآن معـــرفة العلاقة بين عزوم أى توزيع تكرارى $(\overline{\mu}'_r)$ وما يقابلها من عـــزوم حقيقـــية للمجتمع (μ'_r) (لجميع قيم r حيث r عدد صحيح غير سالب). سنجد أنه بالنســـبة للتوزيعات التى تتوافر فيها الشروط (1) و(2) و(3) السابقة يمكن الحصول على قـــيم تقريبية للعزوم الحقيقية μ'_r بتطبيق تصحيحات معينة على عزوم التوزيع التكرارى $\overline{\mu}'_r$ التى تقابلها.

من (5. 17. 2) و(5. 17. 3) يمكن كتابة العزم $\overline{\mu}'_r$ فى الصيغة التالية:

$$(5.17.5):\ \overline{\mu}'_r=\sum_{J=1}^{k}x_J^r\int_{x_J-\frac{1}{2}h}^{x_J+\frac{1}{2}h}f(y)dy$$

بوضع $y=z+x_J$

$$(5.17.6):\ \overline{\mu}'_r=\sum_{J=1}^{k}x_J^r\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h}f(z+x_J)dz\,.$$

الجانب الأيمن من العلاقة السابقة يتكون من مجموع (Σ) وتكامل $(\int)$ ويمكن – باستخدام صيغة "إيلر – ماكلورين للمجموع" (Euler Maclaurin Sum Formula) تحويل المجموع إلى تكامل. وهذه الصيغة يمكن للقارئ الرجوع إليها فى كتب "حساب الفروق المحدودة" (Calculus of Finite Differences) أو إلى كتاب "كرامير" Harold Cramér "Mathematical Methods of Statistics", P. (123). لذلك سنقدم هذه الصيغة مباشرة لإيجاد $\overline{\mu}'_r$ دون محاولة إثباتها. وتنص صيغة "إيلر – ماكلورين" على ما يلى:

إذا كان لدينا دالة مستمرة $g(x)$ ولها مشتقات تفاضلية مستمرة حتى الدرجة 2m لجميع قيم x فى الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن:

$$(5.17.7a):\ \frac{1}{h}\int_a^b g(x)dx=\sum_{J=1}^{k}g\left(a+\left(J-\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

$$-\sum_{J=1}^{m}\frac{h^{2J-1}}{(2J)!}B_{2J}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left[g^{(2J-1)}(x)\right]_a^b-S_{2m}\,.$$

حيث: $\left[g^{(r)}(x)\right]_a^b$ هى المشتقة التفاضلية من الدرجة r للدالة $g(x)$ عند النهاية b مطروحاً منها المشتقة عند النهاية a. و $B_{2J}\left(\frac{1}{2}\right)$ هى قيمة كثيرة حدود برنوللى من الرتبة الأولى والدرجة 2J فى المتغير X عندما $x=\frac{1}{2}$. و m أى عدد صحيح غير سالب بشرط أن كل المشتقات التفاضلية فى العلاقة (5. 17. 7a) تكون موجودة ومستمرة. و S_{2m} ترمز للحد الباقى وصيغتها:

$$(5.17.7b):\ S_{2m}=\frac{k\,h^{2m}}{(2m)!}B_{2m}\left(\tfrac{1}{2}\right)g^{(2m)}\left(a+k\,h\,\theta\right)\ ;\ 0<\theta<1\,.$$

فى المعادلة (5. 17. 7a) إذا وضعنا:

$$g(x) = x^r \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z+x)dz$$

وإذا أهملنا S_{2m} واعتبرنا أن المشتقات التفاضلية $\left[g^{(2J-1)}(x)\right]_a^b$ تساوى الصفر لقيم $J = 1, 2, ..., m$ – وهذا ممكن لأننا افترضنا أن ذيلى الدالة $f(\cdot)$ ملاصقين للمحور الأفقى وبالتالى فإن $f(\cdot)$ ومشتقاتها التفاضلية تتلاشى عند الطرفين – إذن نصل بالمعادلة (5. 17. 7a) إلى الصيغة التالية:

$$\tfrac{1}{h}\int_a^b x \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z+x)dz\,dx = \sum_{J=1}^{k}\left[a+\left(J-\tfrac{1}{2}\right)h\right]^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f\left(z+a+\left(J-\tfrac{1}{2}\right)h\right)dz$$

ومن (5. 17. 1)

$$= \sum_{J=1}^{k} x_J^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z+x_r)dz = \overline{\mu}_r'$$

كما يتضح من (5. 17. 6).

$$\therefore \overline{\mu}_r' = \tfrac{1}{h}\int_a^b x^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z+x)dz\,dx$$

بوضع

$$x = u - z\ ,\ u = z + x\ ,\ a \le x \le b\ ,\ -\tfrac{h}{2} \le z \le \tfrac{h}{2}\ ,\ a - \tfrac{1}{2}h \le u \le b + \tfrac{1}{2}h$$

وتصبح المتغيرات الجديدة z و u بدلاً من z و x. والدالة $f(\cdot)$ معرفة فقط فى المدى $a \le u \le b$ وخارج هذا المدى تساوى الصفر. إذن مدى التكامل على هذه الدالة يظل من a إلى b بالرغم من أن $a - \frac{1}{2}h \le u \le b + \frac{1}{2}h$. أى أن:

$$\overline{\mu}_r' = \tfrac{1}{h}\int_a^b \left[\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} (u-z)^r dz\right] f(u)du\,.$$

$$= \tfrac{1}{h}\int_a^b \frac{\left(u+\frac{1}{2}h\right)^{r+1} - \left(u-\frac{1}{2}h\right)^{r+1}}{(r+1)} f(u)du$$

وبفك $\left(u \pm \frac{1}{2}h\right)^{r+1}$ بذات الحدين واختصار الحدود المتشابهة يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

العــزم الرائى (من الدرجة r) حول الصفر $\overline{\mu}'_r$ المحسوب من الجدول التكرارى يأخذ الصيغة:

$$(5.\ 17.\ 8):\ \overline{\mu}'_r = \frac{1}{h}\sum_{J=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \binom{r}{2J} \left(\tfrac{1}{2}h\right)^{2J} \frac{1}{(2J+1)} \mu'_{r-2J}$$

حيث $\left[\frac{r}{2}\right]$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى $\frac{r}{2}$. و μ'_{r-2J} هو العزم الحقيقى حول الصفر للمجتمع من الدرجة $(r-2J)$.

الصــيغة الســابقة تعطى عزوم التوزيع التكرارى (العزوم غير المصححة $\overline{\mu}'_r$) بدلالـــة عــزوم المجــتمع (أى العزوم الصحيحة μ'_r). ولكن العكس هو المطلوب، أى المطلوب معرفة μ'_r بدلالة $\overline{\mu}'_r$.

ملاحظــة (5 ــ 17 ــ 1): يجــب ملاحظـــة أننا وضعنا عدة فروض للوصول إلى الصـــيغة (8 .17 .5) ــ منها أن مدى المتغير X (الذى يمثل المجتمع) محدود وأن الحد الباقى S_{2m} المعطى بالعلاقة (5. 17. 7b) يمكن إهماله ــ وهذا يعتمد على شكل وسلوك الدالـــة $f^{(2m-1)}(x)$ الــتى تمثل المشتقة التفاضلية من الدرجة $(2m-1)$ لدالة كثافة المجــتمع. لذلك لكى نطبق هذه التصحيحات بدقة يجب أن يكون المدى $[a,b]$ ــ مدى المتغــير X ــ محدود. وحتى فى حالة التوزيعات التى يكون مداها غير محدود يجب أن يكــون الجــزء الرئيســى من مفردات التوزيع مركز فى وسط المدى والتكرارات على الطرفين صغيرة، أن يقترب تلاصق طرفى منحنى التوزيع التكرارى للمجتمع من المحور الأفقــى، وبذلــك يكون ذيلى التوزيع ضئيلان فى تكراراتهما أى يكونا متلاشيان تقريباً وهــذا يترتب عليه تحقق الفروض التى فرضناها بالنسبة للمشتقات $f^{(2m-1)}(x)$ وكذلك إهمال الحد الباقى S_{2m} المعطى بالعلاقة (5. 17. 7b).

ذكرنا قبل الملاحظة السابقة مباشرة أن المطلوب هو معرفة العزوم الصحيحة μ'_r بدلالـــة عزوم التوزيع التكرارى $\overline{\mu}'_r$. لذلك فإن العلاقة (8 .17 .5) التى تعطى $\overline{\mu}'_r$ بدلالة μ'_r لا تفــى بهذا الغرض. لهذا قدم "وولد" "Wold" (1934a) صيغة عامة للعزوم الحقيقية μ'_r بدلالة عزوم التوزيع التكرارى $\overline{\mu}'_r$. ويمكن الحصول على العزوم الحقيقية μ'_r لقيم $r = 1, 2, 3, ...$ مــن العلاقة (8 .17 .5) بدلالة عزوم التوزيع التكرارى $\overline{\mu}'_r$ فى الصيغة التالية:

$$(5.17.9):\ \mu_1' = \overline{\mu}_1'.$$

$$\mu_2' = \overline{\mu}_2' - \tfrac{1}{12}h^2.$$

$$\mu_3' = \overline{\mu}_3' - \tfrac{1}{4}\overline{\mu}_1'h^2.$$

$$\mu_4' = \overline{\mu}_4' - \tfrac{1}{2}\overline{\mu}_2'h^2 + \tfrac{7}{240}h^4.$$

$$\mu_5' = \overline{\mu}_5' - \tfrac{5}{6}\overline{\mu}_3'h^2 + \tfrac{7}{48}\overline{\mu}_1'h^4.$$

$$\mu_6' = \overline{\mu}_6' - \tfrac{5}{4}\overline{\mu}_4'h^2 + \tfrac{7}{16}\overline{\mu}_2'h^4 - \tfrac{31}{1344}h^6.$$

(5 ـ 17 ـ 2) تصحيحات شبرد للعزوم المركزية:

العلاقات السابقة (5. 17. 8, 9) خاصة بالعزوم غير المركزية. ويمكن إثبات أنه فى حالة العزوم المركزية نحصل على العزوم المركزية الحقيقية μ_r بدلالة العزوم المركزية للتوزيع التكرارى $\overline{\mu}_r$ فى الصيغة التالية:

$$(5.17.10):\ \mu_2 = \overline{\mu}_2 - \tfrac{1}{12}h^2$$

$$\mu_3 = \overline{\mu}_3$$

$$\mu_4 = \overline{\mu}_4 - \tfrac{1}{2}\overline{\mu}_2h^2 + \tfrac{7}{240}h^4$$

$$\mu_5 = \overline{\mu}_5 - \tfrac{5}{6}\overline{\mu}_3h^2$$

$$\mu_6 = \overline{\mu}_6 - \tfrac{5}{4}\overline{\mu}_4h^2 + \tfrac{7}{16}\overline{\mu}_2h^4 - \tfrac{31}{1344}h^6.$$

ملاحظة (5 ـ 17 ـ 2): يمكن الحصول على العلاقــات (5. 7. 10) من العلاقــات (5. 7. 9) مباشــــرة إذا اعتــبــرنا أن المتغيــر X مقيســاً مــن مركزه وبالتالى نضع $\mu_1' = \mu_1 = 0$.

(5 ـ 17 ـ 3) تصحيحات شبرد للعزوم العاملية:

لقــد قــدم "وولد" (1934a) صيغة عامة للعزم العاملى الرائى الحقيقى $\mu_{[r]}'$ بدلالة العــزوم العاملية للتوزيع التكرارى وفيما يلى صيغ العزوم العاملية الحقيقية الستة الأولى بدلالة العزوم العاملية للتوزيع التكرارى:

$$(5.17.11): \mu'_{[1]} = \bar{\mu}'_{[1]}$$

$$\mu'_{[2]} = \bar{\mu}'_{[2]} - \tfrac{1}{12}h^2$$

$$\mu'_{[3]} = \bar{\mu}'_{[3]} - \tfrac{h^2}{4}\bar{\mu}'_{[1]} + \tfrac{h^3}{4}$$

$$\mu'_{[4]} = \bar{\mu}'_{[4]} - \tfrac{h^2}{2}\bar{\mu}'_{[2]} + h^3\bar{\mu}'_{[1]} - \tfrac{71}{80}h^4$$

$$\mu'_{[5]} = \bar{\mu}'_{[5]} - \tfrac{5}{6}\bar{\mu}'_{[3]}h^2 + \tfrac{5}{2}\bar{\mu}'_{[2]}h^3 - \tfrac{71}{16}\bar{\mu}'_{[1]}h^4 + \tfrac{31}{8}h^5.$$

$$\mu'_{[6]} = \bar{\mu}'_{[6]} - \tfrac{5}{4}\bar{\mu}'_{[4]}h^2 + 5\bar{\mu}'_{[3]}h^3 - \tfrac{213}{16}\bar{\mu}'_{[2]}h^4 + \tfrac{93}{4}\bar{\mu}'_{[1]}h^5 - \tfrac{9129}{448}h^6.$$

(5 ــ 17 ــ 4) تصحيحات شبرد للمتراكمات:

المــتراكمة الأولــى تســاوى التوقع وكل المتراكمات الفردية ليس لها تصحيح أما المــتراكمات الزوجــية الحقيقية فيمكن حسابها من متراكمات الجدول التكرارى باستخدام العلاقات التالية:

$$(5.17.12): k_1 = \bar{k}_1 = \mu$$

$$k_2 = \bar{k}_2 - \tfrac{1}{12}h^2$$

$$k_4 = \bar{k}_4 + \tfrac{1}{120}h^4$$

$$k_6 = \bar{k}_6 - \tfrac{1}{252}h^6$$

حيــث k_r هــى المــتراكمة الحقيقــية من الدرجة r و $\bar{k}_r$ هى متراكمة التوزيع التكرارى من الدرجة r.

(5 ــ 17 ــ 5) تصحيحات شبرد للعزوم المشتركة (التوزيعات الثنائية):

لقد قدم "وولد" (1934b) "Wold" تصحيحات للعزوم فى حالة المتغيرات المتعددة. وبصفة خاصة نجد فى التوزيعات المشتركة الثنائية ــ إذا كانت فئات المتغير X متساوية وطول كل منها h_1 وفئات المتغير Y متساوية وطول كل منها h_2 ــ أن:

$$(5.17.13): \mu_{11} = \bar{\mu}_{11} \;,\; \mu_{21} = \bar{\mu}_{21}$$

$$\mu_{31} = \bar{\mu}_{31} - \tfrac{1}{4}\bar{\mu}_{11}h_1^2$$

$$\mu_{22} = \bar{\mu}_{22} - \tfrac{1}{12}\bar{\mu}_{20}h_2^2 - \tfrac{1}{12}\bar{\mu}_{02}h_1^2 + \tfrac{1}{144}h_1^2h_2^2.$$

وطــبعا تصحيحات μ_{12} و μ_{13} يمكن الحصول عليها من تصحيحات μ_{21} و μ_{31} بتــبديل الدلــيل الذيلى، كما أن تصحيحات العزوم الهامشية μ_{i0} و μ_{0j} يمكن الحصول علــيها مباشــرة مــن (5. 17. 10) وبهذا يمكن الحصول على كل العزوم المشتركة حتى الدرجة الرابعة.

تمارين الباب الخامس

(5 ـ 1): فى التوزيع التالى:

$$f(x)=\tfrac{1}{\pi}\frac{(1-\operatorname{Cos} a x)}{a x^2} \;;\; -\infty \le x \le \infty \,,\; a>0$$

أثبت أن الدالة المميزة هى:

$$\phi(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{a} & ; |t| \le a \\ 0 & ; |t|>a \end{cases}$$

(5 ـ 2): فى التوزيع التالى:

$$f(x)=\tfrac{1}{a}\left(1-\tfrac{|x|}{a}\right) \,,\; |x|<a$$

أثبت أن الدالة المميزة هى:

$$\phi(t)=2(1-\operatorname{Cos} a t)/a t^2 \;;\; -\infty \le t \le \infty$$

(5 ـ 3): X متغير عشوائى دالته المولدة للعزوم $M(\theta)$ و $-h<\theta<h$. أثبت أن

$$\Pr(X \ge a) \le e^{-a\theta} M(\theta) \,,\; 0<\theta<h,,$$

وأن:

$$\Pr(X \le a) \le e^{-a\theta} M(\theta) \,,\; -h<\theta<0.$$

(5 ـ 4): إذا كانت الدالة المولدة للعزوم $M(\theta)$ للمتغير X موجودة لجميع قيم θ حيث:

$$M(\theta)=\left(e^{\theta}-e^{-\theta}\right)/2\theta \;;\; \theta \ne 0 \,,\; M(0)=1.$$

استخدم نتائج التمرين السابق لإثبات أن $\Pr(X \ge 1)=0$ و $\Pr(X \le -1)=0$.

(5 ـ 5):

(أ) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\tfrac{1}{2}e^{-|x|}\ ;\ -\infty<x<\infty$$

أثبت أن الدالة المميزة لهذا التوزيع هى:

$$\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}\ ,\ -\infty\le t\le\infty$$

(ب) باستخدام العلاقة (5.1.59) أوجد $f(x)$ بدلالة $\phi(t)$.

(5 ـ 6): إذا كـــان العزم الرائى حول الصفر للمتغير العشوائى X هو: $\mu'_r=(r)!$ أوجد صيغة الدالة المولدة للعزوم.

(5 ـ 7): إذا كانت الدالة المميزة لمتغير عشوائى X هى:

$$\phi(t)=\frac{1}{(1-i\,t)^k}\ ;\ -\infty\le t\le\infty$$

فأوجد دالة كثافة احتمال المتغير X.

(5 ـ 8): متغير عشوائى X دالة احتماله:

$$P(x)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\ ,\ x=1,2,3,\dots$$

أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X وأوجد التوقع والتباين.

(5 ـ 9): إذا كانت:

$$f(x,y,z)=e^{-x-y-z}\ ;\ 0<x,y,z<\infty$$

هـــى دالـــة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية X,Y,Z ــ فأوجد الدالة المميزة للمتغير $U=X+Y+Z$ ومنها أوجد العزم الرائى حول الصفر μ'_r للمتغير U.

(5 ـ 10): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y هى:

$$f(x,y)=e^{-y}\ ;\ 0<x<y<\infty$$

فأوجد:

(1) الدالة المميزة المشتركة $\phi(t_1,t_2)$ للتوزيع المشترك $f(x,y)$.

(2) معامل الارتباط بين X و Y.

(3) الدالتين الهامشيتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ ـ أى دالتى كثافة احتمال X و Y على الترتيب.

(4) مـــن الدالة $\phi(t_1, t_2)$ أوجد الدالة المميزة للمتغير X وكذلك الدالة المميزة للمتغير Y.

(5) باستخدام $f_1(x)$ و $f_2(y)$ تأكد من صحة النتيجة التى حصلت عليها فى 4.

(5 ـ 11): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-x/\sigma} \;;;\; 0 \le x \le \infty \;,\; \sigma > 0.$$

أثبت أن المتراكمة الرائية k_r للمتغير X هى:

$$k_r = \sigma^r (r-1)!$$

(5 ـ 12): بين أن الدالة e^{itx} يمكن أن توضع على صورة متسلسلة لانهائية كما يلى:

$$e^{itx} = 1 + (e^{it} - 1)x^{[1]} + (e^{it} - 1)^2 \frac{x^{[2]}}{2!} + \cdots + (e^{it} - 1)^r \frac{x^{[r]}}{r!} + \cdots$$

لجميع قيم $-\infty \le x \le \infty$ حيث:

$$x^{[r]} = x(x-1)\cdots(x-r+1).$$

ثم أثبت:

$$\mu'_{[r]} = \left[D^r \phi(t)\right]_{t=0}$$

و

$$D = \frac{d}{d(e^{it})}.$$

حيث $\mu'_{[r]}$ هو العزم العاملى من الدرجة r و $\phi(t)$ هى الدالة المميزة للمتغيـــر X. ومن ثم بين أن العزم العاملى $\mu'_{[r]}$ للتوزيع ذو الحدين الذى دالة احتماله:

$$P(x) = \binom{n}{x} P^x q^{n-x} \;;;\; x = 0,1,2,\ldots,n \;,\; P + q = 1$$

هو:

$$\mu'_{[r]} = n^{[r]} P^r$$

حيث:

$$n^{[r]} = n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

(5 ــ 13): X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{k}{\left(1+x^2\right)^m} \;;\; -\infty \le x \le \infty \;,\; m \ge 1.$$

أثبت أن:

$$k = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}$$

وإذا كانت m عدد صحيح أكبر من أو يساوى الواحد فأوجد الدالة المميزة والدالة المولدة للمتراكمات للمتغير X. ثم أوجد متراكمات X عندما $m = 2$.

(5 ــ 14):

(أ) أثبت أن الدالة المشتركة:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\sqrt{x\,y}}$$

$$+\,h(x-y)(x\,y-x-y+2)e^{-(x+h)} \;;\; 0 \le x \le \infty \;,\; 0 \le y \le \infty.$$

تحقق شروط كثافة الاحتمال ــ أى أن:

$$f(x,y) > 0 \;\;\&\;\; \int_x\int_y f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

(ب) أثبت أن الدالة المميزة المشتركة للتوزيع السابق هى:

$$\phi(t_1,t_2) = (1-2\,i\,t_1)^{-\frac{1}{2}}(1-2\,i\,t_2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2\,i\,t_1\,t_2\,(t_1-t_2)}{(1-i\,t_1)^3\,(1-i\,t_2)^3}.$$

(5 ـ 15): إذا كان العزم الرائى μ'_r للمتغير العشوائى X هو:

(أ) $\mu'_r = \dfrac{k}{k+r} \;;\; r = 1, 2, \ldots \,,\; k > 0$

(ب) k عدد صحيح موجب $\mu'_r = \dfrac{(k+r)!}{k!} \;;$

فأثبت أن دالة كثافة احتمال X هى:

(أ)

$$\begin{aligned} f(x) &= k\,x^{k-1} \quad , \; 0 \le x \le 1 \\ &= 0 \qquad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

وأن X له توزيع وحيد.

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{k!} e^{-x} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; x \le 0 \end{cases}$$

وأن X له توزيع وحيد.

الفصل السادس
توزيعات دوال فى متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات
Distributions of Functions of Random Variables and Transformations

(6 ـ 1) مقدمة:

من المعروف أن أى دالة فى متغير عشوائى (أو فى عدة متغيرات عشوائية) تعتبر هــى الأخــرى متغيراً عشوائياً، وفى هذا الباب نهدف إلى إيجاد توزيع دالة ما فى متغير عشــوائى عــندما يكــون توزيع هذا المتغير معلوماً أو توزيع دالة ما فى عدة متغيرات عشوائية عندما يكون التوزيع الاحتمالى المشترك لهذه المتغيرات معلوماً. ولتبسيط عرض مــا نهــدف إليه فى هذا الباب نفرض أن لدينا متغيراً عشوائياً X له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ونهــدف إلى معرفة دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى Y حيث Y دالة فى X ـ لتكــن مثلاً $Y = h(X)$. كذلك إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ ونرغب فى معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات

$$(6.1.1):\ Y_i = h_i(x_1,...,x_n)\ ;\ i = 1,2,...,k.$$

ـ أى نرغــب فــى معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1,...,Y_k$ حيث Y_i دالة فى المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ وذلك لجميع قيم $i = 1,2,...,k$. من الناحــية الــنظرية علــى الأقــل يمكن القول أنه إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1,...,x_n)$ للمتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ معلومة ـ سواء كانت هذه المتغيرات مســتقلة أو غــير مســتقلة ـ يكــون من الممكن ـ نظرياً ـ إيجاد دالة كثافة الاحتمال

المشتركة للمتغيرات $Y_1,...,Y_k$ ، وذلك لأن دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة للمتغيرات $Y_1,...,Y_k$ يمكن الحصول عليها كما يلى:

$$F(y_1,...,y_k) = \Pr[Y_1 \le y_1,...,Y_k \le y_k]$$
$$= \Pr[h_1(X_1,...,X_n) \le y_1,...,h_k(X_1,...,X_n) \le y_k]$$

وذلــك لمجموعـــة القيــم الثابتة $y_1,..,y_k$ حيث y_i قيمـــة ثابتة هى إحدى قيم المتغير Y_i لجميع قيم $i = 1,2,...,k$.

والاحـــتمال السابق ما هو إلا احتمال حادثة معينة محددة بدلالة $X_1,...,X_n$ ــ ويمكـــن حســـاب احـــتمال هذه الحادثة بمكاملة دالة كثافة الاحتمال المشتركة (المعروفة) للمتغـــيرات $X_1,...,X_n$ إذا كانت هذه المتغيرات مستمرة ومنطقة التكامل هى مجموعة النقط التى تتحدد بالعلاقة التالية:

$$h_1(X_1,...,X_n) \le y_1,...,h_k(X_1,...,X_n) \le y_k$$

وهى منطقة فى الفراغ R_n الذى يمثل فراغ المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ ــ وبالطـــبع إذا أمكـــن إيجـــاد هـــذا التكامل يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة $F(y_1,...,y_k)$ للمتغـــيرات العشـــوائية $Y_1,...,Y_k$ ــ وطـــبعاً إذا كانت المتغيرات من النوع المتقطع نستخدم المجموع بدلاً من التكامل. لهذا نقول أنه من الممكن نظرياً ــ على الأقـــل ــ إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1,...,Y_k$ (التى تعتبر دوالاً فـــى المتغـــيرات العشوائية $X_1,...,X_n$) بدلالة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1,...,X_n$ ــ وحلـــول مثل هذه المسائل يعتبر أساساً هاماً لعمل الكثير من الاستدلالات الإحصـــائية. ولعـــل مشـــكلة تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية من أهم مشاكل الاستدلال الإحصائى ــ التى نحتاج فيها إلى إيجاد التوزيع الاحتمالى لدوال فى متغيرات عشوائية ــ فعـــادة مـــا يكون ما يسمى بـــ "مُقدِّر" "Estimator" المعلمة المجهولة عبارة عن دالة فى متغيرات عشوائية وهذا المقدَّر نحتاج عادة لمعرفة دالة كثافة احتماله. ولتوضيح ذلك نقدم مثاليـــن مبســـطين أحدهما عن دالة فى متغير عشوائى والثانى عن دالة فى عدة متغيرات عشوائية. وذلك كما يلى:

أولاً: إذا كـــان X متغـــير عشـــوائى لـــه توزيع معتاد توقعه μ وتباينه σ^2 ــ $n(\mu,\sigma^2)$ ــ أنظـــر بند (2 ــ 23 ــ 3 ب) وكـــــذلك الباب الثامن (التوزيع المعتاد) ــ والمتغـــير العشـــوائى Y عـــبارة عـــن دالـــة فـــى المتغـــير العشـــوائى X لتكـــن $Y = h(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ــ فيمكن إثبات أن الدالة Y تكون متغيراً عشوائياً له توزيع معتاد

قياسى $n(0,1)$ ــ نلاحظ أن الدالة (أو المتغير العشوائى Y) يعتمد على المعلمتين μ، σ فى حين أن توزيعه لا يعتمد عليهما.

ثانياً: إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ مستقلة وكل منها له توزيع برنوللى ذى المعلمة P ــ أنظر بند (1 ــ 26 ــ 1 أ) والباب السابع بند (7 ــ 2 ــ 1) ــ الذى تحدده دالة كثافة الاحتمال

$$P(x) = P^x (1-P)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

فإذا كان المتغير العشوائى Z يمثل دالة فى المتغيرات $X_1,...,X_n$ هى:

$$Z = h(x_1,...,x_n) = \sum_1^n X_i$$

فيمكن إثبات أن Z يعتبر متغيراً عشوائياً له توزع ذى الحدين بمعلمتيه n, P ــ ونلاحظ أن الدالة Z هنا لا تعتمد على المعلمتين n, P (فى حين أن توزيعه يعتمد عليهما) وذلك لأنه عند معرفة قيمة محددة لكل متغير X_i لتكن $X_i = x$ لجميع قيم i تتحدد قيمة مناظرة للمتغير Z هى $Z = \sum_{i=1}^n x_i$.

والتمييز بين الدالة Y (فى أولا) والدالة Z (فى ثانيا) ينحصر فى أن الدالة Y تعتمد على معالم مجهولة (هى σ، μ) بينما الدالة Z لا تعتمد على معالم مجهولة ــ والدالة (أو المتغير العشوائى) التى لا تعتمد على معالم مجهولة تسمى "إحصاء" "Statistic" و"الإحصاءات" "Statistics" من أهم الدوال (فى متغيرات عشوائية) التى يزخر بها الاستدلال الإحصائى والتى نحتاج إليها كثيراً لمعرفة توزيعها الاحتمالى ــ ولأهمية الإحصاء نقدم له التعريف التالى:

تعريف (6 ــ 1) "الإحصاء" "Statistic":

"أى دالة "بوراليه مقيسة" فى متغير عشوائى أو أكثر لا تعتمد على أى معلمة مجهولة تسمى إحصاء"

وعلى هذا فإن الدالة (أو المتغير العشوائى) $Z = \sum_1^n X_i$ المعطاة سابقاً (فى ثانياً) تعتبر إحصاء بينما المتغير العشوائى $Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ (المعطى فى أولا) لا يعتبر إحصاء إلا إذا كانت قيمة كلٍ من σ، μ معلومتان ــ ومما هو جدير بالذكر أنه بالرغم من أن

الإحصـــاء لا يعتمد على أى معلمة مجهولة إلا أن دالة كثافة احتماله قد تعتمد على معلمة مجهولة أو حتى عدة معالم مجهولة ــ فدالة كثافة احتمال الإحصاء Z المعطى سابقاً (فى ثانيا) يعتمد على المعلمتين n, P .

ملاحظـــة (6 ــ 1): فـــى التعريف السابق ذكرنا كلمة "بوراليه مقيسة" وذلك لأن الإحصـــاء دائمـــاً يعرف بأنه دالة "بوراليه مقيسة" فى متغيرات عشوائية ــ وهنا كلمة "بوراليه مقيسة" وضعت لتؤكد أن الإحصاء نفسه متغير عشوائى ــ وذلك لأننا كما سبق عـــند تعريف المتغير العشوائى ــ قصرنا تعريف المتغير العشوائى على الدوال البوراليه المقيسة فقط فأى دالة غير مقيسة تكون خارجة عن نطاق نظرية الاحتمالات وبالتالى لا يمكن اعتبارها متغيراً عشوائياً، وحيث أن كل الدوال التى سنتعامل معها فى هذا الكتاب هـــى دوال "بوراليه مقيسة" لذلك عند ذكر لفظ "دالة" دون أى إضافة يكون المقصود به "دالـــة بوراليه مقيسة" كما سبق الإشارة إلى ذلك فى الملاحظة (2 ــ 5 ــ 1) وذلك لعدم الإسراف فى استخدام نظرية القياس دون الحاجة إليها.

ونقـــدم فـــيما يلى بعض الإحصاءات الهامة التى سوف نتعرض لإيجاد توزيعاتها الاحتمالية فيما بعد

(1) الوســـط الحســـابى $\overline{X}$ لـــ n من المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ يعرف باستخدام الصيغة التالية:

$$(6.1.2):\ \overline{X} = \tfrac{1}{n}\sum X_i$$

(2) والتبايـــن S^2 لهذه المتغيرات يمكن تعريفه باستخدام الصيغة التالية إذا كانت n (عدد المتغيرات) كبيرة:

$$(6.1.3):\ S^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

أمـــا إذا كانت n صغيرة أقل من 30 مفردة مثلاً نفضل استخدام الإحصاء التالى لتباين المتغيرات العشوائية

$$(6.1.4):\ S^2 = \tfrac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \text{ ؛}$$

(3) العزم الرائى حول الصفر

$$(6.1.5):\ m_r = \tfrac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^r$$

والعزم الرائى حول المركز

$$(6.1.6):\ M_r = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^r$$

والـــتوزيعات الاحتمالـــية للإحصـــاءات تعتبر من أهم التطبيقات الإحصائية لهذا الموضـــوع الإحصـــائى الذى نحن بصدد دراسته فى هذا الباب وهو "توزيعات دوال فى متغـــيرات عشوائية" ــ وتبرز هذه الأهمية من أن دالة كثافة احتمال الإحصاء توضح لنا إلى أى درجة يكون الإحصاء له قيمة قريبة من المعلمة المجهولة التى يمثلها. وسنقدم فى هـــذا الـــباب ثلاثة أساليب مختلفة لإيجاد التوزيع الاحتمالى لأى دالة (أو عدة دوال) فى متغير عشوائى (أو فى عدة متغيرات عشوائية).

هذه الأساليب الثلاثة هى

(أ) أسلوب دالة التوزيع الاحتمالى

(ب) أسلوب الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم)

(جـ) أسلوب تحويل المتغيرات.

(6 ــ 2) أسلوب دالة التوزيع الاحتمالى:

Cumulative – Distribution Function Technique:

(6 ــ 2 أ) **حالـــة المتغير المفرد:** نتناول أولاً حالة المتغير المفرد X الذى له دالة كـــثافة احتمال $f(x)$، ونفرض أن المتغير Y يمثل دالة حقيقية فى المتغير X نعبر عنها بالعلاقة $Y = h(X)$ حيث تكون هذه الدالة محدودة ومعرفة تعريفاً وحيداً بالنسبة للمتغير X والمطلوب الحصول على دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى Y.

العلاقة الدالية $Y = h(X)$ تمثل عملية التقابل بين المتغيرين العشوائيين X و Y ــ فلو اعتبرنا أن المجموعة S_x تمثل مجموعة معينة على محور X والمجموعة S_Y تمثل المجموعـــة المقابلة لجميع قيم Y (على محور Y) التى تحقق العلاقة $Y = h(X)$ لجميع قيم X عندما $S_x > X$.

إذن $Y \supset S_Y$ عـــندمـــا تكـــــون $X \supset S_x$ ــ أى أن الحادثتان $Y \supset S_Y$ و $X \supset S_x$ متكافئتان ــ وعلى ذلك لأى مجموعة S_Y يكون:

$$(6.2.1):\ \Pr(Y \subset S_Y) = \Pr(X \subset S_x)$$

حيث S_x هى المجموعة المقابلة للمجموعة S_Y.

فـــإذا اخـــترنا، كحالة خاصـــة، المجموعة S_Y على أنها الفترة المغلقة من أعلى ورمزنا بالرمز $S_Y = (-\infty, y]$

$$(6.\ 2.\ 2):\ S_{xY} = \{X = x : h(x) \le y\}$$

لمجموعـــة الـــنقط X (على محور X) التى تحقق العلاقة $Y = h(X) \le y$ فإننا نحصل على دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y فى الصورة:

$$(6.\ 2.\ 3):\ G(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[X \subset S_{xy}]$$

(حيث S_{xy} كما هى معطاة سابقاً بالعلاقة (6. 2. 2)

فـــإذا كـــان المتغـــير العشوائى X له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى Y توضع فى الصورة التالية

$$(6.\ 2.\ 4):\ G(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[X \subset S_{xy}]$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{x \subset S_{xy}} f(x)\, dx & f(x) \quad \text{إذا كان } X \text{ متغير مستمر دالة كثافة احتماله} \\ \displaystyle\sum_{x \subset S_{xy}} P(x) & P(x) \quad \text{إذا كان } X \text{ متغير متقطع دالة احتماله} \end{cases}$$

التكامل (أو المجموع) مأخوذ على جميع قيم X التى تتبع للمجموعة S_{xy} المعطاة بالعلاقـــة (6. 2. 2). بهذا يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y (حيث Y دالة فى X) بدلالة توزيع المتغير X، ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة احتمال Y.

مثال (6 ـــ 2 أ ـــ 1): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير $Y = X^3$. ومنها أوجد دالة كثافة احتمال Y.

(الحل)

باستخدام العلاقة (6. 2. 3) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y هى:

$$G(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[X^3 \le y] = \Pr[X \le \sqrt[3]{y}] = F(\sqrt[3]{y}).$$

حيث $F(\cdot)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X.

$$F(x)=\sum_{k=1}^{[x]}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \quad ; \quad$$ [x] أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x

إذن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير $Y=X^3$ هى:

$$G(y)=F\left(\sqrt[3]{y}\right)=\sum_{k=1}^{[\sqrt[3]{y}]}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \;;;\; \sqrt[3]{y}$$ أكبر عدد صحيح أكبر من أو يساوى

$$\left[\sqrt[3]{y}\right];\; y=1,8,27,\ldots$$

ومن علاقة (2. 6. 4) يمكن الحصول على دالة احتمال Y من الدالة $G(y)$ فى الصورة:

$$g(y_J)=G(y_J)-G(y_J-0)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y}} \quad ; \quad y=1,8,27,\ldots$$

ملاحظة (6 ـ 2 ـ 1): يمكن حل المثال السابق بطريقة أبسط وأسهل:

$$g(y)=\Pr[Y=y]=\Pr\left[X^3=y\right]=\Pr\left[X=\sqrt[3]{y}\right]$$

$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y}} \quad , \quad y=x^3=1,8,27,\ldots$$

ولكن الحل السابق يساعد على تفهم استخدام أسلوب دالة التوزيع الاحتمالى فى إيجاد توزيع دالة فى متغير عشوائى بمعلومية دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى.

مثال (6 ـ 2 أ ـ 2): X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=x^2/9 \quad ; \quad 0<x<3$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير $Y=X^3$.

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x)=\Pr[X\le x]=\int_0^x \tfrac{x^2}{9}\,dx=x^3/27 \quad ; \quad 0\le x\le 3$$

وباستخدام العلاقة (6. 2. 3) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير $Y=X^3$ هى:

$$G(y)=\Pr[Y\le y]=\Pr\left[X^3\le y\right]=\Pr\left[X\le\sqrt[3]{y}\right]=F\left(\sqrt[3]{y}\right)$$

$$=y/27 \quad ; \quad 0\le y\le 27.$$

وبمفاضلة $G(y)$ نحصل على دالة كثافة احتمال Y:

$$g(y)=\frac{1}{27} \quad ; \quad 0 \le y \le 27$$

(6 ـ 2 ب) حالـــة المتغـــير المـــتعدد: يمكن تعميم حالة المتغير المفرد إلى حالة المتغير المتعدد المكون من أى عدد من المتغيرات كما يلى:

نفـــرض أن $\underline{X}_n' = (X_1,...,X_n)$ متغـــير عشوائى متعدد (مشترك) يتكون من المركـــبات $X_1,...,X_n$ وأن $\underline{Y}_k' = (Y_1,...,Y_k)$ متغـــير عشـــوائى متعدد يتكون من المركـــبات (أو المتغيرات) $Y_1,...,Y_k$ وكل متغير من هذه المتغيرات يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة Single Valued بالنسبة للمتغيرات $X_1,...,X_n$ ومعطاة بعلاقة دالية محددة فى الصورة:

$$Y_J = h_J(X_1,...,X_n) \quad ; \quad J=1,2,...,k\,.$$

فـــإذا كانت $S_k(Y)$ تمثل مجموعة معينة فى الفراغ R_k (فراغ المتغير المتعدد $\underline{Y}_k$) وكانت $S_n(X)$ هى المجموعة التى تمثل جميع قيم المتغير المتعدد $\underline{X}_n$ فى الفراغ R_n عـــندما يكـــون $\underline{Y}_k \subset S_k(Y)$ حيث: $Y_J = h_J(X_1,...,X_n)$;; $J=1,2,...,k$ فإن:

$$(6.\,2.\,5):\ \Pr[\underline{Y}_k \subset S_k(Y)] = \Pr[\underline{X}_n \subset S_n(X)]$$

فإذا اخترنا (كحالة خاصة) المجموعة $S_k(Y)$ على أنها فترة فى الفراغ R_k هى الفترة المحددة بالعلاقات التالية:

$$-\infty \le Y_1 \le y_1,...,-\infty \le Y_k \le y_k$$

حيـــث y_i عـــدد حقيقى يمثل إحدى قيم المتغير Y_i لجميع قيم، $i=1,2,...,k$، وإذا استخدمنا الرمز:

$$(6.\,2.\,6):\ S_n(x\,y) = \{(x_1,...,x_n) : h(x_1,...,x_n) \le y_J \ ; J=1,2,...,k\}$$

أى أن $S_n(x\,y)$ هـــى مجموعة النقط $(x_1,...,x_n)$ فى الفراغ R_n التى تحقق العلاقات: $h_J(X_1,...,X_n) = Y_J \le y_J$;; $J=1,2,...,k$، فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير المتعدد $\underline{Y}_k$ يمكن أن تكتب فى الصورة:

$$(6.2.7):\ G(y_1,\dots,y_k)=\Pr[Y_1\le y_1,\dots,Y_k\le y_k]=\Pr[\underline{X}_n\subset S_n(x\,y)]$$

حيث $S_n(x\,y)$ هى مجموعة النقط فى الفراغ R_n المعرفة بالعلاقة (6. 2. 6).

فـإذا كانـت دالـة الـتوزيع الاحـتمالى المشـتركة للمتغـير المتعدد $\underline{X}_n$ هى $F_n(\underline{x})=\Pr[X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n]$ فـإن دالـة التوزيع الاحتمالى للمتغير المشترك $\underline{Y}_k$ تأخذ الصورة:

$$(6.2.8):\ G(y_1,\dots,y_k)=\Pr[Y_1\le y_1,\dots,Y_k\le y_k]=\int\limits_{\underline{x}_n\subset S_n(x\,y)} d\,F_n(\underline{x}).$$

والـتكامل السـابق مـأخوذ بمفهوم ليبج ستيليتج فى الفراغ R_n ومنطقة التكامل محدودة $\underline{x}_n\subset S_n(x\,y)$ حيث $S_n(x\,y)$ كما فى (6. 2. 6).

مـثال (6 ـ 2 ب ـ 1): إذا كانت: $f(x,y)=4\,x\,y\,e^{-(x^2+y^2)}$;; $x>0$, $y>0$ دالة كثافة احتمال المتغيران الموجبان X و Y، فأوجد دالة كثافة احتمال $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$.

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Z هى:

$$G(z)=\Pr[Z\le z]=\int\limits_{Z\le z} g(z)\,dz$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int\limits_{y^2=0}^{z^2}\left\{\int\limits_{x^2=0}^{z^2-y^2} e^{-x^2}\,dx^2\right\} e^{-y^2}\,dy^2$$

$$=1-e^{-z^2}-z^2\,e^{-z^2}\ \ ;;\ 0\le z\le\infty$$

ودالة كثافة احتمال z هى:

$$g(z)=\frac{d\,G(z)}{dz}=2\,z^3\,e^{-z^2}\ ;;\ 0\le z\le\infty.$$

(6 ـ 2 جــــ): نقـدم فيما يلى بعض الحالات الخاصة ذات الأهمية الكبيرة والتى تصادفنا كثيراً أثناء دراستنا فى بقية هذا الكتاب.

(6 ـ 2 جـ ـ 1) حالة الدالة الخطية $Y = aX + b$:

أى دالــة فــى متغير عشوائى تعتبر هى الأخرى متغير عشوائى ويكون لها دالة توزيع احتمالى معطاة بالعلاقة (6. 2. 4) السابقة ـ والدالة $Y = aX + b$ دالة خطية فى المتغير العشوائى X فإذا كان X له دالة توزيع احتمالى $F(x)$ فيمكن منها الحصول على دالــة الــتوزيع الاحتمالى $G(y)$ للمتغير Y، إذ أن العلاقة $Y \le y$ مكافئة تماما للعلاقة $X \le \frac{y-b}{a}$ عــندما $a > 0$ أو العلاقــة $X \ge \frac{y-b}{a}$ عندما $a < 0$. إذن باستخدام المعادلة (6. 2. 4) مع اعتبار أن S_{xy} تمثل مجموعة النقط X التى تحقق العلاقة التالية:

$$X \le \frac{y-b}{a} \; ; \; a > 0$$

$$X \ge \frac{y-b}{a} \; ; \; a < 0$$

يمكــن الحصــول علــى دالة التوزيع الاحتمالى $G(y)$ للمتغير العشوائى Y فى الصورة التالية:

$$(6.\,2.\,9):\; G(y) = \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right) & ; \; a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right) & ; \; a < 0 \end{cases}$$

حيــث $F(x)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X. والعلاقة (6. 2. 9) الســابقة عندما $a < 0$ تكون صحيحة تماماً إذا كانت النقطة $x = \frac{y-b}{a}$ نقطة استمرار للدالــة $F(x)$ أما إذا كانت نقطة عدم استمرار فيجب تحديد $F\left(\frac{y-b}{a}\right)$ على أساس أن الدالة $F(x)$ دالة مستمرة من ناحية اليمين. وإذا كان المتغير العشوائى X متغيراً مستمراً له دالة كثافة الاحتمال $f(x) = F'(x)$ حيث $f(x)$ دالة موجودة Exists ومستمرة لجميع قيم x فإن المتغير العشوائى Y يكون هو الآخر له دالة كثافة الاحتمال

$$(6.\,2.\,10):\; g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

مثال (6 ـ 2 جـ ـ 1): إذا كان X متغير عشوائى متقطع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\tfrac{1}{3} \;;\quad x=1,2,3$$
$$=0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد دالتى التوزيع الاحتمالى وكثافة الاحتمال للمتغير $Y=2X+1$.

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x)=\sum_{x_j=0}^{x} f(x_j)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \;;\quad x<1 \\ &= \tfrac{1}{3} \;;\quad 1\le x<2 \\ &= \tfrac{2}{3} \;;\quad 2\le x<3 \\ &= 1 \;;\quad x\ge 3 \end{aligned}$$

وبما أن $Y=2X+1$ فيمكن استخدام العلاقة (6. 2. 9) السابقة حيث $a=2, b=1$ لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y كما يلى:

$$G(y)=\Pr[Y\le y]=F\left[\frac{y-b}{a}\right]=F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$\therefore G(y)=F\left(\frac{y-1}{2}\right)=\begin{cases} 0 \;;\; \frac{y-1}{2}<1 & ;\; y<3 \\ \frac{1}{3} \;;\; 1\le\frac{y-1}{2}<2 & ;\; 3\le y<5 \\ \frac{2}{3} \;;\; 2\le\frac{y-1}{2}<3 & ;\; 5\le y<7 \\ 1 \;;\; 3\le\frac{y-1}{2} & ;\; y\ge 7 \end{cases}$$

ومن العلاقة (4 .6 .2) نوجد دالة الاحتمال للمتغير Y كما يلى:

$$g(y_j)=G(y_j)-G(y_j-0)$$

حيث y_j هى القيم التى يأخذها المتغير Y ــ أى هى نقط القفز ــ وهى كما يظهر من صيغة دالة التوزيع الاحتمالى $G(y)$ هى النقط:

$$Y = 3, 5, 7$$

إذن

$$g(y_1) = g(Y = 3) = \tfrac{1}{3} - 0 = \tfrac{1}{3}$$
$$g(y_2) = g(Y = 5) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}$$
$$g(y_3) = g(Y = 7) = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$

وهذا يمكن وضعه فى الصورة المبسطة التالية

دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى Y هى:

$$g(y_j) = \tfrac{1}{3} \quad , \quad y_j = 3, 5, 7$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

مثال (6 ــ 2 جــ ــ 2): X متغير عشوائى مستمر دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad 0 \le x \le \infty$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد دالتى التوزيع الاحتمالى وكثافة الاحتمال للمتغيرين التاليين

$$Y = 2X + 1$$
$$Z = -2X + 1$$

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x) = \int_0^x e^{-u}\, du = \left(-e^{-u}\right)_0^x = 1 - e^{-x} \quad ; \; x > 0$$

وباستخدام العلاقة (6. 2. 9) السابقة ــ علما بأن $Y = 2X + 1$ ــ تكون $a = 2, b = 1$ وتكون دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y هى:

$$G(y) = \Pr[Y \le y] = F\left(\frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{y-1}{2}\right)} \;;\; \frac{y-1}{2} > 0 \;;\; y > 1$$

$$= 0 \qquad ;; \qquad \text{خلاف ذلك}$$

وبمفاضــــلة $G(y)$ بالنســـبة لـــــ y نحصل على دالة كثافة احتمال المتغير y فى الصورة:

$$g(y) = G'(y)$$

$$g(y) = \tfrac{1}{2} e^{-\left(\frac{y-1}{2}\right)} \quad , \; y > 1$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

وبالمثل تكون دالة كثافة احتمال المتغير Z فى الصورة:

$$h(Z) = \frac{1}{|-2|} f\left(\frac{z-1}{-2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{\left(\frac{z-1}{2}\right)} \qquad ; \; -\infty \le Z \le 1$$

ملاحظة (6 ــ 2 جــ ــ 1) العلاقة التبادلية الوحيدة $(1-1)$:

One – to – One Correspondence $(1-1)$:

العلاقـــة الدالية $Y = aX + b$ تسمى علاقة تبادلية وحيدة ــ ونرمز لها بالرمز $(1-1)$ ــ وذلـــك لأنـــه لكل قيمة من قيم X توجد قيمة وحيدة للمتغير Y تشتق من العلاقـــة $Y = aX + b$ والعكـــس صحيح حيث نجد أن $X = \frac{y-b}{a}$ ومنها تكون لكل قـــيمة مـــن قـــيم Y قيمة وحيدة للمتغير X تشتق من العلاقة العكسية $X = \frac{y-b}{a}$.

وبصـــفة عامـــة تعتبر العلاقة الدالية $Y = h(X)$ علاقة تبادلية وحيدة إذا كانت لكل قـــيمة من قيم X توجد قيمة واحدة مناظرة للمتغير Y تشتق من العلاقة $Y = h(X)$ وكذلـــك لكـــل قـــيمة من قيم Y توجد قيمة واحدة مناظرة للمتغير X تشتق من العلاقة

العكسية المقابلة $X = h^{-1}(Y)$ حيث $h^{-1}(x)$ هى الدالة العكسية The Inverse Function للدالة $h(x)$ وأمثلة العلاقات التبادلية الوحيدة كثيرة منها:

$$Y = \frac{1}{1+X} \; ; \; (\therefore x = \tfrac{1}{Y} - 1) \; ;; \; Y = e^{x} \; ; \; (\therefore x = \ln Y).$$

بينما العلاقة $Y = X^2$ لا تعتبر علاقة تبادلية وحيدة إذا كانت $-\infty \le X \le \infty$ وذلك لأنه عندما X تساوى قيمة معينة لتكن $X = 5$ مثلاً تكون $Y = \pm\sqrt{5}$ ـ ولكن نفس هذه العلاقة $Y = X^2$ تعتبر تقابلية وحيدة إذا كانت $0 \le X \le \infty$.

(6 ـ 2 ـ جـ ـ 2) العلاقة الدالية $Y = X^2$:

إذا كـان X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع الاحتمالى $F(x)$ ونرغب فـى إيجاد دالة كثافة احتمال متغير عشوائى آخر Y تربطه بالمتغير X العلاقـة $Y = X^2$. هذه العلاقة توضح أن المتغير Y دائماً غير سالب، وعلى ذلك فإنه لأى قـيمة مـن قـيم Y لتكـن $Y = y > 0$ تكـون العلاقـة $Y \le y$ مكافئة للعلاقة $-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}$ وتكون دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y هى:

$$G(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[X^2 \le y] = \Pr[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}]$$

فـإذا كانـت الـنقطة $X = -\sqrt{y}$ نقطة استمرار للدالة $F(x)$ فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى Y تكون:

$$(6.\,2.\,11):\; G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \quad ; \quad y \ge 0$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال $F'(x) = f(x)$ موجودة ومستمرة لجميع قيم x فإن دالة كثافة احتمال المتغير Y تكون:

$$(6.\,2.\,12):\; g(y) = G'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right] \; ; \; y > 0$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

مثال (6 ــ 2 جـــ ــ 3): X متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{2a}\ ;\ -a\le X\le a\quad ,\ a>0$$
$$=0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى $Y=X^2$.

(الحل)

العلاقـــة $Y=X^2$ ليست تبادلية وحيدة فى الفترة $-a\le X\le a$ ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{x}du=\begin{cases}\dfrac{x+a}{2a} & ;\ -a\le X\le a\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

إذن من العلاقة (6. 2. 11) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y هى:

$$\mathbf{G(y)=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})\ \ ;\ \ 0\le y\le a^2}$$
$$\mathbf{=\frac{\sqrt{y}+a}{2a}-\frac{-\sqrt{y}+a}{2a}}$$
$$\mathbf{=\tfrac{1}{a}\sqrt{y}\qquad ,\ 0\le y\le a^2}$$

ويمكن إيجاد دالة كثافة احتمال Y بمفاضلة $G(y)$ بالنسبة لـــ y فنحصل على:

$$g(y)=G'(y)=\frac{1}{2a\sqrt{y}}\quad ;\ \ 0\le y\le a^2$$

كما يمكن الحصول عليها من العلاقة (6. 2. 12) مباشرة كما يلى:

$$\mathbf{g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right]=\frac{1}{2a\sqrt{y}}\ ;\ 0\le y\le a^2}$$

(6 ــ 2 جـــ ــ 3) العلاقة الدالية $Y=F_X(x)$:

إذا كان X متغير عشوائى له دالة التوزيع الاحتمالى $F_X(x)$ وتربطه بالمتغير Y العلاقـــة $Y=F_X(x)$ ــ ونرغب فى الحصول على دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y

عـــندما تكـــون الدالـــة $F_X(x)$ دالة مستمرة ـــ فإن النظرية التالية تقدم لنا دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y.

نظرية (6 ــ 2 جـــ ــ 3 أ):

إذا كان X متغير عشوائى له دالة توزيع احتمالى $F_X(x)$ وهى دالة مستمرة ـــ فـــإن المتغـــير $Y = F_X(x)$ يكون له توزيع منتظم فى الفترة $(0 \le Y \le 1)$. والعكس صـــحيح، إذا كـــان المتغـــير Y له توزيـــع منتظم فى الفترة $0 \le Y \le 1$، فإن المتغير $X = F_X^{-1}(Y)$ يكون له دالة التوزيع الاحتمالى المستمرة $F_X(x)$ ـــ حيث $F_X^{-1}(\ )$ هـــى الدالة العكسية للدالة $F_X(\cdot)$. ـــ (أنظر التوزيع المنتظم فى البند (2 ــ 23 ــ 3أ) وكذلك التوزيع المنتظم بالفصل الثامن).

(الإثبات)

بمـــا أن الدالـــة $F_X(x)$ دالة غير تناقصية فإن الدالة العكسية $F_X^{-1}(y)$ تكون هى أصغر قيمة x تحقق العلاقة $F_X(x) \le y$ وذلك لأى قيمة معينة y من قيم المتغير Y فى الفترة $0 \le Y \le 1$ ـــ وعلى ذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y هى:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[F_X(X) \le y] = \Pr[X \le F_X^{-1}(y)]$$
$$= F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

لجميع قيم $0 \le y \le 1$.

والعكس صحيح ـــ إذا كان المتغير Y له توزيع منتظم فإن:

$$\Pr[X \le x] = \Pr[F_X^{-1}(Y) \le x] = \Pr[Y \le F_X(x)] = F_X(x)$$

هـــ. ط. ث.

والـــنظرية السابقة لها أهمية كبيرة فى كثير من التطبيقات الإحصائية وخصوصاً تلـــك الـــتى نســـتخدم فيها أسلوب المحاكاة Simulation حيث نرغب فى توليد قيم لمتغير عشـــوائى معيـــن. فعـــندما نحتاج لتوليد قيمة لمتغير عشوائى X له دالة توزيع احتمالى مســـتمرة $F_X(\cdot)$ ـــ فيكفينا توليد قيمة للمتغير العشوائى Y ذو التوزيع المنتظم فى الفترة $(0,1)$ ـــ فلـــو كانت هذه القيمة هى y مثلاً فإننا نحسب $F_X^{-1}(y)$ ونأخذ هذه القيمة على أنها القيمة x المولدة للمتغير X ـــ أى أن القيمة المولدة للمتغير X تكون

$$x = F_X^{-1}(y)$$

والقـــيم y's المولـــدة للمتغـــير العشـــوائى Y ذو التوزيع المنتظم تسمى بالأعداد العشـــوائية وهـــذه القـــيم يمكـــن الحصـــول عليها باستخدام الحاسبات الآلية أو الجداول الإحصائية مثل جداول الأعداد العشوائية.

مـــثال (6 ــ 2 جــــــ ــ 4): إذا كان المتغير العشوائى X له توزيع أسى بمعلمة λ ودالة توزيعه الاحتمالى

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad ; \; 0 \le x \le \infty$$

$= 0$ خلاف ذلك

بيـــن كـــيف يمكن توليد مجموعة من القيم العشوائية للمتغير X باستخدام التوزيع المنتظم فى الفترة $(0,1)$.

(الحل)

مـــن الـــنظرية الســـابقة يكون المتغير $Y = F_X(X)$ له توزيع منتظم فى الفترة $0 \le Y \le 1$، والعلاقة التى تربط المتغير Y بالمتغير X هى:

$$Y = 1 - e^{-\lambda X} \;,\; x \ge 0 \;,\; 0 \le Y \le 1$$

وحيث أن العلاقة العكسية هى:

$$X = F_X^{-1}(Y) = \tfrac{1}{\lambda} \ln(1 - Y).$$

وبذلك يكون المتغير $(x =) - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$ له توزيع أسى دالة توزيعه الاحتمالى $1 - e^{-\lambda x}$ فى الفترة $0 \le x \le \infty$. إذن إذا كان المتغير العشوائى Y له توزيع منتظم فى الفترة $0 \le Y \le 1$ فإن المتغير $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$ يكون له توزيع أسى دالة توزيعه الاحتمالى

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \;,\; 0 \le x \le \infty$$

وبذلـــك عند توليد قيمة معينة y للمتغير ذو التوزيع المنتظم Y (باستخدام الحاسب الآلى) فيمكن توليد قيمة للمتغير X باستخدام العلاقة:

$$x = \tfrac{-1}{\lambda} \ln(1 - y)$$

والقـــيمة $\frac{-1}{\lambda} \ln(1 - y)$ ستكون منحصرة بين $(0, \infty)$ وتمثل إحدى القيم المولدة للمتغير الأسى الذى دالة توزيعه الاحتمالى $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$، $0 \le x \le \infty$.

(6 ـ 2 جـ ـ 4) توزيع المجموع والفرق لمتغيرين عشوائيين مستمرين:

Distribution of Sum and Difference of Two Continuous Random Variables:

إذا كـان X، Y متغـيران مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة $f_{12}(x,y)$ المعـرفة على فراغهما المشترك (المستوى) R_2 ونرغب فى الحصول على دالة كثافة احتمال كلٍ من المتغيرين U وZ حيث $U = X - Y$ ، $Z = X + Y$ ـ لتكن $f_Z(z)$ ، $f_U(u)$ هما دالتى كثافة الاحتمال المطلوبتين. وأن $F_Z(z)$ ، $F_U(u)$ هما دالتى الـتوزيع الاحتمالى المناظرتين للمتغيرين Z وU. فإذا كانت z قيمة معينة من قيم المتغير Z ـ فإن:

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \Pr[X + Y \leq Z]$$

الحادثـة $X + Y \leq z$ تمـثلها مجموعـة الـنقط التى تقع أسفل الخط المستقيم $X + Y = z$ فى الفراغ R_2 ـ إذن:

$$F_Z(z) = \iint\limits_{X+Y \leq z} f_{12}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{12}(x,y)\, dy\right] dx$$

وبالـتعويض عن $y = w - x$ فى التكامل السابق الموجود داخل القوسين والذى نعتبر فيه أن x مقدار ثابت ـ فإننا نحول المتغير المكامل y إلى متغير آخر w ويكون

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f_{12}(x, w - x)\, dw\right] dx$$

وبفرض أنه يمكن إجراء التفاضل على الطرفين نجد أن دالة كثافة الاحتمال

$$f_Z(z) = \frac{d\, F_Z(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, w - x) dx\right] dw\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, z - x) dx$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(Z - y, y) dy$$

وبهذا نصل إلى أن دالة كثافة احتمال المتغير $Y = X + Z$ هى:

$$(6.2.13):\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, Z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(Z-y, y)\, dy$$

ويمكن تعميم النتيجة السابقة للحصول على دالة كثافة احتمال أكثر من متغيرين.

وبأسلوب مماثل يمكن إثبات أن دالة كثافة احتمال المتغير $U = X - Y$ هى:

$$(6.2.14):\ f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, x-u)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(u+y, y)\, dy$$

نتـيجة (6 ـ 2 جـــ ـ 4 أ): إذا كـان المتغيران المستمران X, Y مستقلان و $Z = X + Y$ فإن دالة كثافة احتمال المتغير Z تكون:

$$(6.2.15):\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y) dy$$

وكذلك عندما $U = X - Y$ تكون دالة كثافة احتمال المتغير U هى:

$$(6.2.16):\ f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(x-u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u+y)\, f_2(y) dy$$

وذلـك لأن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران X, Y ـ الدالة $f_{12}(\cdot,\cdot)$ ـ يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب دالتين هما $f_1(\cdot)$ ، $f_2(\cdot)$.

نقـدم فـيما يلى مثالين الأول عن توزيع المجموع والفرق لمتغيرين غير مستقلين والثانى عندما يكون المتغيرين مستقلين.

مثال (6 ـ 2 جـ ـ 5): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X, Y هى:

$$f(x, y) = 3x \quad ; 0 < y < x \le 1$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

فأوجد دالة كثافة احتمال كلٍ من:

أولاً: $Z = X + Y$

ثانياً: $U = X - Y$

(الحل)

من صيغة الدالة $f(x,y)$ السابقة يتضح أن المتغيران X, Y غير مستقلان حيث أن مدى كلٍ منهما يعتمد على الآخر.

أولاً: بمـا أن $Z = X + Y$ إذن $Y = Z - X$ ومن العلاقة (6. 2. 13) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير Z هى:

$$f_Z(z) = \int_x f_{12}(x, Z - x)dx \;\; ; \;\; 0 < Z - x = y < x \leq 1$$

والمسألة الآن أصبحت مسألة حساب التكامل السابق ــ إذن:

$$f_Z(z) = \int_x 3x \; dx$$

حيث أن الحدود

$$0 < y < x \leq 1$$

تتحول إلى:

$$0 < Z - x < x \leq 1 \;\; ; 0 < Z < 2$$

(أ) عندما $0 < Z < 1$ تكون: $\frac{Z}{2} < x < Z$

(ب) عندما $1 \leq Z < 2$ تكون: $\frac{Z}{2} \leq x < 1$

وعلى ذلك فإن:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{Z/2}^{Z} 3x\,dx & , \;\; 0 < Z < 1 \\ \int_{Z/2}^{1} 3x\,dx & ; \;\; 1 < Z < 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{9}{8} Z^2 & ; \;\; 0 < Z < 1 \\ \frac{3}{2}\left(1 - \frac{Z^2}{4}\right) & ; \;\; 1 < Z < 2 \end{cases}$$

ثانـــياً: عـــندما $U = X - Y$ تكـــون $Y = X - U$ ــ (بمـــا أن $Y < x$ إذن $U > 0$ وحدهـــا الأعلى 1 أى أن $0 < U < 1$) ــ ومن العلاقة (6. 2. 14) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير U هى:

$$f_U(u) = \int_x f(x, x-u)dx \ ; \ 0 < x - u < x \le 1$$

حيـــث: $0 < x < 1$ و $0 < u < 1$ و $0 < x - u < x \le 1$ وبما أن $0 < x - u$ إذن $u < x$ وحدود المتغير X هى $u < x \le 1$

$$\therefore f_U(u) = \int_u^1 3x\,dx \quad , 0 < u < 1$$

$$= \tfrac{3}{2}\left(1 - u^2\right) \ ; \ 0 < u < 1$$

المثال التالى يتناول حالة متغيران مستقلان.

مـــثال (6 ــ 2 جـــــ ــ 6): X, Y متغـــيران عشـــوائيان مستقلان وتوزيع كـــل منهمـــا منتظـــم فى الفترة $0 < X < 1$ و $0 < Y < 1$ ــ (أنظر التوزيع المنتظـــم بنـــد (2 ــ 23 ــ 3 أ) وكذلك التوزيع المنتظم بالباب الثامن) ــ أوجد دالة كثافة احتمال كلٍ من:

أولاً: المتغير العشوائى $Z = X + Y$

ثانياً: المتغير العشوائى $U = X - Y$

(الحل)

أولاً: دالة كثافة احتمال Z نحصل عليها كما فى المثال السابق تماماً ولكن باستخدام العلاقة (6. 2. 15) بدلاً من (6. 2. 13)

$$f_Z(z) = \int_x f_1(x) f_2(Z - x)dx$$

حيث $0 < x < 1$ ،$0 < Z - x < 1$ ،$0 < Z < 2$

عندما $0 < Z < 1$ تكون $0 < x < Z$

عندما $1 < Z < 2$ تكون $Z - 1 < x < 1$

وتكون دالة كثافة احتمال Z هى:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^Z dx = Z & ; \ 0 < Z < 1 \\ \int_{Z-1}^{1} dx = 2 - Z & ; \ 1 < Z < 2 \end{cases}$$

ثانيا: عندما $U = X - Y$ فإننا نحصل على دالة كثافة احتمال U كما فى المثال السابق تماماً ولكن باستخدام العلاقة (6. 2. 16) بدلاً من (6. 2. 14):

$$f_U(u) = \int_x f_1(x)\, f_2(x-u)\, dx$$

$-1 < u < 1$ ، $0 < x - u < 1$ ، $0 < x < 1$

عندما $-1 < u < 0$ تكون $0 < x < 1 + u$

عندما $0 < u < 1$ تكون $u < x < 1$

أى أن:

$$u < X < 1$$

إذن:

$$f_U(u) = \begin{cases} \int_0^{1+u} dx = 1 + u \ ; & -1 < u < 0 \\ \int_u^1 dx = 1 - u \ ; & 0 < u < 1 \end{cases}$$

ملاحظة (6 ــ 2 جـ ــ 4 أ): يمكن تعميم الأسلوب السابق لتوزيع مجموع متغيرين عشوائيين إلى حالة n من المتغيرات باستخدام أسلوب الاستنتاج الرياضى.

(6 ــ 2 جـ ــ 5) توزيع حاصل الضرب وخارج القسمة لمتغيرين عشوائيين مستمرين:

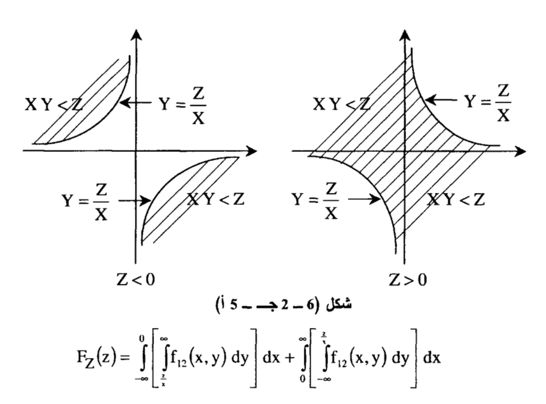
Distribution of Product and Quotient of Two Continuous r. v.'s:

نفرض أن X، Y متغيران عشوائيان مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة $f_{12}(x, y)$ المعرفة على فراغهما المشترك R_2 ونرغب فى الحصول على دالتى كثافة احتمال كلٍ من المتغيرين U وZ حيث $U = X/Y$ و $Z = XY$. لنرمز

لهاتيـــن الدالتيـــن بالرمزين $f_U(u)$ و $f_Z(z)$ ولدالتى التوزيع الاحتمالى المناظرتين لهما بالرمزين $F_U(u)$ ، $F_Z(z)$. فإذا كانت z إحدى قيم المتغير العشوائى Z فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Z عند القيمة $Z = z$ تكون:

$$F_Z(z) = \Pr[Z \le z] = \iint_{xy \le z} f_{12}(x, y) dx\ dy$$

والرسمان التاليان يساعدان على توضيح حدود التكامل عندما تكون القيمة المعينة $Z > 0$ أو $Z < 0$.



شكل (6 ــ 2 جــ ــ 5 أ)

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f_{12}(x, y)\ dy\right] dx + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{12}(x, y)\ dy\right] dx$$

فـــى التكامل السابق ضع $\theta = x\,y$ إذن $y = \dfrac{\theta}{x}$ وعند ثبات x تكون $dy = \dfrac{d\theta}{x}$

وعـــندما $Y = \infty$ فـــإن $\theta = x\,y = -\infty$ (إذا كانـــت x ســـالبة $-\infty < x < 0$)، $\theta = x\,y = \infty$ (إذا كانت x موجبة $0 < x < \infty$) ــ إذن:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{\infty} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right)\frac{d\theta}{x}\right]dx + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right)\frac{d\theta}{x}\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{(-x)} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right) d\theta\, dx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{x} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right) d\theta\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{-x} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right) d\theta + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{x} f_{12}\left(x, \frac{\theta}{x}\right) d\theta\right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{\theta}{x}\right) d\theta\right) dx$$

وبمفاضلة الدالة $F(z)$ بالنسبة لـــ z نحصل على دالة كثافة الاحتمال $f_Z(z)$ فى الصورة التالية:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{Z}{x}\right) dx$$

ويمكن تلخيص ما سبق فى الآتى:

إذا كـــان X، Y متغـــيران عشوائيان مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة $f_{12}(x, y)$ المعرفة على فراغهما المشترك R_2 وكان المتغيران $U = X/Y$ و $Z = X\,Y$ فإن دالة كثافة احتمال المتغير $Z = X\,Y$ هى:

$$(6.\ 2.\ 17):\ f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|} f_{12}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

وبالمثل:

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|} f_{12}\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$$

والصـــيغة الثانـــية التى تحتوى على متغير التكامل y تشتق بنفس طريقة الصيغة الأولى.

وإذا كـــان المتغـــيران X، Y مستقلان فإن العلاقة (6. 2. 17) السابقة تأخذ الشكل التالى:

$$(6.2.18):\ f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_1(x)\, f_2\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

أو:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_1\left(\frac{z}{y}\right) f_2(y)\, dy$$

كما يمكن بأسلوب مماثل إثبات أن دالة كثافة احتمال المتغير $U = X/Y$ هى:

$$(6.2.19):\ f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_{12}(u\,y, y)\, dy$$

حيـــث $f_{12}(x, y)$ هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X, Y. فإذا كان المتغيران X, Y مستقلان فإن دالة كثافة احتمال المتغير $U = X/Y$ تكون:

$$(6.2.20):\ f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_1(u\,y)\, f_2(y)\, dy$$

حيث $f_1(x)$ ، $f_2(y)$ هما دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين للمتغيرين X و Y على الترتيب.

مثال (6 ــ 2 جـــ ــ 7): X و Y متغيران عشوائيان مستقلان توزيعهما كما يلى:

$$f_1(x) = 1\ \ ;;\ \ 0 \le x \le 1$$

$$f_2(y) = 1\ \ ;;\ \ 0 \le y \le 1$$

أوجد دالة كثافة احتمال كلٍ من

أولاً: $Z = X\,Y$

ثانياً: $U = X/Y$

(الحل)

أولاً: من العلاقة (6.2.18) نجد أن دالة كثافة احتمال $Z = X\,Y$ هى:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{|x|} f_1(x)\, f_2\left(\tfrac{z}{x}\right) dx$$

حيث:

$$f_1(x)=1 \quad , \quad 0\le x\le 1$$
$$f_2\left(\tfrac{Z}{x}\right)=1 \quad , \quad 0\le \tfrac{Z}{x}\le 1$$

والعلاقتين $0\le x\le 1$ ، $0\le \frac{Z}{x}\le 1$ قيدان لابد من تحققهما معا

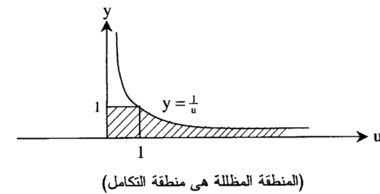
إذن:

$$f_Z(z)=\int_{x=Z}^{1}\tfrac{1}{x}\,dx=-\ln Z \;\;;;\;\; 0\le Z\le 1$$

ثانياً: من العلاقة (6.2.20) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير $U=X/Y$ هى:

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_1(u\,y)\,f_2(y)\,dy$$

حيث $0\le y\le 1$ و $0\le u\,y\le 1$، علما بأن $0\le u\le\infty$ إذا تحققت هذه القيود يكون $f_1(u\,y)=f_2(y)=1$ وخلاف ذلك تكون صفر. عندما $0\le u\le 1$ يمكن أن تأخذ y أى قـيمة فى المدى $0\le y\le 1$ دون أن يؤثر ذلك على العلاقة $0\le u\,y\le 1$ ولكن عندما $u>1$ لكى نضمن توفر القيد $0\le u\,y\le 1$ لابد أن تكون $y\le \frac{1}{u}$ والرسم التالى يوضح هذه الحدود



(المنطقة المظللة هى منطقة التكامل)

شكل (6 ـ 2 جـ ـ 5 ب)

$$\therefore f_U(u) = \begin{cases} \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2} & ;;\ 0 \le u \le 1 \\ \int_0^{\frac{1}{u}} y\,dy = \frac{1}{2u^2} & ;;\ 1 \le u \le \infty \end{cases}$$

(6 ـ 2 جـ ـ 6) توزيع أصغر قراءة وأكبر قراءة:

Distribution of Minimum and Maximum:

نفـرض أن $X_1,...,X_n$ مجموعـة عددهـا n مـن المتغـيرات العشوائية وأن $Y_1 = \min[X_1,...,X_n]$ ، $Y_n = \max[X_1,...,X_n]$ ـ أى أن Y_1 تمثل أصغر قيمة يمكـن أن يأخذهـا أى مـن المتغيرات $X_1,...,X_n$ و Y_n تمثل أكبر قيمة. فيمكن تقديم توزيـع كلٍ من المتغيرين Y_1 و Y_n بدلالة توزيع المتغيرات $X_1,...,X_n$ فى النظريتين التاليتين:

نظرية (6 ـ 2 جـ ـ 6 أ):

إذا كانت $X_1,...,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة و $Y_1 = min[X_1,...,X_n]$ و $Y_n = max[X_1,...,X_n]$ فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y_1 هى:

$$(6.2.21):\ G_1(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(y)]$$

حيث $F_i(\cdot)$ هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X_i ، $(i = 1,2,...,n)$

ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y_n هى:

$$(6.2.22):\ G_n(y) = \prod_{i=1}^{n} F_i(y)$$

فـإذا كانـت المتغـيرات $X_1,...,X_n$ لها نفس التوزيع الاحتمالى بدالة توزيع احتمالى موحدة $F(\cdot)$ فإن:

$$(6.2.23):\ G_1(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$$

$$(6.2.24):\ G_n(y) = [F(y)]^n$$

وإذا كانـــت المتغــيرات العشـــوائية $X_1,...,X_n$ مســـتقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالى بدالة كثافة احتمال موحدة $f(\cdot)$ ودالة توزيع احتمالى موحدة $F(\cdot)$ فإن دالتى كثافة احتمال Y_1 و Y_n تكون:

$$(6.2.25):\ g_1(y)=n\left[1-F(y)\right]^{n-1} f(y)$$

$$(6.2.26):\ g_n(y)=n\left[F(y)\right]^{n-1} f(y).$$

(الإثبات)

$$G_1(y)=\Pr[Y_1 \le y]=1-\Pr[Y_1 > y]=1-\Pr[\min(X_1,...,X_n)>y]$$

وعندما $\min(X_1,...,X_n)>y$ تكون جميع قيم X's أكبر من y أى أن:

$$G_1(y)=1-\Pr[X_1>y,...,X_n>y]$$

وحيث أن المتغيرات X's مستقلة

$$G_1(y)=1-\prod_{i=1}^{n}\Pr[X_i>y]=1-\prod_{i=1}^{n}[1-\Pr(X_i\le y)]$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(y)]$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6.2.21)

وعندما تكون X's لها توزيع موحد دالة توزيعه الاحتمالى $F(y)$ يكون:

$$G_1(y)=1-[1-F(y)]^n$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6.2.23)

وبمفاضلة العلاقة السابقة بالنسبة لـــ y نحصل على العلاقة (6.2.25).

وبالمثل يمكن إثبات العلاقات المقابلة فى حالة المتغير Y_n علما بأن:

$$G_n(y)=\Pr[Y_n\le y]=\Pr[\max(X_1,...,X_n)\le y]$$

وعندما $\max(X_1,...,X_n)\le y$ يكون كل قيم X أقل من أو تساوى y

$$G_n(y)=\Pr[X_1\le y,...,X_n\le y]$$

ومن الاستقلال

$$G_n(y) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i \le y) = \prod_{i=1}^{n} F_i(y)$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6. 2. 22)

وعـــندما تكون كل قيم X لها نفس التوزيع الاحتمالى بدالة توزيع احتمالى موحدة $F(\cdot)$ يكون

$$G_n(y) = [F(y)]^n$$

وهــذا يثبت صحة العلاقة (6. 2. 24) وبمفاضلة العلاقة السابقة نصل إلى العلاقة (6. 2. 26)

هـ. ط. ث.

مـــثال (6 ــ 2 جـــــ ــ 8): X_1 و X_2 و X_3 تمثل ثلاث مفردات لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع احتمالى تمثله دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = 5X^4 \; ; 0 \le x \le 1$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

فإذا كان المتغير Y يمثل أكبر مفردة فى العينة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة احتمال المتغير Y.

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X هى:

$$F(x) = \int_0^x 5X^4 \, dx = x^5 \;\;,\;\; 0 \le x \le 1$$

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير Y يمكن الحصول عليها من العلاقة (6. 2. 24) كما يلى:

$$G_n(y) = [F(y)]^n \qquad , n = 3$$

$$\therefore G_3(y) = [y^5]^3 = y^{15} \quad , 0 \le y < 1$$

ودالة كثافة الاحتمال:

$$g_3(y) = 15\,y^{14} \quad , \quad 0 < y < 1$$

(6 ـ 3) أسلوب الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم):

(6 ـ 3 أ): نعـرف من نظريـة التقابل الوحيد نظرية (5 ـ 1 ـ 11 ب) أن هناك علاقـة وحـيدة $(1-1)$ بين الدالة المميزة ودالة التوزيع الاحتمالى لأى متغير عشوائى، سـواء كان متغيراً مفرداً ـ نظرية (5 ـ 1 ـ 11 ب) ـ أو كان متغيراً متعدداً ـ نظرية (5 ـ 16 ـ 1). ففـى حالـة المتغـير المفرد ـ نجد أن لكل دالة توزيع احتمالى $F(x)$ للمتغـير X توجـد دالة مميزة وحيدة $\phi(t)$ ـ ولكل دالة مميزة $\phi(t)$ توجد دالة توزيع احـتمالى وحـيدة $F(x)$ ـ كذلـك فى حالة المتغير المتعدد ـ نجد أن لكل دالة توزيع احـتمالى $F(x_1,\ldots,x_k)$ للمتغـير المـتعدد $(X_1,\ldots,X_k)$ توجـد دالة مميزة وحيدة $\phi(t_1,\ldots,t_k)$ ولكـل دالـة ممـيزة $\phi(t_1,\ldots,t_k)$ توجـد دالـة توزيع احتمالى وحيدة $F(x_1,\ldots,x_k)$. وعلـى ذلـك إذا كـان لديـنا متغير مشترك $(X_1,\ldots,X_n)$ له توزيع احـتمالى معـروف ونرغـب فى معرفة التوزيع الاحتمالى للمتغير $(Y_1,\ldots,Y_k)$ حيث $Y_i = g_i(X_1,\ldots,X_n)$ لجمـيع قـيم $i = 1,2,\ldots,k$. فإنـنا نقوم بإيجاد الدالة المميزة $\phi(t_1,\ldots,t_k)$ للمتغـير المشـترك $(Y_1,\ldots,Y_k)$ بدلالـة توزيـع المتغـير المشـترك $(X_1,\ldots,X_n)$ ـ فـإذا كانـت الدالـة الممـيزة $\phi(t_1,\ldots,t_k)$ التى نحصل عليها بهذه الطـريقة من الدوال المعروفة لدينا سيكون هناك توزيع احتمالى وحيد مناظر لها ـ هذا التوزيع يكون هو توزيع المتغير المشترك $(Y_1,\ldots,Y_k)$.

وهذا الأسلوب يكون فعالاً فى حالة المتغير المفرد (عندما $k = 1$) حيث أن الدالة الممـيزة وكذلـك دالـة كثافة الاحتمال لكثير من المتغيرات المفردة معروفة لدينا تماماً، وبالـتالى عـندما نحصل على دالة مميزة من النوع المعروف لدينا لن تكون هناك أدنى صـعوبة لـتحديد دالـة التوزيع الاحتمالى المناظرة، ولكن الأمر يزداد صعوبة فى حالة المتغـير المـتعدد، حيث أننا لا نعرف إلا عدد قليل جداً من الدوال المميزة المشتركة ـ لذلـك فـإن استخدام أسلوب الدالة المميزة فى حالة المتغير المتعدد لن يكون مجدياً وإنما سيكون ذو استخداماً محدوداً فقط، ينحصر فى الحالات التى تكون دالة التوزيع الاحتمالى المشـتركة المقابلـة معـروفة لدينا. وبالرغم من ذلك عند معرفة دالة التوزيع الاحتمالى للمتغـير يمكن باستخدام العلاقة (b) من نظرية التقابل الوحيد للمتغير المفرد أو المشترك إيجـاد دالـة كـثافة احتمال هذا المتغير وهذا يعطى قوة كبيرة لهذا الأسلوب بالرغم من

صعوبة إيجاد التكامل الذى تتضمنه هذه العلاقة. ونقدم فيما يلى بعض الأمثلة التى توضح لنا كيفية استخدام هذا الأسلوب.

مـــثال (6 ــ 3 ــ 1): إذا كـــان X متغـــير معتاد قياسى و $Y = X^2$ أوجد توزيع المتغير Y علماً بأن دالة كثافة احتمال X هى:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \;\;;;\;\; -\infty \le x \le \infty$$

(الحل)

الدالة المميزة للمتغير Y هى:

$$\phi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = E\left(e^{itX^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}X^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}X^2(1-2it)}\, dx$$

ضع:

$$x\sqrt{1-2it} = z \quad , \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-2it}}$$

$$\phi_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \frac{dz}{\sqrt{1-2it}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

والدالة السابقة $\phi_Y(t)$ هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما معلمتيه $n = \frac{1}{2}$ و $\alpha = 1$ كمـــا يتضـــح مـــن (8. 3. 18) فيما بعد ــ (كما أن نفس الدالة $\phi_Y(t)$ هى الدالة المميـــزة لمتغـــير له توزيع كا^2 بدرجة حرية واحدة $\chi^2_{(1)}$ كما يتضح من (8. 14. 8) فيما بعد) ــ إذن من صيغة دالة كثافة احتمال المتغير ذو توزيع جاما كما فى (8. 3. 14) عندما $n = \frac{1}{2}$ و $\alpha = 1$ ــ (أو مـــن صـــيغة دالـــة كثافة المتغير ذو توزيع كا^2 عندما درجات الحرية $n = 1$) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير Y له توزيع جاما بمعلمة $\frac{1}{2}$ أو توزيع كا^2 بدرجة حرية واحدة ودالة كثافة احتماله هى:

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\, y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \quad , \quad 0 < y < \infty$$

مثال (6 ـ 3 ـ 2): X_2 ، X_1 متغيران عشوائيان مستقلان لهما توزيع أسى ودالة كثافة احتمال كل منهما

$$f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i} \quad , \quad 0 < x_i < \infty \quad , \quad i = 1,2 \quad , \quad \lambda > 0$$

أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى

$$Y = X_1 + X_2 .$$

(الحل)

$$\phi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = E\left(e^{it(X_1+X_2)}\right)$$

ومن الاستقلال

$$= E\left(e^{itX_1}\right) E\left(e^{itX_2}\right) = \phi_1(t)\,\phi_2(t) = \prod_{J=1}^{2} \lambda \int_0^\infty e^{itx_J - \lambda x_J}\, dx_J$$

$$= \lambda^2 \prod_{j=1}^{2} \int_0^\infty e^{-x_j(\lambda - it)}\, dx_j = \left[\frac{\lambda}{\lambda - it}\right]^2$$

وهذه هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما ـ (أنظر توزيع جاما بالباب الثامن) ـ بمعلمتيه λ و2 أى أن دالة كثافة احتمال Y هى:

$$g(y) = \lambda^2\, y\, e^{-\lambda y} \quad , \quad 0 < y < \infty \quad , \quad \lambda > 0$$

ومـــن أهـــم تطبيقات أسلوب الدالة المميزة هو إيجاد توزيع مجموع عدة متغيرات مستقلة وهو ما سنقدمه فى البند التالى.

(6 ـ 3 ب) توزيع مجموع (ومتوسط) عدة متغيرات مستقلة:

Distribution of Sums of Random Variables:

نعلـــم أنـــه إذا كانت $X_1,\ldots,X_n$ عدة متغيرات مستقلة لها الدوال المميزة التالية $\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)$ على الترتيب فإن المجموع $Z = X_1 + \cdots + X_n$ يكون دالته المميزة هى:

$$\phi(t) = \phi_1(t)\,\phi_2(t)\cdots\phi_n(t)$$

والعلاقة السابقة مفيدة جداً فى كثير من التطبيقات الإحصائية مثل دراسة توزيعات المعاينة وخاصة عندما تكون المتغيرات $X_1,\ldots,X_n$ لها توزيع موحد ونرغب فى إيجاد

توزيـــــع الدالــــــة $Z = g_1(X_1,...,X_n) = X_1 + \cdots + X_n$ أو الدالــــــة $\bar{x} = g_2(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ ويكـــون من السهل إيجاد الدالة المميزة للمجموع Z أو المتوسط $\bar{x}$ فى حين يكون من الصعب إيجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير Z أو المتغير $\bar{x}$ مباشـــرة فى حين أنه عند معـــرفة الدالة المميزة للمتغير Z (المجمــوع) أو المتغير $\bar{x}$ (المتوسط) يكون من السهل معرفة التوزيع الاحتمالى للمتغير.

مـــثال (6 ــ 3 ــ 3): إذا كانــت $X_1,...,X_n$ متغـــيرات عشوائية مستقلة فأوجد التوزيع الاحتمالى للمجموع $Z = \sum_1^n X_i$ والمتوسط $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ إذا كان:

أولاً: X_J له توزيـــع بواسونى بمعلمة λ_J. ثم أوجد توزيع كلٍ من Z و $\bar{x}$ عندما تكون $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. (أنظر التوزيع البواسونى ومثال (5 ــ 1 ــ 10أ)).

ثانياً: X_J له توزيع أسى دالة كثافة احتماله:

$$f_J(x) = \lambda_J e^{-\lambda_J x} \;\;;;\;\; x > 0$$

(الحل)

أولاً: نعلــم مـــن التوزيع البواسونى ومن مثال (5 ــ 1 ــ 10 أ) أن الدالة المميزة للمتغير X_J ذو التوزيع البواسونى بمعلمة λ_J هى:

$$\phi_{X_J}(t) = \exp\left[\lambda_J\left(e^{it} - 1\right)\right]$$

ومن نظرية (5 ــ 2 ــ 1) تكون الدالة المميزة للمجموع Z:

$$\phi(Z) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\lambda_J\left(e^{it} - 1\right)\right] = \exp\left[\sum_1^n \lambda_J\left(e^{it} - 1\right)\right]$$

وهذه هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع بواسون بمعلمة $\sum \lambda_J = \lambda$. أى أن توزيع مجمـــوع n من المتغيرات العشوائية المستقلة التى لها توزيع بواسون يكون له توزيع بواســـون بمعلمة تساوى مجموع معالم المتغيرات. من هذا يتضح أن توزيع بواسون يولد نفسه ذاتياً.

إذن:

$$P_{\sum x}(r) = \Pr\left[\sum x_i = r\right] = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \;\;;;\;\; \lambda = \sum_1^n \lambda_J \;\;;\;\; r = 0,1,2,...$$

وبالمثل يمكن الحصول على توزيع المتوسط $\overline{X}$ كما يلى:

$$\because \Pr\left[\sum x_i = r\right] = \Pr\left[\tfrac{1}{n}\sum x_i = \tfrac{r}{n}\right]$$

إذن توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو:

$$\Pr\left[\overline{X} = \tfrac{r}{n}\right] = \Pr\left[\sum_{1}^{n} X_i = r\right] = \tfrac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}\ ,\ r = 0,1,2,\ldots$$

لجميع قيم $\overline{X} = \tfrac{r}{n} = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots$

أو بوضع $J = \tfrac{r}{n}$ يمكن كتابة توزيع المتوسط $\overline{X}$ فى الصورة:

$$P_{\overline{x}}(J) = \Pr\left[\overline{X} = J\right] = \tfrac{\lambda^{nJ}}{(nJ)!}e^{-\lambda}\ \ ;\ J = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots$$

ثانيا: الدالة المميزة للمتغير X_J هى:

$$\phi_{X_J}(t) = E\left(e^{itX_J}\right) = \lambda_J \int_0^\infty e^{it\lambda_J x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

إذن الدالة المميزة للمجموع Z طبقاً لنظرية (5 ــ 2 ــ 1) هى:

$$\phi_Z(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - it}\right]^n$$

وهذه هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما بمعلمتين n و λ ــ (أنظر توزيع جاما بالباب الثامن) ــ إذن دالة كثافة احتمال Z هى:

$$f(Z) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} Z^{n-1} e^{-\lambda Z}\ \ ;\ 0 \le Z \le \infty\ ,\ \lambda > 0\ ,\ n > 0.$$

مــثال (6 ــ 3 ــ 4): إذا كــان $X_1, \ldots, X_k$ متغــيرات مستقلة ذات توزيع معتاد $X_J \sim n(\mu_J, \sigma_J^2)$ ــ أنظــر التوزيع المعتاد بالباب الثامن ــ فأوجد توزيع المتغير Z الذى يمثل علاقة خطية فى المتغيرات X's حيث:

$$Z = \sum_{J=1}^{k} C_J X_J$$

و C_J's ثوابت إحداها على الأقل يختلف عن الصفر.

(الحل)

نعلم من توزيع المتغير المعتاد أن دالته المميزة هى:

$$\phi_{X_J}(t) = \exp\left[i t \mu_J - \frac{t^2}{2} \sigma_J^2 \right]$$

(أنظر مثال (5 ـ 1 ـ 10 جـ).

إذن الدالة المميزة للمتغير $C_J X_J$ هى:

$$\phi_{C_J X_J}(t) = E\left(e^{itC_J X_J}\right) = \exp\left[i t C_J \mu_J - \frac{t^2}{2} C_J^2 \sigma_J^2 \right]$$

أى أن $C_J X_J$ لها توزيع معتاد $n\left(C_J \mu_J, C_J^2 \sigma_J^2\right)$

إذن الدالة المميزة للمتغير Z هى:

$$\phi_Z(t) = E\left(e^{itZ}\right) = E\left[e^{it\sum C_J X_J}\right]$$

ومن الاستقلال

$$= \prod_{J=1}^{k} E\left(e^{itC_J X_J}\right)$$

ومما سبق نجد أن:

$$\phi_Z(t) = \prod_{J=1}^{k} \exp\left[i t C_J \mu_J - \frac{t^2}{2} C_J^2 \sigma_J^2 \right]$$

$$= \exp\left[i t \sum_{J}^{k} C_J \mu_J - \frac{t^2}{2} \sum_{J}^{k} C_J^2 \sigma_J^2 \right]$$

وهذه هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع معتاد $n\left(\sum^{k} C_J \mu_J, \sum^{k} C_J^2 \sigma_J^2 \right)$ أى أن

$$Z = \sum_{J=1}^{k} C_J X_J \rightsquigarrow n\left(\sum_{1}^{k} C_J \mu_J, \sum_{1}^{k} C_J^2 \sigma_J^2 \right)$$

أى أن Z متغير له توزيع معتاد توقعه $\sum_{1}^{k} C_J \mu_J$ وتباينه $\sum_{1}^{k} C_J^2 \sigma_J^2$.

ملاحظة (6 ـ 3 ب ـ 1): المثال السابق يوضح أن أى علاقة خطية فى متغيرات معتادة مستقلة يكون لها توزيع معتاد ـ وفى الواقع حتى فى حالة عدم الاستقلال يمكن إثبات أن أى علاقة خطية فى متغيرات معتادة (حتى لو لم تكن مستقلة) يكون لها توزيع معتاد. إذ يمكن إثبات ما يلى:

إذا كـان $\underline{x}' = (X_1, ..., X_k)$ متغير مشترك لـه توزيع معتاد مشترك $n(\underline{\mu}, V)$ حيث $\underline{\mu}$ يمثل متجه التوقعات وV تمثل مصفوفة التغاير للمتغير المشترك $\underline{x}' = (X_1, ..., X_n)$ ـ فـإن المتغير $Z = \sum_{1}^{k} C_J X_J$ يكون له توزيع معتاد مفرد $n\left(\underline{C}' \underline{\mu}, \underline{C}' V \underline{C}\right)$ وسيتم إثبات ذلك فى باب التوزيع المعتاد المتعدد بالفصل التاسع.

نتـيجة (6 ـ 3 ب ـ 1): فى مثال (6 ـ 3 ـ 4) السابق ـ إذا وضعنا $k = 2$ و $C_1 = C_2 = 1$ فإن:

$$X_1 + X_2 \rightarrow n\left(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2\right)$$

أما إذا كانت $k = 2$ ، $C_2 = -1$ ، $C_1 = 1$ فإن:

$$X_1 - X_2 \rightarrow n\left(C_1 \mu_1 - C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2\right)$$

وإذا وضعنا $C_1 = C_2 = \cdots = C_k = \frac{1}{k}$ فإن

$$\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} X_k \rightarrow n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(6 ـ 4) تحويل المتغيرات (التحويلة $(Y = g(X)$):

هذا هو الأسلوب الثالث الذى نقدمه لإيجاد توزيع دوال فى متغيرات عشوائية بعد أن قدمـنا أولاً أسلوب دالة التوزيع الاحتمالى ثم أسلوب الدالة المميزة. وفى هذا الأسلوب نتناول أولاً حالة المتغير المفرد (متقطع ثم مستمر) ثم نتناول ثانياً حالة المتغيرات المتعددة (مـتقطعة ثـم مستمرة). وفى عرضنا هذا يجب أن نفرق بين الترميزين التاليين، الأول $Y = g(X)$ وهـذا يعبر عن المتغير العشوائى Y كدالة $g(\cdot)$ فى المتغير X، والترميز الثانى $y = g(x)$ وهذا يعبر عن تحويلة رياضية عادية أو دالة رياضية (بورالية مقيسة). وسنرمز بالرمز $g^{-1}(y)$ لقيمة x التى عندها $y = g(x)$ وذلك إذا كانت العلاقة بين x و

y علاقـــة تبادلـــية وحيدة $(1-1)$. أى أن $g^{-1}(\cdot)$ هى الدالة العكسية للدالة $g(\cdot)$ إذا كانت العلاقة بين x و y علاقة تبادلية وحيدة.

(6 ــ 4 أ) حالة المتغير المفرد المتقطـــع: نفرض أن X متغير متقطع يأخذ القيـــم (mass points) $X = x_1, x_2, \ldots$ باحـــتمالات $P_X(x_i)$ (دالـــة احتمال X) $i = 1, 2, \ldots$ والمتغير العشوائى Y تربطه بالمتغير X الدالة $Y = g(X)$. من الواضح أن دالة احتمال Y يمكـــن الحصـــول عليها بتطبيق قوانين الاحتمالات باستخدام دالة احتمال X و $P_X(x)$ والتحويلة $g(\cdot)$ وذلك كما يلى:

بفـــرض أن قـــيم المتغـــير Y (mass points) هـــى $y_1, y_2, \ldots$ وهذه القيم يمكن الحصول عليها من قيم X بالتحويلة $g(\cdot)$ حيث $y_i = g(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ويمكن الآن الحصول على دالة احتمال Y وهى $P_Y(y)$. وهنا يجب أن نفرق بين حالتين:

الحالة الأولى: عندما تكون العلاقة $y = g(x)$ علاقة تبادلية وحيدة $(1-1)$ وفى هذه الحالة تكون دالة احتمال Y

$$\begin{aligned} P_Y(y_i) &= \Pr[Y = y_i] = \Pr[g(X) = y_i] \\ &= \Pr[X = g^{-1}(y_i)] = P_X[g^{-1}(y_i)] \end{aligned}$$

وبذلك تكون دالة احتمال Y هى:

$$(4.\,6.\,1):\ P_Y(y_i) = P_X[g^{-1}(y_i)] \ ;;\ Y = y_1, y_2, \ldots$$

حيث: $i = 1, 2, \ldots\ ;;\ y_i = g(x_i)$ و $P_Y(y_i)$ تساوى الصفر خلاف ذلك.

الحالـــة الثانية: عندما تكون العلاقة $y = g(x)$ ليست وحيدة حيث يوجد عدة قيم لـــ X مقابلة لكل قيمة من قيم y وهنا لا يمكن التعبير عن الدالة العكسية $g^{-1}(\cdot)$ بصيغة واحدة ــ وفى هذا الحالة تكون:

$$P_Y(y_i) = \Pr[Y = y_i] = \Pr[g(X) = y_i] = \sum_{i:g(x_i)=y_i} P_X(x_i)$$

أى أن دالة كثافة احتمال Y هى:

$$\begin{aligned} (6.\,4.\,2):\ P_Y(y_i) &= \sum_{i:g(x_i)=y_i} P_X(x_i) \quad , \ Y = y_1, y_2, \ldots \\ &= 0 \qquad\qquad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

مثال (6 ـ 4 أ ـ 1): X متغير عشوائى له دالة الاحتمال

$$P_X(x) = \tfrac{1}{6} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

أوجد دالة احتمال كل من:

(أ) $Y = 2X + 1$

(ب) $Z = (X-1)^2$

(الحل)

(أ) عندما $Y = g(X) = 2X + 1$ إذن Y يمكن أن تأخذ القيم

$$y_1 = g(x_1) = g(0) = 1$$
$$y_2 = g(x_2) = g(1) = 3$$
$$y_3 = g(x_3) = g(2) = 5$$
$$y_4 = g(4) = g(3) = 7$$
$$y_5 = 9 \ ، \ y_6 = 11$$

وباستخدام العلاقة (6. 4. 1) تكون دالة كثافة احتمال Y هى:

$$P_Y(y) = \Pr[Y = y_i] = \Pr[2X + 1 = y_i] = \Pr[X = \tfrac{1}{2}(y_i - 1)]$$

$$P_Y(y) = \tfrac{1}{6} \ ; \ y = 1,3,5,7,9,11$$

$= 0$ خلاف ذلك

(ب) عندما $Y = (X-1)^2$ ، إذن Y يمكن أن تأخذ القيم:

$$y_1 = g(x_1) = (0-1)^2 = 1$$
$$y_2 = g(x_2) = (1-1)^2 = 0$$

وبالمثل:

$$y_3 = 1 \ , \ y_4 = 4 \ , \ y_5 = 9 \ , \ y_6 = 16$$

أى أن:

$$Y = 0,1,4,9,16$$

وباستخدام العلاقة (6.4.2) نحصل على دالة احتمال Y كما يلى:

$$P_Y(0) = P_X(0) = \tfrac{1}{6}\ ,\ P_Y(1) = P_X(0) + P_X(2) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6}$$

$$P_Y(4) = P_X(3) = \tfrac{1}{6}\ ,\ P_Y(9) = P_X(4) = \tfrac{1}{6}\ ,\ P_Y(16) = P_X(5) = \tfrac{1}{6}$$

أى أن دالة احتمال Y هى:

$$f_Y(y) = \tfrac{1}{6} \quad y = 0, 4, 9.16$$
$$= \tfrac{2}{6} \quad y = 1$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

(6 ــ 4 ب) حالة المتغير المفرد المستمر:

أولاً: عندما تكون العلاقة $Y = g(X)$ علاقة تبادلية وحيدة:

إذا كـــان X متغـــير عشوائى مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f_X(x)$ والمجموعة $A = \{x : f_X(x) > 0\}$ تمـــثل مدى المتغير X. والمتغير Y يرتبط بالمتغير X بالعلاقة $Y = g(X)$ حيث أن الدالة $y = g(x)$ دالة بوراليه مقيسة تتوافر فيها الشروط التالية:

(أ) أنها علاقة تبادلية وحيدة $(1-1)$.

(ب) وأن المشتقة التفاضلية $g'(x)$ تمثل دالة مستمرة everywhere continuous

فـــإذا كانت $g'(x) \neq 0$ فى الفترة $x_1 < x \le x_2$ التى تعتبر مجموعة جزئية من المـــدى A. وكانـــت $y_1 = g(x_1)$ و $y_2 = g(x_2)$ والدالـــة العكســـية المقابلـــة للدالة $y = g(x)$ هـــى $x = g^{-1}(y)$، فإن $g^{-1}(y)$ تكون دالة وحيدة القيمة ــ طبقاً للفروض الســـابقة ــ ومشـــتقتها التفاضـــلية $[g^{-1}(y)]'$ تعتـــبر دالـــة محدودة ومستمرة فى الفترة $y_1 < y \le y_2$. وهى الفترة المقابلة للفترة $x_1 < x \le x_2$، والفترتين متكافئتين أى أن:

$$\Pr[x_1 < X \le x_2] = \Pr[y_1 < Y \le y_2]$$

وعلى ذلك يكون:

$$\Pr[x_1 < X \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

وباستخدام التحويلة $y = g(x)$ نجد أن:

$$(6.4.3):\ \Pr[x_1 < X \le x_2] = \int_{y_1}^{y_2} f_X[g^{-1}(y)] \cdot [g^{-1}(y)]'\,dy$$

فإذا كانت المشتقة $\left[g^{-1}(y)\right]' > 0$ فإن الدالة $g^{-1}(y)$ تكون تزايدية وبالتالى تكون $y_1 < y_2$ ويكـــون التكامل الموجود فى الطرف الأيمن من المعادلة (6. 4. 3) معبراً عن $\Pr[y_1 < Y \le y_2]$ حيث $Y = g(X)$ وحيث أن:

$$(6.\ 4.\ 4):\ \Pr[x_1 < X \le x_2] = \Pr[y_1 < Y \le y_2] = \int_{y_1}^{y_2} f_Y(y)dy$$

إذن بمقارنـــة المعادلتيـــن (6. 4. 3)، (6. 4. 4) يتضح أن دالة كثافة احتمال المتغير $Y = g(X)$ عندما $\left[g^{-1}(y)\right]' > 0$ هى:

$$(6.\ 4.\ 5):\ f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left[g^{-1}(y)\right]'\ ;\ \left[g^{-1}(y)\right]' > 0$$

أمـــا إذا كانت $\left[g^{-1}(y)\right]' < 0$ فإن الدالة $\left[g^{-1}(y)\right]$ تكون تناقصية وبالتالى تكون $y_2 < y_1$ وعلى ذلك فإن المعادلة (6. 4. 3) السابقة تكتب فى الصورة:

$$(6.\ 4.\ 6):\ \Pr[x_1 < X \le x_2] = -\int_{y_2}^{y_1} f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left[g^{-1}(y)\right]'\ dy$$

$$= \int_{y_2}^{y_1} f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|\ dy$$

$$= \Pr[y_2 < Y \le y_1] = \int_{y_2}^{y_1} f_Y(y)\ dy$$

ومـــن المعادلـــة السابقة يتضح أنه عندما $\left[g^{-1}(y)\right]' < 0$ تكون دالة كثافة احتمال المتغير Y هى:

$$(6.\ 4.\ 7):\ f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|\ ;\ \left[g^{-1}(y)\right]' < 0$$

وبمقارنـــة المعادلتيـــن (6. 4. 5) ، (6. 4. 7) نصـــل إلـــى أن: المتغير العشوائى $Y = g(X)$ له دالة كثافة الاحتمال

$$(6.\ 4.\ 8a):\ f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|.$$

والصيغة (6. 2. 10) تعتبر حالة خاصة من الصيغة (6. 4. 8) السابقة.

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال (6.4.8a) فى الصيغة المرادفة التالية:

$$(6.4.8b):\ f_Y(y) = f_X(x)\ \cdot\ \left|\frac{dx}{dy}\right|_{x\to y}\ .$$

حيث:

$$f_X(x)\Big|_{x\to y} = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\ ,\quad \left|\frac{dx}{dy}\right|_{x\to y} = \left|\frac{d}{dy}\,g^{-1}(y)\right|$$

ثانياً: عندما لا تكون العلاقة $Y = g(X)$ علاقة تبادلية وحيدة:

سبق أن عرفنا العلاقة التبادلية الوحيدة بأنها تحدد لكل نقطة فى مدى المتغير X نقطة وحيدة فى مدى المتغير Y وبالعكس لكل نقطة فى مدى المتغير Y تحدد نقطة وحيدة فى مدى المتغير X، ولكن العلاقة لا تكون وحيدة عندما توجد لكل قيمة من قيم Y أكثر من قيمة من قيم X. فلو كانت المجموعة $A = \{x : f_X(x) > 0\}$ تمثل مدى المتغير X الذى دالة كثافة احتماله $f_X(x)$، والمجموعة $B = \{y : f_Y(y) > 0\}$ تمثل مدى المتغير Y الذى دالة كثافة احتماله $f_Y(y)$، وإذا كانت التحويلة $y = g(x)$ تحدد لكل نقطة من المجموعة A نقطة وحيدة فقط فى المجموعة B، ولكنها قد تحدد لكل نقطة فى المجموعة B أكثر من نقطة واحدة فى المجموعة A فإننا نقول أن التحويلة $y = g(x)$ ليست تبادلية وحيدة، وبالتالى لا يمكن تطبيق العلاقة (6.4.8a) السابقة لإيجاد دالة كثافة احتمال المتغير Y. ولكن لو أمكن تقسيم المجموعة A إلى عدد محدود (أو حتى قابل للعد) من المجموعات المنفصلة $A_1, A_2, ..., A_m$ $A = \bigcup_{J=1}^{m} A_J$ حيث تكون التحويلة $y = g(x)$ تحويلة تبادلية وحيدة بين كل واحدة من المجموعات A_J والمجموعة B. فإذا كانت $x = g_J^{-1}(y)$ هى الدالة العكسية للدالة $y = g(x)$ عندما $x \in A_J$، فإن دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى $Y = g(X)$ تكون:

$$(6.4.9):\ f_Y(y) = \sum_{J=1}^{m} f_X\left[g_J^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[g_J^{-1}(y)\right]'\right|\ ;\ y \in B$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

والعلاقة (6.2.12) تعتبر حالة خاصة من العلاقة (6.4.9) السابقة.

مـثال (6 ـ 4 ب ـ 1): إذا كان X متغير عشوائى مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f_X(x)$ فأوجد دالة كثافة احتمال المتغير $Y = g(X) = X^2$ عندما تكون:

(أ) $f_X(x) = e^{-x} \ ; \ 0 < x < \infty$

(ب) $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \ ; \ -\infty < x < \infty$

(الحل)

(أ) هـنا $0 < x < \infty$ وبالتالى فإن العلاقة $y = g(x) = x^2$ تكون علاقة تبادلية وحيدة، وبالـتالى يمكن تطبيق المعادلة (6. 4. 8a) حيث: $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ إذن دالة كثافة احتمال Y كما فى معادلة (6. 4. 8a) هى:

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \quad , \ 0 < y < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

(ب) هـنا $-\infty < x < \infty$ أى أن مدى المتغير X يشتمل على قيم موجبة وقيم سالبة، لذا فـإن الـتحويلة $y = g(x) = x^2$ ليست تبادلية وحيدة. فإذا قسمنا مدى المتغير X إلى المجموعتين المنفصلتين $A_1 = \{x : x \in A \ , \ x < 0\}$ ، $A_2 = \{x : x \in A \ , \ x > 0\}$ و $A = A_1 \cup A_2$ إذن $y = g(x) = x^2$ تعتـبر علاقة تبادلية وحيدة فى كل من A_1 و A_2 على حدة ـ ويجب ملاحظة أنه عندما $x \in A_1$ تكون $x = g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ وبالمـثل عـندما $x \in A_2$ تكـون $x = g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$ و $\left[g_1^{-1}(y)\right]' = \frac{-1}{2\sqrt{y}}$ و $\left[g_2^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ وبتطبيق العلاقة (6. 4. 9) نجد أن دالة كثافة احتمال Y هى:

$$(6.\ 4.\ 10) : f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-|-\sqrt{y}|} \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{2} e^{-|\sqrt{y}|} \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-|\sqrt{y}|} \quad , \quad 0 < y < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

(6 ـ 4 جـ) حالة المتغيرات المتعددة المتقطعة:

أولاً: عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية وحيدة $(1-1)$:

بفــرض أن $X_1,...,X_n$ متغــيرات عشوائية متقطعة لها دالة الاحتمال المشتركة $P(x_1,...,x_n)$ والمجموعــة $S_{\underline{x}}$ هــى مجموعــة الــنقط فى الفراغ R_n التى عندها $P(x_1,...,x_n)>0$، ونرغب فى الحصول على دالة الاحتمال المشتركة $g(y_1,...,y_n)$ للمتغيرات العشوائية المتقطعة $Y_1,...,Y_n$ التى ترتبط بالمتغيرات X's بالعلاقات التالية:

$$(6.\,4.\,11):\ Y_1 = h_1(X_1,...,X_n),...,Y_n = h_n(X_1,...,X_n)$$

حيــث العلاقات $h_j(.,...,.)$ تعتبر تحويلات (دوال) تبادلية وحيدة $(1-1)$ لجميع قيم $j=1,2,...,n$ ــ وعلى هذا يمكن الحصول على الدوال العكسية لهذه الدوال التبادلية الوحيدة فى الصورة:

$$(6.\,4.\,12):\ X_1 = h_1^{-1}(Y_1,...,Y_n),...,X_n = h_n^{-1}(Y_1,...,Y_n)$$

فإذا رمزنا لمجموعة النقطة $(y_1,...,y_n)$ التى عندها $g(y_1,...,y_n)>0$ بالرمز $S_{\underline{y}}$ فــإن العلاقة بين المجموعتين $S_{\underline{x}}$، $S_{\underline{y}}$ تكون علاقة تبادلية وحيدة، وبتطبيق قواعد الاحتمالات نجد أن:

$$\begin{aligned} g(y_1,...,y_n) &= \Pr[Y_1=y_1,...,Y_n=y_n] \\ &= \Pr[X_1=h_1^{-1}(y_1,...,y_n),...,X_n=h_n^{-1}(y_1,...,y_n)] \\ &= P[h_1^{-1}(y_1,...,y_n),...,h_n^{-1}(y_1,...,y_n)] \end{aligned}$$

أى أن دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1,...,Y_n$ هى:

$$(6.\,4.\,13):\ g(y_1,...,y_n)$$

$$\begin{aligned} &= P[h_1^{-1}(y_1,...,y_n)\ ;...;\ h_n^{-1}(y_1,...,y_n)] \quad (y_1,...,y_n)\in S_{\underline{y}} \\ &= 0 \qquad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

حيث أن $P(.,...,.)$ هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1,...,X_n$ والدوال $h^{-1}(.,...,.)$ كما هى معرفة بالعلاقة (6. 4. 12).

ومــن دالة الاحتمال $g(y_1,...,y_n)$ يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشية لأى عدد مطلوب من المتغيرات وذلك بالجمع على باقى المتغيرات غير المطلوبة. وحيث

أن أسلوب تحويل المتغيرات يتطلب أن يكون عدد المتغيرات الجديدة مساوياً لعدد المتغيرات القديمة ـ لذلك نقدم من المتغيرات الجديدة عدداً مساوياً لعدد المتغيرات القديمة ـ وبعد ذلك نحصل من الدالة $g(y_1,...,y_n)$ على أى دالة هامشية لأى عدد نرغبه من المتغيرات بالجمع على باقى المتغيرات غير المطلوبة.

ثانياً: عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية غير وحيدة:

فى هذه الحالة يمكن باستخدام نظرية الاحتمالات وبأسلوب مماثل لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد يمكن إثبات أن دالة الاحتمال المعطاة بالعلاقة (6. 4. 13) السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$(6.4.14):\ g(y_1,...,y_n) = \sum P\left[h_1^{-1}(y_1,...,y_n)\ ;...;\ h_n^{-1}(y_1,...,y_n)\right]$$

حيث يكون المجموع $\sum$ مأخوذاً على جميع قيم: $x_i = h_i^{-1}(y_1,...,y_n)\ \ i=1,2,...,n$ والتى عندها $(y_1,...,y_n) = [h_1(X_1,...,X_n),...,h_n(X_1,...,X_n)]$.

مثال (6 ـ 4 جـ ـ 1): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان لهما توزيع بواسونى بمعلمة λ_1 و λ_2 على الترتيب ودالة احتمالهما المشتركة هى:

$$P(x_1,x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}\ \lambda_2^{x_2}}{x_1!\ x_2!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\ \ ;;\ x_1 = 0,1,2,...\ ;\ x_2 = 0,1,2,...$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. أوجد دالة احتمال المجموع $Y = X_1 + X_2$.

(الحل)

لاستخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد توزيع المجموع Y_1 نحتاج لتقديم متغير ثانى ليكن Y_2 ـ ليكون عدد المتغيرات الجديدة (Y_2,Y_1) يساوى عدد المتغيرات القديمة (X_2,X_1). وحيث أن المتغير الثانى Y_2 غير مهم بالنسبة لنا فيمكن اختياره بطريقة ما تجعل لدينا علاقة تبادلية وحيدة، وبسيطة، ولتحقيق ذلك يمكن اختيار $X_2 = Y_2$.

إذن يمكن استخدام العلاقة (6. 4. 13) لإيجاد دالة الاحتمال المشتركة $g(y_1,y_2)$ للمتغيرين Y_2 و Y_1. وحيث أن $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_2$ يمكن كتابة التحويلة الرياضية التالية:

$$y_1 = x_1 + x_2 \ ; \ y_2 = x_2$$

$$\therefore x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2$$

$$; \ x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = y_2 \ ; \ y_1 = 0,1,2,... \ ; \ y_2 = 0,1,2,...,y_1$$

وبذلك تكون:

$$g(y_1, y_2) = P\left(h_1^{-1}(y_1, y_2) \ , \ h_2^{-1}(y_1, y_2)\right) = P(y_1 - y_2 \ ; \ y_2)$$

$$= \frac{\lambda_1^{y_1 - y_2} \ \lambda_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! \ y_2 !} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \ ; \ y_2 = 0,1,2,...,y_1$$

$$, \ y_1 = 0,1,2,.....$$

وبالجمع بالنسبة للمتغير Y_2 نحصل على دالة احتمال Y_1 فى الصورة:

$$g(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1 !} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1 !}{(y_1 - y_2)! \ y_2 !} \lambda_1^{y_1 - y_2} \cdot \lambda_2^{y_2}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{y_1}}{y_1 !} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \ ;; \ y_1 = 0,1,2,...$$

أى أن Y_1 له توزيع بواسونى بمعلمة $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(6 ــ 4 د) حالة المتغيرات المتعددة المستمرة:

نفــرض أن $X_1,...,X_n$ متغــيرات عشــوائية مســتمرة لها دالة كثافة الاحتمال المشــتركة $f(x_1,...,x_n)$ والمجموعــة $S_{\underline{x}_n}$ تمثل مجموعة من النقط فى الفراغ R_n عــندها $f(x_1,...,x_n) > 0$ ونرغــب فى الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة $g(y_1,...,y_k)$ للمتغيرات المستمرة $Y_1,...,Y_k$ $(k \le n)$ التى ترتبط بالمتغيرات X's بالعلاقات التالية:

$$Y_i = h_i(X_1,...,X_n) \ , \ i = 1,2,...,k \,.$$

يمكن استخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد دالة كثافة الاحتمال $g(y_1,...,y_k)$ وذلــك بإضافة متغيرات جديدة هى $Y_{k+1},...,Y_n$ ترتبط بالمتغيرات X's بعلاقات دالية معيــنة حتى يكون عدد المتغيرات الجديدة Y's يساوى تماماً عدد المتغيرات القديمة X's لأن هذا شرط ضرورى لاستخدام أسلوب تحويل المتغيرات وهو أسلوب رياضى معروف وموجــود فــى الكثير من كتب التحليل الرياضى وخاصة فى التكامل المتعدد ــ ويمكن

الــرجوع إلى كتب التحليل الرياضى وحساب التفاضل والتكامل لمعرفة ما نحتاج إليه من أسلوب تحويل المتغيرات وكذلك مفهوم الجاكوبيان الذى سوف نستخدمه فى بقية دراستنا لهذا الباب.

(6 ــ 4 د ــ 1) عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية وحيدة:

نفرض أن $X_1,\ldots,X_n$ متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال $f(x_1,\ldots,x_n)$ والمجموعة $S_{\underline{x}_n}$ هى مجموعة النقط فى الفراغ R_n التى عندها $f(x_1,\ldots,x_n)>0$، و:

$$(6.\,4.\,15):\ S_{\underline{x}_n}=\{(x_1,\ldots,x_n):f(x_1,\ldots,x_n)>0\}$$

وبفرض أن:

$$(6.\,4.\,16):\ y_i=h_i(x_1,\ldots,x_n)\ \ ;\ i=1,2,\ldots,n\,.$$

دوال مســتمرة وحــيدة القيمة تبادلية وحيدة $(1-1)$ تسمى تحويلة تبادلية وحيدة $(1-1)$ والمشتقات التفاضلية لكل منها بالنسبة للمتغيرات $X_1,\ldots,X_n$ مستمرة. وبما أن الدوال (6. 4. 16) تبادلية وحيدة، إذن يمكن أن توجد منها قيمة كلٍ من $x_1,\ldots,x_n$ بدلالة $y_1,\ldots,y_n$. أى أنــه يوجد دوال عكسية للدوال (6. 4. 16) تسمى أيضاً تحويلات عكسية وحيدة $(1-1)$ وتكتب فى الصورة:

$$(6.\,4.\,17):\ x_i=h_i^{-1}(y_1,\ldots,y_n)\ ;;\ i=1,2,\ldots,n\,.$$

ومــن الفروض السابقة تكون الدوال $h_1^{-1},\ldots,h_n^{-1}$ هى أيضاً دوال تبادلية وحيدة والمشــتقات التفاضــلية لكل منها بالنسبة لــ $y_1,\ldots,y_n$ مستمرة. فإذا كانت المتغيرات العشوائية $y_1,\ldots,y_n$ معرفة كما يلى:

$$(6.\,4.\,18):\ Y_i=h_i(X_1,\ldots,X_n)\ \ ;\ i=1,2,\ldots,n\,.$$

فإننا نرغب فى الحصول على دالة كثافة احتمال المتغير المشترك $(Y_1,\ldots,Y_n)$ والتى نرمز لها بالرمز $g(y_1,\ldots,y_n)$.

افترضــنا ســابقاً أن العلاقــات (6. 4. 16) علاقــات تبادلية وحيدة فهى إذن تنقل المجموعة $S_{\underline{x}_n}$ فى فراغ المتغيرات $(X_1,\ldots,X_n)$ المعطاة فى (6. 4. 15) إلى مجموعة ما لنرمز لها بالرمز $S_{\underline{y}_n}$ فى فراغ المتغيرات $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

فإذا كانت المجموعة $A_{\underline{x}}$ مجموعة جزئيـة من الفـراغ $S_{\underline{x}_n}$ فـإن العلاقـات (6. 4. 16) تـنقل $A_{\underline{x}}$ إلى مجموعة مناظرة فى الفراغ $S_{\underline{y}_n}$ لنرمز لها بالرمز $B_{\underline{y}}$ حيث تكـون $B_{\underline{y}}$ هـى المجموعـة المقابلة للمجموعة $A_{\underline{x}}$ طبقاً للتحويلات (6. 4. 16). إذن الحدثان $(X_1,..., X_n)\in A_{\underline{x}}$ و $(Y_1,..., Y_n)\in B_{\underline{y}}$ متكافئان ـ وعليه تكون:

$$(6.4.19):\ \Pr\left[(Y_1,..., Y_n)\in B_{\underline{y}}\right] = \Pr\left[(X_1,..., X_n)\in A_{\underline{x}}\right]$$

$$= \int\limits_{(x_1,...,x_n)\in A_{\underline{x}}}\cdots\int f(x_1,..., x_n)dx_1 ... dx_n$$

ويمكن الآن إيجاد التكامل السابق باستخدام أسلوب تحويل المتغيرات طبقاً للعلاقات (6. 4. 16) [أو (6. 4. 17)] ومن التحليل الرياضى فى حساب التكامل المتعدد نعلم أن:

$$(6.4.20):\ \int\limits_{(x_1,...,x_n)\in A_{\underline{x}}}\cdots\int f(x_1,..., x_n)dx_1 ... dx_n$$

$$= \int\limits_{(y_1,...,y_n)\in B_{\underline{y}}}\cdots\int f\left[h_1^{-1}(y_1,..., y_n)\ ;..;\ h_n^{-1}(y_1,..., y_n)\right]$$

$$\cdot \left| J_{(y_1,...,y_n)} \right| dy_1 ... dy_n$$

حيث $|J|$ يسمى جاكوبيان التحويلة العكسية (6. 4. 17).

وبفـرض أن هـذا الجاكوبيان لا يساوى الصفر (لجميع قيم $(y_1,..., y_n)\in B_{\underline{y}}$) ومعطى بالعلاقة:

$$(6.4.21):\ \boldsymbol{J}_{(y_1,...,y_n)} = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \right|$$

ومـــن الفـــروض الســـابقة يتضـــح أن الجاكوبيان $J_{(y_1,...,y_n)}$ يعتبر دالة محدودة ومســـتمرة لجميع قيم $(y_1,...,y_n)$ فى المنطقة $B_{\underline{y}}$ حيث $S_{\underline{y}_n} \supset B_{\underline{y}}$. ومن العلاقتين (6. 4. 19)، (6. 4. 20) يتضح أن:

$$(6.4.22):\ \Pr\left[\left(Y_1,...,Y_n\right)\in B_{\underline{y}}\right]$$

$$= \int_{(y_1,...,y_n)\in B_{\underline{y}}}\!\!\!\cdots\int f\left[h^{-1}(y_1,...,y_n)\ ;...;\ h_n^{-1}(y_1,...,y_n)\right]$$

$$\cdot\left|J_{(y_1,...,y_n)}\right| dy_1...dy_n$$

$$= \int_{(y_1,...,y_n)\in B_{\underline{y}}}\!\!\!\cdots\int g(y_1,...,y_n)\,dy_1...dy_n$$

وحيث أن $B_{\underline{y}}$ تعتبر أى مجموعة جزئية من المجموعة $S_{\underline{y}_n}$ فإن العلاقة السابقة تكون صحيحة حتى عندما تكون $B_{\underline{y}} = S_{\underline{y}_n}$.

وبمقارنـــة الـــتكاملات فى العلاقة السابقة يتضح أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_1,...,Y_n)$ هى:

$$(6.4.23):\ g(y_1,...,y_n) = f\left[h^{-1}(y_1,...,y_n);...;h_n^{-1}(y_1,...,y_n)\right]$$

$$\cdot\left|J_{(y_1,...,y_n)}\right|\ ;(y_1,...,y_n)\in S_{\underline{y}_n}$$

حيث أن $f(.,...,.)$ هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(X_1,...,X_n)$ و $J_{(y_1,...,y_n)}$ هـــو جاكوبـــيان التحويلة المعطى بالعلاقة (6. 4. 21). ويمكن تخليص النتائج السابقة فى النظرية التالية لأهميتها:

نظرية (6 ــ 4 د ــ 1):

إذا كانـــت $X_1,...,X_n$ متغـــيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1,...,x_n)$. والمجموعة $S_{\underline{x}}$ تمثل فراغ المتغيرات $(X_1,...,X_n)$ حيث:

$$S_{\underline{x}_n} = \left\{(x_1,...,x_n): f(x_1,...,x_n) > 0\right\}.$$

وبفرض أن:

(1) $y_i = h_i(x_1, ..., x_n)$; $i = 1, 2, ..., n$ تمثل تحويلة تبادلية وحيدة $(1-1)$ تنقل الفراغ $S_{\underline{x}_n}$ إلى فراغ آخر $S_{\underline{y}_n}$ للمتغيرات $Y_1, ..., Y_n$.

(2) المشـتقات التفاضلية الأولى للدوال العكسية $x_i = h_i^{-1}(x_1, ..., x_n)$; $i = 1, 2, ..., n$ تمثل دوال مستمرة فى الفراغ $S_{\underline{y}_n}$.

(3) جاكوبـيان الـتحويلة العكسية المعطاة فى (2) لا يساوى الصفر وهو الجاكوبيان J المعطى بالعلاقة(6. 4. 21).

إذن دالـة كـثافة الاحـتمال المشـتركة للمتغيرات العشوائية $Y_1, ..., Y_n$ حيث $Y_i = h_i(X_1, ..., X_n)$, $i = 1, 2, ..., n$ هى:

$$(6.4.24):\ g(y_1, ..., y_n) = f\left[h^{-1}(y_1, ..., y_n); ..; h_n^{-1}(y_1, ..., y_n)\right] \cdot \left|J_{(y_1, ..., y_n)}\right| ;\ ; (y_1, ..., y_n) \in S_{\underline{y}_n}$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

حيث $S_{\underline{y}_n}$ هى صورة (image) المجموعة $S_{\underline{x}_n}$ المعطاة بالعلاقة (6. 4. 15) طبقاً للتحويلة (6. 4. 16).

ملاحظـة (6 ــ 4 د ــ 1): يمكـن التعبير عن تحويل المتغيرات فى صورة علاقة مصـفوفية كمـا يلى: إذا كان لدينا التحويلة الخطية $\underline{y} = A\,\underline{x}$، حيث $\underline{x}$ و $\underline{y}$ متجهان لهمـا نفـس الدرجـة $n \times 1$ و A مصفوفة مربعة $(n \times n)$ غير شاذة أى محددها لا يساوى الصفر، فإن جاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J = \left| d\,\underline{y} / d\,\underline{x} \right| = \left||A|\right|$$

حيث $\left||A|\right|$ هى القيمة الموجبة لمحدد المصفوفة A. أى أن:

$$dy_1 \ldots dy_n = \left||A|\right| \cdot dx_1 \ldots dx_n$$

أو

$$d\,\underline{y} = \left||A|\right| d\,\underline{x}$$

نتـيجة (6 ــ 4 د ــ 1): فـى النظرية السابقة بوضع $n = 2$ نحصل على دالة كـثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Y_1 = h_1(X_1, X_2)$ ، $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ فى الصورة:

$$(6.4.25):\ g(y_1, y_2) = f\left[h_1^{-1}(y_1, y_2), h_2^{-1}(y_1, y_2)\right] \cdot \left|J_{(y_1, y_2)}\right| \ ;; (y_1, y_2) \in S_{\underline{y}_2}$$

حيـث $J_{(y_1, y_2)}$ هو الجاكوبيان (6. 4. 21) عندما $n = 2$. و $f(x_1, x_2)$ هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1, X_2 . و $S_{\underline{y}_2}$ هى المجموعة $S_{\underline{y}_n}$ المعطاة فى النظرية السابقة عندما $n = 2$.

ملاحظـة (6 ــ 4 د ــ 2): يمكــن باســتخدام النتــيجة السابقة إيجاد دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالى للمجموع والفرق وحاصل الضرب وخارج القسمة لأى متغيريــن عشوائيين ونحصل على نفس النتائج المعطاة بالعلاقات (6. 2. 13) و(6. 2. 14) للمجموع و(6. 2. 17) لحاصل الضرب و(6. 2. 19) للقسمة.

وسنوضح فيما يلى كيفية الحصول على العلاقة (6. 2. 13) باستخدام النتيجة السابقة ويمكن إثبات باقى العلاقات بنفس الأسلوب.

للحصــول علــى دالة كثافة احتمال مجموع متغيرين عشوائيين ــ ضع فى نتيجة (6 ــ 4 د ــ 2) الســابقة $Y_2 = X_2$ و $Y_1 = h_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ إذن العلاقــات العكسية هى: $X_2 = Y_2$ و $X_1 = Y_1 - Y_2$ والجاكوبيان:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

إذن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران Y_1, Y_2 هى:

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2) \ ;; (y_1, y_2) \in S_{\underline{y}_2}$$

$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

حيــث $S_{\underline{y}_2}$ هــى المجموعة التى تمثل فراغ المتغير (Y_1, Y_2) وهى تتكون من جمــيع النقط (y_1, y_2) التى يمكن الحصول عليها من النقط المقابلة (x_1, x_2) باستخدام

الـــتحويلة $y_2 = x_2$ و $y_1 = x_1 + x_2$. وللحصول على دالة كثافة احتمال المتغير Y_1 نكامل الدالة $g(y_1, y_2)$ بالنسبة للمتغير y_2 حيث نحصل على

$$g_1(y_1) = \int_{y_2} f(y_1 - y_2, y_2)\, dy_2$$

وهى نفس العلاقة (6. 2. 13) بكتابة y_1 بدلاً من Z و y_2 بدلاً من y.

مثال (6 ــ 4 د ــ 1): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية X_1 و X_2 و X_3 هى:

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)} \;;;\; x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\ ,\ x_3 > 0$$

أوجد كثافة احتمال المجموع $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$.

(الحل)

لاســتخدام أسلوب تحويل المتغيرات نقدم متغيران جديدان Y_2 و Y_3 ليكون عدد المتغــيرات القديمة X_1 و X_2 و X_3 مساويا لعدد المتغيرات الجديدة Y_1 و Y_2 و Y_3 . ونستخدم التحويلة التالية:

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \;;\; y_1 y_2 = x_1 + x_2 \;;\; y_1 y_2 y_3 = x_3$$

إذن:

$$x_1 = h^{-1}(y_1, y_2, y_3) = y_1(1 - y_2)$$

وبالمثل:

$$x_2 = y_1 y_2 (1 - y_3) \;;\; x_3 = y_1 y_2 y_3$$

وبمـــــــــا أن: $0 < x_1, x_2, x_3 < \infty$ إذن: $0 \le y_3 \le 1$ و $0 \le y_2 \le 1$ و $0 \le y_1 \le \infty$ وباســتخدام العلاقــة (6. 4. 24) نجــد أن دالــة كثافة الاحتمال المشتركة $g(y_1, y_2, y_3)$ للمتغيرات الثلاثة Y_1, Y_2, Y_3 هى:

$$g(y_1, y_2, y_3) = f\left[h_1^{-1}(y_1, y_2, y_3); h_2^{-1}(y_1, y_2, y_3); h_3^{-1}(y_1, y_2, y_3)\right] \cdot \left| J_{(y_1, y_2, y_3)} \right| .$$

حيث أن:

$$\left|J_{(y_1,y_2,y_3)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-y_2 & -y_1 & 0 \\ y_2(1-y_3) & y_1(1-y_3) & -y_1 y_2 \\ y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_1 y_2 \end{vmatrix} = y_1^2\, y_2 .$$

إذن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 و Y_2 هى:

$$g(y_1, y_2) = f\left[y_1(1-y_2), y_1 y_2(1-y_3), y_1 y_2 y_3\right]$$
$$= e^{-[y_1(1-y_2)+y_1 y_2(1-y_3)+y_1 y_2 y_3]} \cdot y_1^2\, y_2 .$$
$$= e^{-y_1} \cdot y_1^2\, y_2 \;\;;;\; 0 \le y_1 \le \infty \;,\; 0 \le y_2 \le 1 \;,\; 0 \le y_3 \le 1$$

وبمكاملـــة الدالـــة الســـابقة بالنسبة للمتغيرين Y_1 و Y_2 نحصل على دالة كثافة احتمال المجموع $Y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ فى الصورة:

$$g(y_1) = \int_0^1\!\!\int_0^1 e^{-y_1}\, y_1^2\, y_2\, dy_2\, dy_3 = \tfrac{1}{2} y_1^2\, e^{-y_1} \;\;;\; 0 \le y_1 \le \infty$$

(6 ــ 4 د ــ 2) عــندما تكــون العلاقة بين المتغيرات (الجديدة والقديمة) علاقة تبادلية غير وحيدة:

فـــى الـــنظرية الســـابقة وضـــعنا ثلاثـــة فـــروض، الفـــرض الأول أن العلاقة $y_i = h_i(x_1,\ldots,x_n)$ تمـــثل علاقة تبادلية وحيدة، وهذا الفرض قد لا يتحقق فى بعض الحـــالات حيـــث قـــد نجـــد أن التحويلة (16 .4 .6) تحدد لكل نقطة من نقط الفراغ $S_{\underline{x}_n}$ [المعطـــى بالعلاقة (15 .4 .6)] نقطة وحيدة فى الفراغ $S_{\underline{y}_n}$ [فراغ المتغير $(Y_1,\ldots,Y_n)$] ولكـــنها تحدد لكل نقطة من نقط الفراغ $S_{\underline{y}_n}$ أكثر من نقطة من نقط الفراغ $S_{\underline{x}_n}$، وبهذا تكون التحويلة تبادلية غير وحيدة وبالتالى فإن النظرية السابقة لا تنطبق على هذه الحالة.

إذا أمكــن تجــزىء الفــراغ $S_{\underline{x}_n}$ إلــى k مــن المجموعات المنفصلة $S_{\underline{x}_n}(i)$ $i=1,2,...,k$ بحيث أن التحويلة (6. 4. 16) تعتبر تحويلة تبادلية وحيدة بين كل مجموعة علــى حدة من المجموعات $S_{\underline{x}_n}(i)$ والمجموعة $S_{\underline{y}_n}$ أى تحدد لكل نقطة فى المجموعة $S_{\underline{x}_n}(i)$ نقطــة وحيدة فى $S_{\underline{y}_n}$ ولكل نقطة من نقط $S_{\underline{y}_n}$ تحدد نقطة وحيدة فى $S_{\underline{x}_n}(i)$ لجميع قيم $i=1,2,...,n$. وبفرض أن العلاقات العكسية (6. 4. 17) تأخذ الصورة التالية:

$$(6.4.26):\ x_i = h_{ir}^{-1}(y_1,...,y_n)\ ,\ i=1,2,...,n\ ,\ r=1,2,...,k$$

وجاكوبيان التحويلة هو:

$$(6.4.27):\ J_{r(y_1,...,y_n)} = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial h_{1r}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{1r}^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_{1r}^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}\right|\ ;\ r=1,2,...,k.$$

وبفرض أن المشتقات التفاضلية الجزئية داخل المحدد مستمرة وأن $J_r \neq 0$ لجميع قيم $r=1,2,...,k$ فيمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (6 ــ 4 د ــ 2):

إذا كانــت $X_1,...,X_n$ متغــيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(x_1,...,x_n)$ والمجموعة $S_{\underline{x}_n}$ تمثل فراغ المتغيرات $(x_1,...,x_n)$ حيث:

$$S_{\underline{x}_n} = \{(x_1,...,x_n) : f(x_1,...,x_n) > 0\}$$

وبفرض أن:

$$(6.4.28):\ y_i = h_i(x_1,...,x_n)\ ;;\ i=1,2,...,n.$$

تمــثل تحويلــة تبادلــية غير وحيدة، فإذا أمكن تجزىء الفراغ $S_{\underline{x}_n}$ إلى k من المجموعات المنفصلة $S_{\underline{x}_n}(i)$ و $i=1,2,...,k$ بحيث تكون التحويلة السابقة تحويلة تبادلية وحيدة بين $S_{\underline{x}_n}(i)$ والفراغ $S_{\underline{y}_n}$ للمتغيرات $Y_1,...,Y_n$. وإذا كانت:

$$x_i = h_{ir}^{-1}(y_1,...,y_n)\ ,\ r=1,2,...,k$$

تمـثل تحويلـة عكسـية تبادلـية وحـيدة بيـن $S_{\underline{x}_n}(i)$ و $S_{\underline{y}_n}$ لجمـيع قيم $r = 1, 2, ..., k$ ــ والجاكوبـيان $J_{r(y_1,...,y_n)}$ هو المعطى بالعلاقة (6. 4. 27) وبفرض أن كـل المشـتقات التفاضلية فى الجاكوبيان مستمرة وأن $J_{r(y_1,...,y_n)} \neq 0$ لجميع قيم $r = 1, 2, ..., k$ فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات $(Y_1, ..., Y_n)$ هي:

$$(6.4.29):\ g(y_1, ..., y_n) = \sum_{r=1}^{k} \left| J_{r(y_1,...,y_n)} \right| f\left[h_{1r}^{-1}(y_1, ..., y_n); ... ; h_{nr}^{-1}(y_1, ..., y_n)\right]$$

لجمـيع قيم $(y_1, ..., y_n) \in S_{\underline{y}_n}$ حيث $S_{\underline{y}_n}$ هى صورة المجموعة $S_{\underline{x}_n}$ طبقاً للتحويلة (6. 4. 28).

نتـيجة (6 ــ 4 د ــ 2): فـى الـنظرية السابقة بوضع $n = 2$ نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ ،$Y_1 = h_1(X_1, X_2)$ فى الصورة:

$$(6.4.30):\ g(y_1, y_2) = \sum_{r=1}^{k} \left| J_{r(y_1,y_2)} \right| f\left[h_{1r}^{-1}(y_1, y_2), h_{2r}^{-1}(y_1, y_2)\right]$$

لجميع قيم $(y_1, y_2) \in S_{\underline{y}_2}$.

والجاكوبـيـان $J_{r(y_1,y_2)}$ هـو المعطـى بالعلاقـة (6. 4. 27) عندما $n = 2$ و $f(x_1, x_2)$ هـى دالـة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 و X_2 و $S_{\underline{y}_2}$ هى المجموعة $S_{\underline{y}_n}$ المعطاة فى النظرية السابقة عندما $n = 2$.

مـثال (6 ــ 4 د ــ 2): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان كل منهما له توزيع معتاد قياسى بدالة كثافة احتمال:

$$f(x_i) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \quad ;; -\infty < x_i < \infty \ ; i = 1, 2.$$

أوجد دالة كثافة احتمال المجموع $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$.

(الحل)

لاسـتخدام أسـلوب تحويل المتغيرات نقدم متغير آخر Y_2 ليكون عدد المتغيرات (الجديـدة) Y_1 و Y_2 مساوياً لعدد المتغيرات (القديمة) X_1 و X_2. وباعتبار أن اهتمامنا

منصـــب على إيجاد دالة كثافة احتمال المتغير Y_1 فيمكن اختيار Y_2 فى صورة تمكننا مـــن اســـتخدام تحويلـــة رياضية بسيطة، لذلك نضع $Y_2 = X_2$. وبالتالى يمكن استخدام التحويلة:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 \ ; \ y_2 = x_2$$

وهذا يترتب عليه أن:

$$x_1 = \pm\sqrt{y_1 - y_2^2} \ ; \ x_2 = y_2$$

من هذا يتضح أن التحويلة ليست وحيدة.

وبما أن $-\infty < x_1 < \infty$ و $-\infty < x_2 < \infty$ إذن يمكن تمثيل هذا المدى بالمجموعة:

$$A(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty \ ; -\infty < x_2 < \infty\}$$

ومن العلاقة بين X's وY's نجد أن:

$$0 \le y_1 < \infty \ ; \ -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1} \ .$$

فإذا جزأنا المجموعة $A(x_1, x_2)$ إلى مجموعتين $A_1(x_1, x_2)$ و $A_2(x_1, x_2)$ حيث

$$A(x_1, x_2) = A_1(x_1, x_2) \cup A_2(x_1, x_2) \ ,$$

$$A_1(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 < \infty \ ; -\infty < x_2 < \infty\} \ ,$$

$$A_2(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < 0 \ ; -\infty < x_2 < \infty\}$$

نجــد أن التحويلة المستخدمة تعتبر تحويلة تبادلية وحيدة لكل من $A_1(x_1, x_2)$ و $A_2(x_1, x_2)$ حيث:

بالنسبة للمجموعة $A_1(x_1, x_2)$ نجد أن:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 \ ; \ y_2 = x_2$$

$$x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^2} \ ; \ x_2 = y_2$$

كما أن جاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J_{1(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(y_1 - y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(y_1 - y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالنسبة للمجموعة $A_2(x_1, x_2)$ نجد أن:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 \ ; \ y_2 = x_2$$

$$x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^2} \ ; \ x_2 = y_2$$

وجاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J_{2(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\left(y_1 - y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left(y_1 - y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وحيث أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 و X_2 هى:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \ ;; -\infty < x_1 < \infty \ , -\infty < x_2 < \infty.$$

إذن يمكـــن استخدام العلاقة (30 .4 .6) عندما $k = 2$ لإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 و Y_2 فى الصورة:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= \left|J_{1(y_1, y_2)}\right| \cdot f\left(-\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2\right) \\ &\quad + \left|J_{2(y_1, y_2)}\right| \cdot f\left(\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1 - y_2^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \ ;; \ y_1 \geq 0, -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1} \ . \end{aligned}$$

وبمكاملـــة الدالـــة السابقة بالنسبة لـــ y_2 نحصل على دالة كثافة احتمال Y_1 فى الصورة:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\, dy_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \int_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}} \frac{dy_2}{\sqrt{y_1 - y_2^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \arcsin \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \Big|_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y_1} \ ; \ y_1 > 0 \end{aligned}$$

أى أن Y_1 له توزيع أسى أو له توزيع كا^2 بدرجتى حرية ــ كما فى (8. 14. 1b).

ملاحظة (6 ــ 4 د ــ 3): مما سبق يتضح لنا أن أسلوب تحويل المتغيرات ــ فى حالــة المتغــيرات المســتمرة ــ والــذى تــم عرضــه فــى البند (6 ــ 4 د) بنظريتيه (6 ــ 4 د ــ 1 و2) ونتيجتيه (6 ــ 4 د ــ 1 و2) يتلخص فى الآتى:

عندما يكون لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ عددها n ولها توزيــع مشترك معروف $f(x_1, ..., x_n)$ ونرغب فى إيجاد توزيع دالة فى المتغيرات $X_1, ..., X_n$ لتكــن $Y_1 = h(X_1, ..., X_n)$ فــإن استخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد توزيع المتغير Y_1 يتطلب:

(أ) تعــريف n من المتغيرات الجديدة بحيث يكون Y_1 أحد هذه المتغيرات، وبذلك يكون عــدد المتغــيرات الجديــدة $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ مســاوياً لعــدد المتغــيرات القديمــة $X_1, X_2, ..., X_n$. ويمكن تطبيق الأسلوب المشار إليه فى البند (6 ــ 4 د) للحصول علــى دالــة كــثافة الاحــتمال المشتركة للمتغيرات الجديدة. فإذا رمزنا لهذه الدالة بالرمــز $g(y_1, ..., y_n)$ فيمكن إيجادها ــ إما باستخدام العلاقة (6. 4. 24) إذا كانت العلاقــــة بيــن المتغــيرات الجديــدة والقديمة علاقة تبادلية وحيدة وإما باستخدام العلاقــــة (6. 4. 29) إذا كانت العلاقة بين المتغيرات الجديدة والقديمة غير وحيدة ــ حيــث أن عدد المتغيرات الجديدة يساوى عدد المتغيرات القديمة مما يسمح بتطبيق الأسلوب الرياضى المعروف بتحويل المتغيرات فى التكامل المتعدد.

(ب) وبمكاملــة الدالــة $g(y_1, ..., y_n)$ بالنسبة لــ $y_2, ..., y_n$ ــ دون y_1 ــ نحصل على دالة كثافة احتمال المتغير $Y_1 = h(X_1, ..., X_n)$ ونرمز لذلك بالتعبير التالى:

$$(6.4.31):\ g(y_1) = \int_{y_1 = h(x_1, ..., x_n)} f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n$$

$$= \int_{y_2} ... \int_{y_n} g(y_1, ..., y_n)\, dy_2 ... dy_n .$$

حيــث $g(y_1)$ هى دالة كثافة احتمال المتغير (أو الدالة) $Y_1 = h(X_1, ..., X_n)$ وذلك مع مراعاة شروط انطباق أى من العلاقتين (6. 4. 24) و(6. 4. 29).

ونقــدم فــيما يلــى مجموعــة من الأمثلة لإيجاد توزيع دوال معينة فى متغيرات عشــوائية باســتخدام أســلوب تحويل المتغيرات نقدم من خلالها بعض التحويلات الهامة المفيدة فى مجال الإحصاء الرياضى.

مثال (6 ـ 4 د ـ 3): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال $f(x_1, x_2)$ وكان: $Y_1 = X_1 + X_2 \ ; \ Y_2 = X_2$ فأثبت أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 و Y_2 هى:

$$g(y_1, y_2) = \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{y_1+y_2}{2}, \tfrac{y_1-y_2}{2}\right)$$

(الحل)

من العلاقة بين المتغيرات نجد أن:

$$X_1 = \tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \ ; \ X_2 = \tfrac{1}{2}(Y_1 - Y_2)$$

والعلاقـــة بيـــن المتغيرات القديمة X_1 و X_2 والجديدة Y_1 و Y_2 علاقة تبادلية وحيدة وجاكوبيان هذه العلاقة هو:

$$J_{(y_1, y_2)} = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| = \tfrac{1}{2}$$

إذن باستخدام العلاقة (6. 4. 25) نحصل على $g(y_1, y_2)$ كما هى موضحة بالمثال.

مثال (6 ـ 4 د ـ 4): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال $f(x_1, x_2)$، وكان:

$$\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \ ; \ \theta = \arctan(X_2/X_1)$$
$$\rho \geq 0 \qquad ; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

فأثبت أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين ρ و θ هى:

$$g(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta).$$

(الحل)

من العلاقة بين المتغيرات نجد أن:

$$X_1 = \rho \cos\theta \ ; \ X_2 = \rho \sin\theta$$

والعلاقة بين المتغيرات القديمة X_1 و X_2 والجديدة ρ و θ علاقة تبادلية وحيدة. وجاكوبيان هذه العلاقة هو:

$$J_{(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

إذن باستخدام العلاقة (6.4.25) نحصل على $g(\rho,\theta)$.

مثال (6 ـ 4 د ـ 5): إذا كان X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال $f(x_1, x_2)$، وكان:

$$Y_1 = X_1\cos\theta + X_2\sin\theta$$
$$;;\ Y_2 = -X_1\sin\theta + X_2\cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

فأثبت أن: دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 و Y_2 هى:

$$g(y_1, y_2) = f(y_1\cos\theta - y_2\sin\theta,\ y_1\sin\theta + y_2\cos\theta).$$

(الحل)

باستخدام التحويلة المتعامدة:

$$\underline{Y} = C\underline{x}$$

حيث:

$$\underline{Y}' = (Y_1 \quad Y_2)\ ;\ \underline{x}' = (X_1 \quad X_2)$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

المصفوفة C متعامدة لأن مجموع مربعات عناصر كل صف تساوى واحد وحاصل ضرب الصفين يساوى صفر. إذن:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = C'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = Y_1\cos\theta - Y_2\sin\theta.$$

$$X_2 = Y_1\sin\theta + Y_2\cos\theta.$$

من الواضح أن العلاقة بين المتغيرات القديمة X_1 و X_2 والمتغيرات الجديدة Y_1 و Y_2 علاقة تبادلية وحيدة وجاكوبيان هذه العلاقة هو:

$$J_{(y_1, y_2)} = |C| = \pm 1$$

إذن بتطبيق العلاقة (6. 4. 25) نحصل على الدالة $g(y_1, y_2)$.

ملاحظة (6 ــ 4 د ــ 4): إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, ..., X_n$ لها توزيع مشترك $f(x_1, ..., x_n)$ يمكن تحليله إلى n من العوامل كما يأتى:

$$f(x_1, ..., x_n) = f(x_1)....f(x_n)$$

حيــث $f(x)$ هــى دالة كثافــة احتمــال (موحــدة) لكل متغيــر عشــوائى X_i $(i = 1, 2, ..., n)$، فــإن المتغــيرات $X_1, ..., X_n$ تسمى بــ "عينة عشوائية" حجمها n مسحوبة من مجتمع توزيعه ــ أو دالة كثافة احتماله ــ $f(\cdot)$. لذلك عند وجــود متغــيرات عشــوائية مستقلة $X_1, ..., X_n$ لها توزيع موحد $f(\cdot)$ فإننا قد نســتخدم تعبــير "متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها دالة كثافة الاحتمال $f(\cdot)$" أو نعــبر عــن ذلــك بالقول "$X_1, ..., X_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله $f(\cdot)$".

(6 ــ 5) توزيعات الإحصاءات الترتيبية للعينة:

(6 ــ 5 ــ 1) دالــة كــثافة احتمال إحصاء ترتيبى واحد ودالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصائين ترتيبيين أو أكثر:

لقــد قدمنا فى بند (3 ــ 2 ــ 4) الوسيط والكميات الترتيبية وذكرنا أن الوسيط هو إحــدى الثوابت أو القيم النموذجية التى تفيد فى تحديد خصائص المجتمع، وعرفنا وسيط المجــتمع بأنــه قــيمة x التى تحقق المعادلة $F(x) = \frac{1}{2}$ حيث $F(x)$ هى دالة التوزيع الاحــتمالى للمجــتمع. ويمكن تعميم ذلك بتعريف ما يسمى بالكميات الترتيبية Quantiles. والكمــية الترتيبــية مــن الدرجة p فى المجتمع تعرف بأنها قيمة x التى تحقق المعادلة $F(x) = p$ حيــث $F(x)$ هــى دالــة الــتوزيع الاحــتمالى للمجــتمع و p كسر حقيقى $0 \leq p \leq 1$، وبالتالى فإن الوسيط هو الكمية الترتيبية من الدرجة $\frac{1}{2}$ والربيع الأعلى هو الكمية الترتيبية من الدرجة $\frac{3}{4}$ والربيع الأدنى هو الكمية الترتيبية من الدرجة $\frac{1}{4}$. وسوف نرمــز للكمــية الترتيبية من الدرجة p بالرمز $X_{(p)}$ ــ حيث نضع الدليل السفلى p بين

قوسـين ــ وبالـتالى نرمز للربيع الأدنى بالرمز $X_{(\frac{1}{4})}$ وللوسيط بالرمز $X_{(\frac{1}{2})}$ وللربيع الأعلى بالرمز $X_{(\frac{3}{4})}$ ... وهكذا.

والكمية الترتيبية من الدرجة p التى تحسب من بيانات العينة تسمى "إحصاء العينة الترتيبى من الدرجة p" المقابل للكمية الترتيبية من الدرجة p فى المجتمع. وكلمة "إحصاء" هـنا تدل على أن الكمية الترتيبية من الدرجة p للعينة تمثل متغير عشوائى، فهى تختلف مـن عينة لأخرى بخلاف الكمية الترتيبية للمجتمع التى تعتبر كمية ثابتة تسمى بـ"معلمة المجتمع الترتيبية". وكل ثوابت المجتمع تسمى معالم أما القيم المناظرة لها فى العينة تسمى إحصـاءات. ولمـزيد مـن الـتعرف علـى معـنى "الإحصـاء" انظـر تعـريف (6 ــ 1) وكذلـك بند (11 أ ــ 10) التالى. والإحصاءات الترتيبية للعينة مثل عزوم العينة تلعـب دوراً هاماً فى الاستدلال الإحصائى. فالإحصاءات الترتيبية للعينة هى المتغيرات العشـوائية المقابلة للإحصاءات الترتيبية للمجتمع التى تمثل ثوابت المجتمع كما أن عزوم العينة هى المتغيرات العشوائية المقابلة لعزوم المجتمع التى تعتبر مجموعة من الثوابت.

ويرجع تعاظم الدور الذى تلعبه الإحصاءات الترتيبية فى الاستدلال الإحصائى إلى أن بعض خصائص هذه الإحصاءات لا تعتمد على توزيع المجتمع الذى نسحب منه العينة العشوائية. نفرض أن $X_1,...,X_n$ تمثل عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع دالة توزيعـه الاحـتمالى $F(x)$. فـإذا رتبنا قيم X's السابقة تصاعدياً حسب القيمة ورمزنا للمفـردة X الـتى ترتيـبها r بالرمز Y_r أو بالرمز $X_{(r)}$ ــ علماً بأن الترتيب هنا يتم تصـاعدياً علـى أساس قيمة كل مفردة أى أن Y_1 هى أصغر قيمة من قيم X يليها Y_2 الـتى تمثل ثانى قيمة (التالية من حيث الكبر) من قيم X و... Y_n هى أكبر قيمة من قيم X ــ فإن القيم الترتيبية الجديدة تحقق العلاقة

$$Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$$

ونعـرف القيم الترتيبية $Y_1,...,Y_n$ بأنها "الإحصاءات الترتيبية" للعينة العشوائية $X_1,...,X_n$.

والآن سـنحاول فـيما يلـى إيجـاد الـتوزيعات الاحتمالية المشتركة والهامشية للإحصاءات الترتيبية للعينة، علماً بأننا قبل ذلك أوجدنا التوزيعات الهامشية لأصغر قراءة $Y_1 = \min[X_1,...,X_n]$ وأكـبر قـراءة $Y_n = \max[X_1,...,X_n]$ ــ انظـر بـند (6 ــ 2 جـــ ــ 6) العلاقـات مـن (6. 2. 21) حـتى (6. 2. 26). وسنبدأ أولاً بتعريف الإحصاءات الترتيبية للمتغيرات العشوائية المستمرة.

تعريف (6 ـ 5 ـ 1) الإحصاءات الترتيبية Order Statistics:

نفـرض أن لديـنا عينة عشوائية $x_1,...,x_n$ حجمها n من مجتمع ما يمثله متغير مسـتمر X دالـة توزيعـه الاحتمالى $F(x)$ ودالة كثافة احتماله $f(x)=F'(x)$ حيث $f(x)>0$ لقـيم $a<x<b$. إذا رمزنا لأصغر قيمة من قيم X فى العينة بالرمز Y_1 والقيمة التالية لها (الأكبر منها مباشرة أو تساويها) بالرمز Y_2 وهكذا حتى أكبر قيمة فى العينة نرمز لها بالرمز Y_n. حيث $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$ تمثل قيم $X_1,...,X_n$ عندما تكون قيم X فى ترتيب تصاعدى حسب القيمة، فإن المتغير Y_r $(r=1,2,...,n)$ يسمى بـ"الإحصاء الترتيبى" Order Statistic ذو الترتيب r للعينة العشوائية $X_1,...,X_n$.

ملاحظة (6 ـ 5 ـ 1 أ):

(أ) يجـب ملاحظـة أن المتغـيرات $Y_1,...,Y_n$ تمـثل إحصاءات (فهى دوال فى العينة العشوائية $X_1,...,X_n$) بالإضافة إلى أنها فى ترتيب معين.

(ب) الإحصاءات الترتيبية $Y_1,...,Y_n$ تعتبر متغيرات غير مستقلة لأنه إذا كان Y_r أكبر من أو تساوى y فإن Y_{r+1} لابد أن تكون أكبر من أو تساوى y.

وهـى فى هذا تختلف عن المتغيرات $X_1,...,X_n$ التى تمثل مفردات العينة العشوائية حيث أنها متغيرات مستقلة.

نظرية (6 ـ 5 ـ 1):

إذا كانـت $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$ تمـثل الإحصـاءات الترتيبـية لعينة عشوائية $X_1,...,X_n$ مسـحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ ودالة توزيعه الاحتمالى $F(x)$ $(-\infty<a<x<b<\infty)$ فإن:

(أ) دالة كثافة احتمال الإحصاء الترتيبى Y_r هى:

$$\textbf{(6. 5. 1):}\ f_r(y_r)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y_r)]^{r-1}[1-F(y_r)]^{n-r}f(y_r).$$

لقيم $a<y_r<b$ وتساوى صفر خلاف ذلك.

(ب) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصائين الترتيبيين Y_r و Y_s $\left(1 \le r < s \le n\right)$ هى:

$$(6.5.2):\ f_{rs}\left(y_r, y_s\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}\left[F\left(y_r\right)\right]^{r-1}$$

$$\left[F\left(y_s\right) - F\left(y_r\right)\right]^{s-r-1}\left[1 - F\left(y_s\right)\right]^{n-s} f\left(y_r\right) f\left(y_s\right)$$

لقيم $a < y_r < y_s < b$ وتساوى صفر خلاف ذلك.

(جـ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات $Y_1, ..., Y_n$ هى:

$$(6.5.3):\ f_{1\cdots n}\left(y_1, ..., y_n\right) = n!\ f\left(y_1\right)\cdots f\left(y_n\right)$$

لقيم $a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < b$ وتساوى صفر خلاف ذلك.

(الإثبات)

$$f_r\left(y_r\right) = \lim_{\Delta y_r \to 0} \frac{F_r\left(y_r + \Delta y_r\right) - F_r\left(y_r\right)}{\Delta y_r} = \lim_{\Delta y_r \to 0} \frac{\Pr\left[y_r < Y_r \le y_r + \Delta y_r\right]}{\Delta y_r}$$

$$= \lim_{\Delta y_r \to 0} \frac{1}{\Delta y_r} \Pr\left[(r-1) \textbf{ of the X's} \le y_r\ ;\ \text{one } X_i \in \left(y_r, y_r + \Delta y_r\right]\right.$$

$$\left.;\ (n-r) \text{ of the } X_i > y_r + \Delta y_r\right]$$

ومـــن الـــتوزيع المتعدد الحدود بند (7 ــ 4 ــ 1) يمكن كتابة المعادلة السابقة فى الصيغة التالية:

$$f_r\left(y_r\right) = \lim_{\Delta y_r \to 0} \frac{n!}{(r-1)!\ 1!\ (n-r)!}\left[F(y_r)\right]^{r-1}$$

$$\frac{\left[F(y_r + \Delta y_r) - F(y_r)\right]}{\Delta y_r}\left[1 - F(y_r + \Delta y_r)\right]^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r)!}\left[F(y_r)\right]^{r-1}\left[1 - F(y_r)\right]^{n-r} f\left(y_r\right)$$

(أ) هـ. ط. ث

(ب) وبالمثل يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصائيين Y_r و Y_s لقيم $1 \le r < s \le n$ كما يلى:

$$f_{rs}(y_r, y_s) = \lim_{\substack{\Delta y_r \to 0 \\ \Delta y_s \to 0}} \frac{1}{\Delta y_r \, \Delta y_s} \Pr[y_r < Y_r \le y_r + \Delta y_r \ ; \ y_s < Y_s \le y_s + \Delta y_s]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{\Delta y_r \to 0 \\ \Delta y_s \to 0}} \frac{1}{\Delta y_r \, \Delta y_s} \Pr[(r-1)\, \textbf{of the X's} \le y_r \ ; \textbf{one X} \in (y_r, y_r + \Delta y_r] \\ &\quad ; (s-r-1)\, \textbf{of the X's} \in (y_r + \Delta y_r, y_s] \\ &\quad ; \textbf{one X} \in (\mathbf{y_s}, y_s + \Delta y_s] \\ &\quad ; (n-s)\, \textbf{of the X's} > y_s + \Delta y_s] \end{aligned}$$

ومن التوزيع المعتاد المتعدد بند (7 ــ 4 ــ 1):

$$\begin{aligned} f_{rs}(y_r, y_s) &= \lim_{\substack{\Delta y_r \to 0 \\ \Delta y_s \to 0}} \frac{1}{\Delta y_r \, \Delta y_s} \frac{n!}{(r-1)!\, 1!\, (s-r-1)!\, 1!\, (n-s)!} \\ &\quad [F(y_r)]^{r-1} [F(y_r + \Delta y_r) - F(y_r)] \\ &\quad [F(y_s) - F(y_r + \Delta y_r)]^{s-r-1} [F(y_s + \Delta y_s) - F(y_s)] [1 - F(y_s + \Delta y_s)]^{n-s} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!\, (s-r-1)!\, (n-s)!} [F(y_r)]^{r-1} \\ &\quad [F(y_s) - F(y_r)]^{s-r-1} [1 - F(y_s)]^{n-s} f(y_r)\, f(y_s) \end{aligned}$$

لقيم $a \le y_r < y_s \le b$ وتساوى الصفر لقيم $y_s \ge y_r$.

هـ. ط. ث (ب)

(جـ) وبصورة عامة نجد من (2. 18. 9) حتى (2. 18. 12) أن:

$$f_{12\cdots n}(y_1,\ldots,y_n)=\lim_{\Delta y_r\to 0}\frac{1}{\prod_{r=1}^{n}\Delta y_r}\Pr[y_1<Y_1\le y_1+\Delta y_1\ ;\ \ldots\ ;\ y_n<Y_n\le y_n+\Delta y_n]$$

$$=\lim_{\Delta y_r\to 0}\frac{1}{\prod_{r=1}^{n}\Delta y_r}\Pr[\mathbf{one X}\in(y_1,y_1+\Delta y_1]\ ;\ \cdots$$

$$;\ \mathbf{one X}\in(y_n,y_n+\Delta y_n)]$$

ومن التوزيع المتعدد الحدود بند (7 ــ 4 ــ 1):

$$=\lim_{\Delta y_r\to 0}\frac{n!}{\prod_{r=1}^{n}\Delta y_r}[F(y_1+\Delta y_1)-F(y_1)]\cdots[F(y_n+\Delta y_n)-F(y_n)]$$

$$=n!f(y_1)\cdots f(y_n)\ ;\ a\le y_1<y_2<\cdots<y_n\le b$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (6 ــ 5 ــ 1 ب):

دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأى مجموعة جزئية من المتغيرات $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ يمكن الحصول عليها بمكاملة الدالة $f_{12\cdots n}(y_1,\ldots,y_n)$ ــ المعطاة فى (جـ) من النظرية السابقة ــ بالنسبة لباقى المتغيرات التى لا تشملها المجموعة الجزئية.

(6 ــ 5 ــ 2) توزيع دوال فى إحصاءات ترتيبية:

Distribution of Functions of Order Statistics:

إذا كانت $Y_1\le Y_2\le\cdots\le Y_n$ هى الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية $X_1,\ldots,X_n$ مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$ فإن وسيط العينة يعرف بأنه الإحصاء الترتيبى الأوسط. فإذا كانت n عدد فردى ــ لتكن $n=2r+1$ حيث r عدد صحيح موجب ــ سيكون لدينا إحصاء ترتيبى أوسط وحيد هو Y_r وتكون دالة كثافة احتماله هى الدالة $f_r(y_r)$ المعطاة بالعلاقة (6. 5. 1)، أما إذا كانت n عدد

زوجـى ـ $n = 2r$ مـثلا ـ فإن الوسيط يكون متوسط الإحصائيين Y_r و Y_{r+1} أى أن الوسـيط $\frac{1}{2}(Y_r + Y_{r+1})$ وفى هذه الحالة يمكن الحصول على دالة كثافة احتمال الوسيط مـن دالـة كـثافة الاحـتمال المشـتركة للإحصـائيين Y_{r+1} و Y_r المعطاة فى نظرية (6 ـ 5 ـ 1) (ب)، ومن هذه الدالة المشتركة يمكن استخدام العلاقة $\frac{1}{2}(Y_r + Y_{r+1})$ فى إيجـاد دالة كثافة احتمال الوسيط. وبالمثل يمكن عمل ذلك بالنسبة للربيع الأدنى والربيع الأعلـى والمدى R حيث $R = Y_n - Y_1$ وغير ذلك من دوال فى الإحصاءات الترتيبية $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$. ونقـدم فـيما يلـى بعـض الـتوزيعات الاحتمالية لدوال فى الإحصـاءات الترتيبية $Y_1 \le \cdots \le Y_n$ لعينة عشوائية $X_1, ..., X_n$ مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله $f(x)$:

(أ) إذا كان حجم العينة $n = 2r + 1$ حيث r عدد صحيح موجب فإن وسيط العينة يكون هـو الإحصـاء الترتيـبى الأوسط ـ أى الإحصاء Y_r ـ وتكون دالة كثافة احتمال الوسيط هى الدالة $f_r(y_r)$ المعطاة بالعلاقة (6. 5. 1).

(ب) يمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_k, Y_r, ..., Y_s$ $(1 \le k < r < \cdots < s \le n)$ هى:

$$f_{kr\cdots s}(y_k, y_r, ..., y_s) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\ \Gamma(r-k)\cdots\Gamma(n-s+1)}$$
$$[F(y_k)]^{k-1}[F(y_r) - F(y_k)]^{r-k-1}\cdots$$
$$[1 - F(y_s)]^{n-s} f(y_k)\ f(y_r)\cdots f(y_s).$$

(جـ) إذا كان حجم العينة $n = 4m$ حيث m عدد صحيح موجب فيمكن تعريف الربيع الأدنـى بأنـه الإحصاء الترتيبى Y_m والربيع الأعلى هو الإحصاء الترتيبى Y_{3m} وتكـون دالـة كـثافة احـتمال الربيع الأدنى هى الدالة $f_m(y_m)$ المعطاة بالعلاقة (6. 5. 1) وبالمثل تكون دالة كثافة احتمال الربيع الأعلى هى $f_{3m}(y_{3m})$ كما أن دالة كـثافة الاحـتمال المشـتركة للربيعين الأدنى Y_m والأعلى Y_{3m} تكون هى الدالة $f_{m_1,m_3}(y_{m_1}, y_{m_3})$ المعطاة بالعلاقة (6. 5. 2) حيث $m_1 = m$ و $m_3 = 3m$.

تمارين الباب السادس

(6 ــ 1): إذا كانت X_1 و X_2 و X_3 تمثل عينة عشوائية حجمها 3 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 2x \;\;;;\;\; 0 < x < 1$$

و Y هو النهاية العظمى للمتغيرات X_1 و X_2 و X_3:

$$Y = \max_i (x_i) \;\;;;\;\; i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة كثافة احتمال Y.

(6 ــ 2): X_1 و X_2 و X_3 و X_4 تمثل عينة عشوائية مكونة من 4 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 3x(1-x)^2 \;\;;;\;\; 0 < x < 1$$

وتساوى صفر خلاف ذلك.

فـــإذا كان: Y_1 و Y_2 هما النهاية الصغرى والنهاية العظمى للمتغيرات X_1 و X_2 و X_3

$$Y_1 = \min_i (X_i) \;\;;;\;\; Y_2 = \max_i (X_i) \;\;;;\;\; i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال لكل من Y_1 و Y_2 .

(6 ــ 3): عند إلقاء زهرة نرد متزنة ثلاث مرات مستقلة. إذا كان المتغير العشوائى X_i هو عدد النقاط التى تظهر على سطح الزهرة الملقاة فى الرمية i $(i = 1, 2, 3)$ والمتغير العشوائى Y هو النهاية العظمى للمتغيرات X_1 و X_2 و X_3 أى أن:

$$Y = \max_i (X_i) \;\;;\;\; i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير Y.

(6 ــ 4): إذا كانت دالة احتمال المتغير العشوائى X هى:

$$P(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x \;\;;;\;\; x = 1, 2, 3, \ldots .$$

أوجد دالة احتمال المتغير: $Y = X^3$

(6 ـ 5): X_1 و X_2 عيــنة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احــتماله: $f(x)=\frac{1}{2}\;;;\;0<x<2$ وتســاوى الصفر خلاف ذلك. أوجد دالة كــثافة الاحــتمال المشــتركة للمتغيريــن X_1 و X_2. وإذا كــان المتغــير $Y=X_1+X_2$، فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير Y.

(6 ـ 6): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{36}x_1\,x_2\;\;;;\;\;x_1=1,2,3\;\;;;\;\;x_2=1,2,3.$$

أوجــــد: أولا: دالــة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيــرين $Y_1=X_1\,X_2$ و $Y_2=X_2$. ثانيا: دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير Y_1.

(6 ـ 7): X_1 و X_2 عيــنة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احــتماله: $f(x)=1\;\;;;\;\;0<x<1$ وتســاوى الصفر خلاف ذلك. أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى $Y=X_1/X_2$.

(6 ـ 8): عينة عشوائية مكونة من ثلاث مفردات X_1 و X_2 و X_3 مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\;\;;;\;\;-\infty\le x\le\infty$$

والمتغيرات:

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2)\;;\;Y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(X_1+X_2-2X_3)$$
$$;\;Y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3).$$

بين أن المتغيرات Y_1 و Y_2 و Y_3 مستقلة وأن توزيع كل منها هو نفس توزيع المتغيرات X's.

(6 ـ 9): فى التمرين السابق استخدم التحويلة القطبية التالية:

$$X_1=\rho\,\text{Cos}\,\theta_1\;\text{Cos}\,\theta_2\;\;;;\;\;X_2=\rho\,\text{Cos}\,\theta_1\;\text{Sin}\,\theta_2\;\;;;\;\;X_3=\rho\,\text{Sin}\,\theta_1$$

ثم بين أن المتغيرات ρ و θ_1 و θ_2 مستقلة وأن دالة كثافة احتمال ρ هى:

$$f(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\,\rho^2\;\;;;\;\;0\le\rho\le\infty.$$

(6 ـ 10): إذا كان:

$$f(x_1, x_2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_1+x_2} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2-x_1-x_2} \;;\; (x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1 و X_2. فـأوجد دالـة كـثافة الاحـتمال المشتركة لكل من $Y_1 = X_1 - X_2$ و $Y_2 = X_1 + X_2$.

(6 ـ 11): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \tfrac{x^2}{9} \;;\; 0 < x < 3$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال $Y = X^3$.

(6 ـ 12): X متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 2x\,e^{-x^2} \;;\; 0 < x < \infty.$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال المتغير $Y = X^2$.

(6 ـ 13): ثلاث متغيرات عشوائية X_1 و X_2 و X_3 لها التوزيع المشترك التالى:

$$f(x_1, x_2, x_3) = K\, x_1^{n_1-1}\, x_2^{n_2-1}\, x_3^{n_3-1}$$

والمتغيرات الثلاثة موجبة وتحقق العلاقة $X_1 + X_2 + X_3 \le 1$. بين أن:

$$K = \frac{\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1)}{\Gamma(n_1)\,\Gamma(n_2)\,\Gamma(n_3)}.$$

(6 ـ 14): X_1 و X_2 عيـنة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \;;\; -\infty \le x \le \infty.$$

بين أن دالة كثافة احتمال المتغير $Y = X_1/X_2$ هى:

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)} \;;\; -\infty \le y \le \infty$$

(أى أن النسـبة بين متغيرين مستقلين كل منهما له توزيع معتاد قياسى يكون لها توزيع كوشى).

(6 – 15): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان كل منهما له توزيع "جاما" دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,x_1^{a-1}\,x_2^{b-1}\,e^{-x_1-x_2}$$

$$;;\ 0<x_1<\infty\ ;\ 0<x_2<\infty\ ;\ a>0\ ;\ b>0$$

بين أن دالة كثافة احتمال المتغير $Y=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ هى:

$$g(y)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,y^{a-1}(1-y)^{b-1}\ ;;\ 0<y<1.$$

أى أن Y له توزيع $\beta(a,b)$.

(6 – 16): n من المتغيرات العشوائية $X_1,\ldots,X_n$ لها التوزيع المشترك التالى:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=K\,x_1^{m_1-1}\,x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}\cdot g(x_1+\cdots+x_n).$$

حيث كل هذه المتغيرات موجبة وتحقق العلاقة $\sum_{r=1}^{n}X_r\le 1$ بين أن:

$$K=\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\cdots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\cdots+m_n)}\int_0^1 y^{M-1}\,g(y)\,dy\,.$$

حيث: $M=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

(6 – 17): X متغير عشوائى له التوزيع المنتظم:

$$f(x)=\tfrac{1}{\pi}\ ;;\ -\tfrac{\pi}{2}\le x\le\tfrac{\pi}{2}$$

ويساوى صفر خلاف ذلك. بين أن المتغير $Y=\tan X$ له توزيع كوشى:

$$g(y)=\tfrac{1}{\pi(1+y^2)}\ ;;\ -\infty\le y\le\infty$$

(6 – 18): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان كل منهما له توزيع معتاد دالة كثافة احتماله:

$$f(x)=\tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\ ;;\ -\infty\le x\le\infty\ ;\ \sigma>0\ ;\ -\infty\le\mu\le\infty\,.$$

فـــإذا كـــان: $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ أوجـــد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1 و Y_2 وبين أنهما متغيران مستقلان.

(6 ـ 19): X_1 و X_2 و X_3 ثلاث متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع معتاد بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \;;;\; -\infty \le x \le \infty.$$

والمتغيرات العشوائية Y_1 و Y_2 و Y_3 معرفة بالعلاقات التالية:

$$X_1 = Y_1 \cos Y_2 \,\sin Y_3 \;;;\; X_2 = Y_1 \sin Y_2 \,\sin Y_3 \;;;\; X_3 = Y_1 \cos Y_3.$$

حيـــث: $0 \le Y_1 \le \infty$ و $0 \le Y_2 \le 2\pi$ و $0 \le Y_3 \le \pi$. بين أن المتغيرات العشوائية Y_1 و Y_2 و Y_3 مستقلة.

(6 ـ 20): X_1 و X_2 و X_3 تمـــثل عيـــنة عشوائية مكونة من 3 مفردات مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال: $f(x) = e^{-x} \;;;\; 0 \le x \le \infty$ فإذا كانت:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \,,\; Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3} \,,\; Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

بين أن المتغيرات العشوائية Y_1 و Y_2 و Y_3 مستقلة.

(6 ـ 21): X متغير عشوائى له التوزيع التالى:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \;;\; -\infty \le x \le \infty$$

والعلاقة بين X ومتغير آخر Y هى:

$$X = a \ln(Y - b) + c$$

بين أن التوقع $\overline{Y}$ والوسيط للمتغير Y تحقق العلاقة التالية:

$$\frac{\overline{Y} - Y_0}{\overline{Y} - Y_{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{(1/2a^2)} - e^{-(1/a^2)}}{e^{(1/2a^2)} - 1}$$

وعندما $a \to \infty$ فإن هذه النسبة تؤول إلى 3.

(6 ـ 22): إذا كانت: $f(x)=\frac{1}{2} \;;\; -1<x<1$ هى دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى X فأوجد دالة كثافة احتمال $Y=X^2$.

(6 ـ 23): إذا كان المتغير العشوائى X له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{4} \;;\; -1<x<3$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى $Y=X^2$.

(6 ـ 24): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان وكل منهما له التوزيع المنتظم التالى:

$$f(x)=1 \;;\; 0\le x\le 1.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالى ودالة كثافة الاحتمال للمتغيرات

(أ): $Y_1=X_1 X_2$ (ب): $Y_2=X_1-X_2$ (جـ): $Y_3=|X_1-X_2|$

(6 ـ 25): X_1 و X_2 و X_3 ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له التوزيع المنتظم التالى:

$$f(x)=1 \;;\; 0\le x\le 1.$$

أوجد احتمال أن معادلة الدرجة الثانية فى Y:

$$X_1 Y^2+2X_2 Y+X_3=0$$

يكون لها جذور حقيقية. كذلك أوجد الاحتمال نفسه إذا كانت المعادلة:

$$X_1 Y^2+X_2 Y+X_3=0$$

(6 ـ 26): إذا كان X_1 متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم دالة كثافة احتماله:

$$f_1(x)=\frac{1}{a_1-b_1} \;;\; a_1\le X_1\le b_1.$$

و X_2 متغيراً عشوائيا آخر مستقل عن X_1 وله توزيع منتظم:

$$f_2(x)=\frac{1}{a_2-b_2} \;;\; a_2\le X_2\le b_2.$$

فأوجد دالة كثافة احتمال المتغير $Y=X_1+X_2$.

(6 ـ 27): X_1 و X_2 و ... و X_n متغـيرات عشـوائية مسـتقلة وكل منها له التوزيع المنتظم التالى:

$$f(x_i) = 1 \;;\; 0 \le X_i \le 1 \; ; \; i = 1, 2, ..., n \, .$$

أوجد دالة كثافة احتمال كل من المتغيرات التالية:

(أ): المجموع $Y_2 = X_1 + X_2$

(ب): المجموع $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(جـ): المجموع $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(6 ـ 28): إذا كانت:

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1 + x_2)} \;;\; x_1 > 0 \, , \, x_2 > 0$$

هى دالة كثافة احتمال المتغيران الموجبان X_1 و X_2 فأوجد دالة كثافة احتمال المجموع $Y = X_1 + X_2$.

(6 ـ 29): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين X_1 و X_2 هى:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 \;;\; 0 \le x_1 \le 1 \; ; \; 0 \le x_2 \le 1 .$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X_1^2 و X_2^2 .

(6 ـ 30): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين X_1 و X_2 هى:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 \;;\; 0 < x_2 < x_1 \le 1 .$$

أوجد دالة كثافة احتمال الفرق $Y = X_1 - X_2$.

(6 ـ 31): إذا كانت X_1 و X_2 و ... و X_n متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له توزيع كوشى دالة كثافة احتماله:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \;;\; -\infty \le x \le \infty$$

أثبــت أن كــثافة احتمال المتوسط $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ هى نفس كثافة احتمال أى متغــير مــن المتغــيرات. وأن كــثافة احتمال المجموع: $Y = \sum_{1}^{n} X_i$ هى:

$$f_2(y) = \frac{n}{\pi[n + y^2]} \;;; \; -\infty \le y \le \infty$$

(6 ـ 32): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان مستقلان الأول له كثافة احتمال كوشى:

$$f_1(x_1) = \frac{a}{\pi[a^2 + x_1^2]} \;;; \; -\infty \le x_1 \le \infty .$$

والثانى له أيضا كثافة احتمال كوشى:

$$f_2(x_2) = \frac{b}{\pi[b^2 + x_2^2]} \;;; \; -\infty \le x_2 \le \infty$$

أثبت أن كثافة احتمال المجموع $Y = X_1 + X_2$ هى:

$$f(y) = \frac{(a + b)}{\pi[(a + b)^2 + y^2]} \;;; \; -\infty \le y \le \infty .$$

(6 ـ 33): X_1 و X_2 متغيران عشوائيان دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = \frac{K(x_1 + x_2 + 1)}{(1 + x_1)^4 (1 + x_2)^4} \;;; 0 \le x_1 \le \infty \;; 0 \le x_2 \le \infty .$$

بين أن: $K = 9/2$ وأثبت أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير X_1 هى:

$$f(x_1) = \frac{3(2x_1 + 3)}{4(1 + x_1)^4} \;;; 0 \le x_1 \le \infty .$$

(6 ـ 34): X_1, X_2, X_3 عيــنة عشوائية مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله: $f(x) = 2x \;; 0 < x < 1$. احسب احتمال أن أصغر مفردة من مفردات العينة X_1, X_2, X_3 تزيد عن وسيط التوزيع.

(6 ـ 35): إذا كانت دالة كثافة احتمال مجتمع له توزيع متقطع هى:

$$f(x) = \tfrac{1}{6} \;\; ; \;\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

وتســاوى صــفر خــلاف ذلك، فأثبت أن دالة كثافة احتمال أصغر مفردة من مفردات عينة حجمها 5 مفردات مسحوبة من هذا المجتمع هى:

$$g_1(y_1) = \left(\frac{7 - y_1}{6}\right)^5 - \left(\frac{6 - y_1}{6}\right)^5 \;\; ; \;\; y_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(يجب ملاحظة أن العينة مسحوبة من مجتمع له توزيع متقطع وليس مستمر كما ذكرنا فى البند (6 ـ 5) لذلك يجب أخذ ذلك فى الاعتبار عند حل هذا التمرين).

(6 ـ 36): إذا كانــت $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ هــى الإحصــاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها 5 مفردات مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = 3x^2 \;\; ; \;\; 0 < x < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن $Z_1 = Y_2/Y_4 \;\; ; \;\; Z_2 = Y_4$ مستقلان.

(6 ـ 37): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y هى:

$$f(x, y) = \tfrac{12}{7} x(x + y) \;\; ; \;\; 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

فإذا كانت:

$$U = \min\ (X, Y)$$
$$V = \max\ (X, Y)$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين V و U.

REFERENCES

1. ***Aroian, L. A.*** "A study of R. A. Fisher's z-distribution and the related F distribution," Annals of Mathematical Statistics, 12, 429- 448 (1941).

2. ***Ashby, T.*** "A modification to Paulson's approximation to the variance ratio distribution," The Computer Journal, 11, 209-210 (1968).

3. ***Bánkövi, G.*** "A note on the generation of beta distributed and gamma distributed random variables," Mathematical Proceedings of the Hungarian Academy of Science, Series A, 9, 555- 562 (1964).

4. ***Bartlett, M. S.*** "On the theory of statistical regression," Proc. Royal soc., Edinburgh, 53, 260 (1933).

5. ***Cheng, S. W. and Fu, J. C.*** "An algorithm to obtain the critical values of the t, χ^2 and F distributions," Statistics & Probability Letters, 1, 223- 227 (1983).

6. ***Cochran, W. G.*** "The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance," Proc. Camb. Phil. Soc., 30, 178- 191 (1934).

7. ***Craige, A. T.*** "Note on the independence of certain quadratic forms," Ann. Math. Statist., 14, 195- 197 (1943)

8. ***Cramér, H.*** "Random Variables and Probability Distributions," Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Physics, 36, Cambridge University Press, (1937).

9. ***Cramér, H.*** "Mathematical Methods of Statistics," Princeton University Press, Princeton, N.J., (1946).

10. ***Croxton, F. E., Cowden, D.J. and Klein, S.*** "Applied General Statistics," Prentice-Hall, New Delhi, (1971).

11. ***David, F. N.*** "Tables of the correlation coefficient," Cambridge Univ. Press, (1938).

12. ***David, F. N.*** "Note on the application of Fisher's k-statistics," Biometrika, 36, 383 (1949a).

13. ***David, F. N.*** "Moments of the Z and F distributions," Biometrika, 36, 394 (1949b).

14. ***David, F. N. and Johnsos, N. L.*** "The effect of non-normality on the power function of the F-test," Biometrika, 38, 43 (1951).

15. ***David, F. N. and Kendall, M. G.*** "Tables of symmetric functions," Biometrika, 36, 431; 38, 435; 40, 427; 42, 223 (1949, 1951, 1953 1955).

16. ***Dirichlet, P. G. L.*** "Sur un nouvelle methode pour la determination des integrals multiples," Comp. Rend. Acad. Sci., Vol. 8, 156- 160 (1939).

17. ***Elderton, W. P.*** "Tables for testing the goodness of fit of theory to observation," Biometrika, 1, 155- 163 (1902).

18. ***Ferguson, T. S.*** "Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach," Academic Press, Inc., New York, (1967).

19. ***Fisher, R. A.*** "On the probable error of a coefficient of correlation deduced from a small sample," Metron, 1, No. 4, 1 (1921).

20. ***Fisher, R. A.*** "On the interpretation of χ^2 from contingency tables and calculation of P," Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 85, 87- 94 (1922).

21. ***Fisher, R. A.*** "The distribution of the partial correlation coefficient," Metron, 3, 329 (1924a).

22. ***Fisher, R. A.*** "The influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamsted," phil. Trans., B, 213, 89 (1924b).

23. ***Fisher, R. A.*** "On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics," Proc. Int. Math. Congress, Vol. II, Toronto, 805- 813 (1924c).

24. ***Fisher, R. A.*** "Applications of "Student's" distribution," Metron, 5, 90- 104 (1925a).

25. ***Fisher, R. A.*** "Statistical Methods for Research Workers," firs edition, twelfth edition (1954), Oliver and Boyd, Edinburgh, [183, 185, 187, 276, 301], (1925b).

26. ***Fisher, R. A.*** "Moments and product moments of sampling distributions," Proc. London Math. Soc., Vol. 30, 199- 238 (1928a).

27. ***Fisher, R. A.*** "The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient," Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 121, 654- 673 (1928b).

28. ***Fisher, R. A. and Yates, F.*** "Statistical Tables for use in Biological, Agricultural and Medical Research," 4^{th} edition, Oliver and Boyd, Edinburgh, (1953).

29. ***Fisz, M***. "Probability Theory and Mathematical Statistics," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1963).

30. ***Goldstein, R. B.*** "Algorithm 451: chi-square quantiles," Communications of the Association of Computing Machinery, 16, 483- 485 (1973).

31. ***Gray, H. L., Thompson, R. W. and McWilliams, G. V.*** "A new approximation for the chi-square integral," Mathematics of Computation, 23, 85- 89 (1969).

32. ***Haines, P. D.*** "A closed form approximation for calculating the percentage points of the F and t distributions," Applied Statistics, 37, 95- 100 (1988).

33. ***Hodges, J. L., Jr, and Lehmann, E. L.*** "Moments of chi and power of t," proc. 5^{th} Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., 1, 187 (1968).

34. ***Hotelling, H.*** "New light on the correlation coefficient and its transforms," J. R. Statist. Soc., B, 15, 193 (1953).

35. ***Johnson, N. L. and Welch, B. L.*** "On the calculation of the cumulants of the χ^2 distribution," Biometrika, 31, 216- 218 (1939).

36. ***Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N.*** "Continuous Univariate Distributions," John Wily & Sons, Inc., New York (1994).

37. ***Kendall, M. G. and Stuart, A.*** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, Inference and Relationship," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1961).

38. ***Kendall, M. G. and Stuart, A.*** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, Distribution Theory," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1963).

39. ***Kendall, M.G. and Stuart, A.*** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 3, Design and Analysis, and Time Series," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1966).

40. ***Khamis, S. H. and Rudert, W.*** "Tables of the Incomplete Gamma Function Ratio: Chi-square Integral, Poisson Distribution," Justus von Liebig, Darmstadt, Germany, (1965).

41. ***Khatri, C. G.*** "Some results for the singular normal multivariate regression models," Sankhya A, 30, 267- 280 (1968).

42. ***Lancaster, H. O.*** "Traces and cumulants of quadratic forms in normal variables," J. R. Statist. Soc., B, 16, 247 (1954)

43. ***Lehmann, E. L.*** " Testing Statistical Hypotheses," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1959).

44. ***Merrington, M. and Thompson, C. M.*** "Tables of the percentage points of the inverted beta (F) distribution," Biometrika, 33, 73 (1943).

45. ***Miller, J. C. P.*** "Tables of binomial coefficients," Roy. Soc. Math. Tables, vol. 3 (1954).

46. ***Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C.*** "Introduction to the Theory of Statistics," McGraw- Hill, Inc., (1974).

47. ***Parzen, E.*** "Modern Probability and Its Applications," Wiley Eastern Private Limited, New Delhi, (1960).

48. ***Pearson, E. S.*** "A further development of tests of normality," Biometrika, 22, 239 (1930)

49. ***Pearson, E. S. and Hartley, H. O.*** "Biometrika Tables for Statisticians," Vol. 1, Cambridge University press, (1954).

50. ***Pearson, K.*** "On a criterion that a system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen in random sampling," phil. Mag., 50, 157- 175 (1900).

51. ***Pearson, K.*** "Tables of the Incomplete Gamma Function," Cambridge University press, editor (1922).

52. ***Pearson, K.*** "Tables of the Incomplete Beta Function," Cambridge University press, editor (1934).

53. ***Price, R.*** "Some non-central F-distributions expressed in closed form," Biometrika, 51, 107 (1964).

54. ***Rao, C. R.*** "Linear Statistical Inference and Its Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1965).

55. ***Romanowsky, V. I.*** "On the moments of standard deviations and correlation coefficient in samples from normal populations," Metron, 5, No. 4, 3 (1925).

56. ***Romanowsky, V. I.*** "On the distribution of the regression coefficient in samples from normal populations," Izvestia Acad. Nauk USSR, 20, 643 (1929).

57. ***Snedecor, G. W.*** "Calculation and Interpretation of the Analysis of Variance," Ames, IA: Collegiate Press (1934).

58. ***"Student"*** "On the probable error of the mean," Biometrika, 6, 1-25 (1908).

59. ***"Student"*** "New tables for testing the significance of observations," Metron, 5, 105- 108, 114- 120 (1925).

60. ***Tang, P. C.*** 'The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use," Statist. Res. Mem., 2, 126 (1938).

61. ***Tweedie, M. C. K.*** "Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions," Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 43, 41- 49 (1947).

62. ***Tweedie, M. C. K.*** "Some statistical properties of inverse Gaussian distributions," Virginia Journal of Science (New Series), 7, 160- 165 (1956).

63. ***Tweedie, M. C. K.*** "Statistical properties of inverse Gaussian distributions, I," Annals of Mathematical Statistics, 28, 362-377 (1957a).

64. ***Tweedie, M. C. K.*** "Statistical properties of inverse Gaussian distributions, II," Annals of Mathematical Statistics, 28, 696-705 (1957b).

65. ***Uspensky, J. V.*** "Introduction to Mathematical Probability," McGraw- Hill publishing company LTD., Bombay, New Delhi, (1937).

66. ***Vanderbeck, J. P. and Cooke, J. R.*** " Extended Table of Percentage Points of the Chi-Square Distribution," Nauweps Report 7770, U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, CA. (1961).

67. ***Weibull, W.*** "A statistical theory of the strength of material," Report No. 151, Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handligar, Stockholm (1939a).

68. ***Weibull, W.*** "The phenomenon of rupture in solids," Report No. 153, Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handligar, Stockholm (1939b).

69. ***Wilks, S. S.*** "Mathematical Statistics," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1962).

70. ***Wishart, J.*** "The cumulants of the z and of the logarithmic χ^2 and t distributions," Biometrika, 34, 170- 168 (1947).

71. ***Wishart, J.*** "The variance ratio test in statistics," Journal of the Institute of Actuaries Students' Society, 6, 172- 184 (1946).

72. ***Wold, A.*** "Sequential Analysis," Wiley, New York (1947).

73. ***Zar, J. H.*** "Approximations for the percentage points of the chi-squared distribution," Applied Statistics, 27, 280- 290 (1978).

المراجع العربية

1. "مــبادئ فــى نظــرية الاحــتمالات والإحصـــاء .لرياضى وتطبيقاتها فى الاستنتاج الإحصائى" د. مدنى دسوقى مصطفى ــ دار النهضة العربية (1968).

2. "طرق التحليل الإحصائى" د. أحمد عباده سرحان ــ دار المعارف (1965).

3. "مبادئ الطرق الإحصائية" د. عبد الرحمن البدرى ــ دار النهضة العربية (1964).

4. "نظرية الاحتمالات" د. جلال مصطفى الصياد ــ مطابع الأهرام التجارية القاهـــرة (1986).

5. "مبادئ الطرق الإحصائية" د. جلال الصياد، د. عبد الحميد محمد ربيع ــ تهامة للنشر والمكتبات (1983).

6. "مبادئ الإحصاء" د. عبد الحميد محمد ربيع ــ دار أبــو المجــد للطباعـــة بالهــرم (1992).

السيرة الذاتية للأستاذ الدكتور/ عبد الحميد محمد ربيع

- ولد في ١٩٤٢/١١/١٠ م بالفيوم، جمهورية مصر العربية.
- حصل على درجة البكالوريوس في الإحصاء التطبيقي من قسم الإحصاء بكلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة القاهرة عام ١٩٦٥م.
- حصل على درجة الماجستير في الإحصاء التطبيقي، جامعة القاهرة عام ١٩٧١م.
- حصل على درجة الدكتوراه في فلسفة الإحصاء، جامعة القاهرة عام ١٩٧٥م.
- عمل معيدا بقسم الإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر عام ١٩٦٥، ثم مدرسا مساعدا للإحصاء بها عام ١٩٧١. ثم مدرسا للإحصاء بها عام ١٩٧٥. ثم أستاذا مساعدا بها عام ١٩٨٠م.
- عمل خبيرا إحصائيا بالإدارة الاقتصادية لجامعة الدول العربية في الفترة ١٩٧٦-١٩٧٩م.
- عمل أستاذا مشاركا بكلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، قسم الإحصاء في الفترة ١٩٨٠-١٩٨٤م.
- ثم أستاذا للإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر عام ١٩٨٥م.
- ثم رئيسا لقسم الإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر في الفترة من ١٩٩٦/٨/٢٤م حتى ٢٠٠٠/٦/٢١ م.
- ثم عميدا لكلية التجارة جامعة الأزهر في الفترة من ٢٠٠٠/٦/٢٢م حتى الآن.

<u>من مؤلفاته</u>

(١) مبادئ الطرق الإحصائية

(٢) مبادئ الإحصاء

(٣) مبادئ الرياضة البحتة

(٤) أسئلة وتمارين (تحت الطبع)

هذا الكتاب فى جزئيه الأول والثانى يعتبر محاولة من المؤلف لتقديم مرجعاً للمكتبة العربية فى مجال الإحصاء الرياضى لندرة المراجع العربية فى هذا المجال. واختص الكتاب فى الجزء الأول بموضوعات نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال كثافات الاحتمال ودوال التوزيع الاحتمالي ومقاييس النزعة المركزية (التوقع والتباين والعزوم) كأدلة توصيف للمجتمعات الإحصائية سواء للمتغيرات العشوائية المفردة أو المتعددة وكذلك الدوال المولدة للاحتمالات والعزوم وتوزيعات دوال فى متغيرات عشوائية.

وفى الجزء الثانى من هذا الكتاب تناولنا بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة المتقطعة والمتصلة لبعض المتغيرات العشوائية المفردة والمتعددة. وقد أفردنا باباً كاملاً للتوزيع المعتاد المتعدد هو الباب التاسع لأهمية هذا التوزيع. وتناولنا بالدراسة بعض المتتابعات فى متغيرات عشوائية حيث قدمنا مفاهيم التقارب فى الاحتمال والتقارب باحتمال واحد صحيح والتقارب فى التوزيع. واختتمنا هذه الدراسة بتقديم بعض التوزيعات الاحتمالية (المضبوطة والتقاربية) لبعض الإحصاءات الهامة.

ويعتبر هذا الكتاب محاولة لتبسيط دراسة وتفهم موضوعات الإحصاء الرياضى للدارسين باللغة العربية نظراً لندرة عمل ذلك فى المراجع العربية السابقة. كما أنه يعتبر مقدمة جيدة لتقديم مؤلف عربى مماثل [illegible] موضوعات الاستدلال الرياضى . وهذا ما يقوم بإعداده المؤلف فى الوق[illegible] الحالي بفضل الله.